

УДК 539.3

© 2001 г. Л.И. Фридман

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Векторные потенциалы перемещений общих решений статических задач Буссинеска и Папковича представлены в виде, приводящем к разделению векторных уравнений потенциалов в цилиндрических и сферических координатах на два скалярных. Решения уравнений скалярных потенциалов для конечных тел канонической формы содержат ортогональные системы функций на координатных поверхностях в области, занятой рассматриваемым телом, включая его граничные поверхности. Тем самым создаются предпосылки для перехода граничных условий в бесконечные системы линейных алгебраических уравнений после разложения заданных на граничных поверхностях напряжений либо перемещений по ортогональным функциям уравнений потенциалов.

1. Введение. Под общим решением задач теории упругости в перемещениях подразумевается замена уравнения Ламе

$$\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1}{2(1+\nu)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

(ν – коэффициент Пуассона, $\mathbf{u}$ – безразмерный вектор перемещения, t – безразмерное время, отнесенное к l/c , l – характерный линейный размер, c – скорость звука в упругой среде) более простыми уравнениями для векторных и скалярных потенциалов вектора перемещений $\mathbf{u}$: векторными и скалярными волновыми уравнениями в нестационарных динамических задачах, векторными и скалярными уравнениями Гельмгольца в стационарных динамических задачах и векторными и скалярными уравнениями Лапласа и бигармоническими уравнениями в статических задачах.

Общее решение Буссинеска (ОРБ) статических задач теории упругости сводится к векторному уравнению [1–3]

$$\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{G} = 0 \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) (при $\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = 0$) удовлетворяется, если

$$\mathbf{u} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{G} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{G} \quad (1.3)$$

Общее решение Папковича (ОРП) статических задач сводится к векторному и скалярному уравнениям Лапласа [1, 2, 4]

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0, \quad \nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.4)$$

а вектор перемещений записывается в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{4(1-\nu)} \operatorname{grad}(\mathbf{rB} + \Phi) \quad (1.5)$$

Здесь $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки, в которой определяется перемещение $\mathbf{u}$.

Решение (1.2), (1.3) впервые было получено Буссинеском [3]. Полагая прямоугольные координаты x_1, x_2, x_3 безразмерными, уравнения равновесия в перемещениях, соответствующие векторному уравнению (1.1), но с учетом объемных сил, можно записать в виде

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial x_k} + \nabla^2 u_k + 2(1+\nu) \frac{1}{E} X_k = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

Здесь Δ – объемная деформация, u_k и X_k – компоненты вектора безразмерного перемещения и объемной силы соответственно, E – модуль упругости.

Буссинеск ввел три функции координат ψ_1, ψ_2, ψ_3 и представил компоненты перемещений в виде

$$u_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} + \nabla^2 \psi_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

Подстановка выражения (1.7) в систему трех дифференциальных уравнений (1.6) приводит к замене последней тремя уравнениями

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi_k = -2(1+\nu) \frac{1}{E} X_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.8)$$

При этом

$$2(1-\nu) \nabla^2 H = \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 \psi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 \psi_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \nabla^2 \psi_3$$

откуда следует

$$H = \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \right) + \Phi \quad (1.9)$$

Здесь Φ – произвольная гармоническая функция. Целесообразность сохранения функции Φ в выражении (1.9) весьма сомнительна, так как суммарный порядок уравнений (1.8) достаточно высок (см. разд. 5).

При $X_k = 0$ уравнения (1.8) соответствуют векторному уравнению (1.2), а зависимости (1.7) при учете выражения (1.9) при $\Phi = 0$ соответствуют векторному равенству (1.3).

Аналогичное решение однородной задачи значительно позднее опубликовал Б.Г. Галеркин [5], указавший без доказательств на общность решения (1.2), (1.3).

Решение (1.4), (1.5) получено П.Ф. Папковичем [4]. Позже появилась публикация Нойбера с аналогичным решением [6]. Как писал П.Ф. Папкович [2, 4], ранее решение (1.4), (1.5) было найдено Г.Д. Гродским, но опубликовано позднее [7].

Введя обозначение $\nabla^2 \psi_k = B_k$ ($k = 1, 2, 3$) и внося его в соотношения (1.7) в случае однородной задачи, когда $\nabla^2 B_k = 0$ ($k = 1, 2, 3$), в результате подстановки выражений (1.7) в уравнения (1.6) получим

$$2(1-\nu) \nabla^2 H = \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}$$

откуда следует

$$H = \frac{1}{4(1-\nu)} (x_1 B_1 + x_2 B_2 + x_3 B_3 + \Phi) \quad (1.10)$$

где Φ – произвольная гармоническая функция. Зависимостям (1.7), если учесть выражение (1.10), соответствует векторное равенство (1.5). Таким образом, ОРП сводится к четырем уравнениям Лапласа вместо трех бигармонических уравнений в ОРБ.

П.Ф. Папкович [2] дал глубокий анализ ОРБ, ОРП и некоторых других решений, обнаружил связь между ними и доказал их излишнюю общность. В частности, сохранение гармонической функции Φ в зависимости (1.5) для общности решения он не считал необходимым, но оставил ее для возможного облегчения удовлетворения граничным условиям. В отличие от ОРБ введение гармонической функции Φ в ОРП, как видно из последующего (разд. 2 и 3), не только полезно, но и необходимо.

Были построены [1, 8, 9 и др.] решения конкретных задач теории упругости для простейших конечных тел на основе частных решений уравнений потенциалов перемещений. Даны [10, 11] полные решения (полный набор частных решений) уравнений стационарной динамической задачи теории упругости для конечных тел канонической формы в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах, позволяющие решать задачи о частотах и формах собственных колебаний. Аппроксимация сложных тел каноническими телами решает актуальную в технике проблему вычисления собственных частот колебаний элементов конструкций на основе уравнений теории упругости [12].

Общие решения статических задач теории упругости методами, примененными ранее [10, 11], приводятся к виду, позволяющему решать граничные задачи для конечных тел канонической формы. Каноническим телом, как и прежде [10, 11], является конечное тело, полученное пересечением не более чем трех пар поверхностей, при этом поверхности каждой пары принадлежит к одному из трех семейств координатных поверхностей.

2. Представление общих решений в цилиндрических координатах. Каноническим телом в безразмерных цилиндрических координатах ρ, φ, z является тело, полученное пересечением цилиндрических поверхностей $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$, полуплоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ и плоскостей $z = 0$ и $z = z_0$ ($\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, 0 \leq z \leq z_0$). Каноническим телом является также круговой цилиндр ($\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, 0 \leq z \leq z_0$).

По аналогии с векторным потенциалом поперечных волн в стационарной динамической задаче [13] бигармонический вектор ОРБ записывается в виде

$$\mathbf{G} = \psi \mathbf{e}_z + \text{rot}(\psi_* \mathbf{e}_z) \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор по оси z , ψ и ψ_* – скалярные функции координат. (Возможность такого подхода к статическим задачам в цилиндрических координатах для ОРБ была указана ранее [14].)

Подстановка выражения (2.1) в уравнение (1.2) дает

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 \psi_* = 0 \quad (2.2)$$

Введем обозначения

$$\nabla^2 \psi = \psi_1, \quad -\frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial z} = F, \quad \nabla^2 \psi_* = \psi_2 \quad (2.3)$$

Вектор перемещений $\mathbf{u}$ после подстановки выражения (2.1) в уравнение (1.3) при учете обозначений (2.3) равен

$$\mathbf{u} = \text{grad} F + \psi_1 \mathbf{e}_z + \text{rot}(\psi_2 \mathbf{e}_z) \quad (2.4)$$

Таким образом, векторный потенциал $\mathbf{G}$ перемещений заменяется скалярными бигармоническим ψ и гармоническим ψ_2 потенциалами.

Уравнение Лапласа, так же как и уравнение Гельмгольца в стационарной динамической задаче [10, 11], решается методом разделения переменных. Параметры разделения подбираются так, что из трех обыкновенных дифференциальных уравнений два являются уравнениями Штурма–Лиувилля и, при соответствующих краевых условиях, описывают задачу Штурма–Лиувилля в области, занятой рассматриваемым каноническим телом. Поочередный набор параметров разделения, обуславливающий три возможных сочетания двух переменных, по которым решается задача Штурма–

Лиувилля, приводит к построению решений уравнений Лапласа и бигармонического уравнения в виде

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sum_m \sum_n R_{mn}^{(1)} u_m v_n + \sum_m \sum_k Z_{mk}^{(1)} u_m w_{km} + \sum_l \sum_n \Phi_{ln}^{(1)} v_n t_{ln} \\ \psi_2 &= \sum_m \sum_n R_{mn}^{(2)} \frac{1}{\mu_m} \frac{du_m}{d\varphi} \frac{1}{v_n} \frac{dv_n}{dz} + \sum_k \sum_m Z_{km}^{(2)} \frac{1}{\mu_m} \frac{du_m}{d\varphi} w_{km} + \sum_l \sum_n \Phi_{ln} \frac{1}{v_n} \frac{dv_n}{dz} t_{ln} \\ \psi &= \sum_m \sum_n (R_{mn} + R_{mn}^{(0)}) u_m v_n + \sum_k \sum_m (Z_{km} + Z_{km}^{(0)}) u_m w_{km} + \sum_l \sum_n (\Phi_{ln} + \Phi_{ln}^{(0)}) v_n t_{ln}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Здесь $u_m(\varphi)$, $v_n(z)$, $w_{km}(\rho)$, $t_{ln}(\rho)$ – собственные функции уравнений Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned}u_m &= \cos \mu_m \varphi, \quad \mu_m = \frac{(m-1)\pi}{\varphi_0}, \quad m = 1, 2, \dots \\ v_n &= \cos v_n z, \quad v_n = \frac{(n-1)\pi}{z_0}, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}w_{km} &= \frac{dY_\mu}{d\rho}(\rho_2 h_{km}) J_\mu(\rho h_{km}) - \frac{dJ_\mu}{d\rho}(\rho_2 h_{km}) Y_\mu(\rho h_{km}) \\ t_{1ln} &= \operatorname{Re} I_{i\tau}(\rho v_n), \quad t_{2ln} = \operatorname{Im} I_{i\tau}(\rho v_n) \\ t_{ln} &= \frac{dt_{2ln}}{d\rho}(\rho_2 v_n) t_{1ln}(\rho v_n) - \frac{dt_{1ln}}{d\rho}(\rho_2 v_n) t_{2ln}(\rho v_n), \quad n > 1 \\ t_{l1} &= \cos\left(\tau_{l1} \ln \frac{\rho_2}{\rho}\right), \quad \tau_{l1} = \frac{(l-1)\pi}{\ln(\rho_2/\rho_1)}, \quad l = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (2.7)$$

Y_μ и J_μ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно порядка μ_m (индекс m для краткости опущен), $I_{i\tau}$ – модифицированная функция Бесселя мнимого порядка $i\tau_{ln}$, i – мнимая единица, τ_{ln} – модуль порядка (индексы l и n для краткости опущены).

Собственные значения задачи Штурма–Лиувилля h_{km} и τ_{ln} ($n > 1$) определяются соответственно из уравнений

$$\frac{dw_{km}}{d\rho}(\rho_1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (h_{11} = 0, \quad w_{11} = 1); \quad \frac{dt_{ln}}{d\rho}(\rho_1) = 0, \quad n > 1 \quad (2.8)$$

Функции u_m и v_n образуют ортогональную систему функций на цилиндрических поверхностях $\rho = \text{const}$, включая цилиндрические границы $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$ ($0 \leq z \leq z_0$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$).

Функции w_{km} удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} w_{km} w_{lm} \rho d\rho = 0, \quad k \neq l$$

и вместе с функциями u_m образуют ортогональную систему функций на плоскостях $z = \text{const}$, в том числе на плоских границах $z = 0$ и $z = z_0$ ($\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$).

Функции t_{ln} удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} t_{ln} t_{kn} \frac{1}{\rho} d\rho = 0, \quad l \neq k$$

и вместе с функциями v_n образуют ортогональную систему функций на полуплоскостях $\varphi = \text{const}$, включая границы $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ ($\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $0 \leq z \leq z_0$).

Процедура разделения переменных в уравнении Лапласа дает также третью функцию, соответствующую каждому из трех сочетаний двух ортогональных функций

$$R_{mn}^{(j)} = A_{mn}^{(j)} \frac{I_{\mu}(\rho v_n)}{I_{\mu}(\rho_2 v_n)} + B_{mn}^{(j)} \frac{K_{\mu}(\rho v_n)}{K_{\mu}(\rho_1 v_n)}, \quad n > 1$$

$$R_{m1}^{(j)} = A_{m1}^{(j)} \rho^{\mu_m} + B_{m1}^{(j)} \rho^{-\mu_m}, \quad m > 1; \quad R_{11}^{(j)} = A_{11}^{(j)} \ln \rho + B_{11}^{(j)}$$

$$Z_{km}^{(j)} = C_{km}^{(j)} \exp[-h_{km}(z_0 - z)] + D_{km}^{(j)} \exp(-h_{km}z), \quad Z_{11}^{(j)} = C_{11}^{(j)}z + D_{11}^{(j)}$$

$$\Phi_{ln}^{(j)} = E_{ln}^{(j)} \exp[-\tau_{ln}(\varphi_0 - \varphi)] + G_{ln}^{(j)} \exp(-\tau_{ln}\varphi), \quad \Phi_{11}^{(j)} = E_{11}^{(j)}\varphi + G_{11}^{(j)}$$

$$j = 0, 1, 2$$

I_{μ} , K_{μ} – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка μ_m (индекс m опущен).

В решении бигармонического уравнения этим же сочетаниям ортогональных функций соответствует третья функция

$$R_{mn} = -\frac{1}{2v_n^2} \rho \frac{dR_{mn}^{(1)}}{d\rho}, \quad R_{m1} = \frac{1}{4(1-\mu_m^2)} \left(-\rho^2 R_{m1}^{(1)} + \rho^3 \frac{dR_{m1}^{(1)}}{d\rho} \right)$$

$$Z_{km} = -\frac{1}{2h_{km}^2} z \frac{dZ_{km}^{(1)}}{dz}, \quad Z_{11} = -\frac{1}{2} z^2 Z_{11}^{(1)} + \frac{1}{3} z^3 \frac{dZ_{11}^{(1)}}{dz}$$

$$\Phi_{ln} = -\frac{1}{2\tau_{ln}^2} \varphi \frac{d\Phi_{ln}^{(1)}}{d\varphi}, \quad \Phi_{11} = -\frac{1}{2} \varphi^2 \Phi_{11}^{(1)} + \frac{1}{3} \varphi^3 \frac{d\Phi_{11}^{(1)}}{d\varphi}$$

$A_{mn}^{(j)}, B_{mn}^{(j)}, C_{mk}^{(j)}, D_{mk}^{(j)}, E_{ln}^{(j)}, G_{ln}^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2$) – последовательности произвольных постоянных.

Внесение в (2.5) условий периодичности потенциалов перемещений по координате φ дает потенциалы перемещений для кругового цилиндра

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_m \left(\sum_n R_{mn}^{(1)} v_n + \sum_k Z_{km}^{(1)} w_{km} \right) \cos(m-1)\varphi \\ \psi_2 &= -\sum_m \left(\sum_n R_{mn}^{(2)} \frac{1}{v_n} \frac{dv_n}{dz} + \sum_k Z_{km}^{(1)} w_{km} \right) \sin(m-1)\varphi \\ \psi &= \sum_m \left[\sum_n (R_{mn} + R_{mn}^{(0)}) v_n + \sum_k (Z_{km} + Z_{km}^{(0)}) w_{km} \right] \cos(m-1)\varphi \end{aligned} \quad (2.9)$$

В случае осесимметричной задачи ($m = 1$) решение (2.9) совпадает с решением Б.Л. Абрамяна [15].

Представление потенциалов перемещений в виде (2.5) и (2.9) предопределяет переход граничных условий в бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно последовательностей произвольных постоянных. Свободные члены уравнений суть коэффициенты разложения заданных на граничных поверхностях напряжений либо перемещений по соответствующим ортогональным системам функций. Число граничных условий равно числу последовательностей произвольных постоянных. При усечении системы, т.е. при удержании по каждому индексу суммирования одного и того же числа слагаемых, число неизвестных соответствует числу уравнений.

Регулярность полученных бесконечных систем доказана для частного случая осесимметричной деформации кругового цилиндра [15].

Аналогично может быть представлено ОРП. Для этого гармонический вектор $\mathbf{B}$ записывается так же, как бигармонический вектор $\mathbf{G}$ (2.1)

$$\mathbf{B} = \psi_1 \mathbf{e}_z + \text{rot}(\psi_2 \mathbf{e}_z) \quad (2.10)$$

после чего первое векторное уравнение (1.4) переходит в два скалярных уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \psi_1 = 0, \quad \nabla^2 \psi_2 = 0 \quad (2.11)$$

Подстановка выражения (2.10) в равенство (1.5) дает вектор перемещения в форме (2.4), если ввести обозначение

$$F = -\frac{1}{4(1-\nu)} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + z \psi_1 + \Phi \right) \quad (2.12)$$

Хотя функции F имеют различный вид в ОРБ и ОРП, лапласиан этих функций одинаков в обоих общих решениях, чем обусловлена идентичность объемной деформации

$$\Delta = \text{div } \mathbf{u} = \nabla^2 F + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = -(1-2\nu) \nabla^2 F = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \psi_1}{\partial z}$$

Идентичны в обоих общих решениях также векторы элементарного вращения

$$\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{u} = \text{rot}(\psi_1 \mathbf{e}_z) + \text{grad} \frac{\partial \psi_2}{\partial z}$$

Функция ψ_1 в соотношениях (2.10) и (2.12) дается первой зависимостью (2.5), а функцию ψ_2 удобно записать в виде

$$\psi_2 = \sum_m \sum_n R_{mn}^{(2)} \frac{1}{\mu_m} \frac{du_m}{d\varphi} v_n + \sum_k \sum_m Z_{km}^{(2)} \frac{1}{\mu_m} \frac{du_m}{d\varphi} w_{km} + \sum_l \sum_n \Phi_{ln}^{(2)} v_n t_{ln}$$

Функция Φ может быть получена из ψ_1 заменой $R_{mn}^{(1)}, Z_{km}^{(1)}, \Phi_{ln}^{(1)}$ соответственно на $R_{mn}^{(0)}, Z_{km}^{(0)}, \Phi_{ln}^{(0)}$.

3. Представление общих решений в сферических координатах. В безразмерных сферических координатах ρ, θ, φ ($\rho, x, \varphi, x = \cos \theta$) каноническое тело занимает область, образованную пересечением сферических поверхностей $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$ с коническими поверхностями $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ ($x = x_1$ и $x = x_2$) и полуплоскостями $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ ($\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0$).

Каноническим телом является также тело вращения, полученное пересечением конических и сферических поверхностей ($\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$), и полая либо сплошная сфера.

Разделение векторного уравнения (1.2) на два скалярных обусловлено представлением бигармонического вектора $\mathbf{G}$ в виде

$$\mathbf{G} = \rho \psi \mathbf{e}_\rho + \text{rot}(\rho \psi_* \mathbf{e}_\rho) + \text{grad } \psi_0 \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{e}_\rho$ – единичный вектор, совпадающий с направлением изменения координаты ρ ; ψ, ψ_*, ψ_0 – скалярные функции координат.

В отличие от цилиндрических координат в сферических координатах аналогия между (3.1) и потенциалом поперечных волн в стационарной динамической задаче [13] неполная: в (3.1) введена дополнительная функция ψ_0 , являющаяся частным решением уравнения

$$\nabla^2 \psi_0 = -4\psi \quad (3.2)$$

Подстановка выражения (3.1) в уравнение (1.2) дает

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 \psi_* = 0 \quad (3.3)$$

Введение обозначений

$$\nabla^2 \psi = \psi_1, \quad -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \psi - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi) = F, \quad \nabla^2 \psi_* = \psi_2 \quad (3.4)$$

и подстановка выражения (3.1) в равенство (1.3) позволяют записать вектор перемещений в виде

$$\mathbf{u} = \text{grad } F + \rho \psi_1 \mathbf{e}_\rho + \text{rot}(\rho \psi_2 \mathbf{e}_\rho) \quad (3.5)$$

Таким образом, ОРБ в сферических координатах, как и в цилиндрических, сводится к бигармоническому уравнению (первое уравнение (3.3)) и уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \psi_2 = 0 \quad (3.6)$$

Решение этих уравнений в сферических координатах строится по той же схеме, что и в цилиндрических, и записывается в виде

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_m \sum_n R_{mn}^{(1)} u_m v_{mn} + \sum_k \sum_m X_{km}^{(1)} u_m w_k + \sum_k \sum_l \Phi_{kl}^{(1)} w_k t_{kl} \\ \psi_2 &= \sum_m \sum_n R_{mn}^{(2)} \frac{1}{\mu_m} \frac{du_m}{d\varphi} v_{mn} + \sum_k \sum_m X_{km}^{(2)} \frac{1}{\mu_m} \frac{du_m}{d\varphi} w_k + \sum_k \sum_l \Phi_{kl}^{(2)} w_k t_{kl} \\ \psi &= \sum_m \sum_n (R_{mn} + R_{mn}^{(0)}) u_m v_{mn} + \sum_k \sum_m (X_{km} + X_{km}^{(0)}) u_m w_k + \sum_k \sum_l (\Phi_{kl} + \Phi_{kl}^{(0)}) w_k t_{kl} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь $u_m(\varphi)$, $v_{mn}(x)$, $w_k(\rho)$, $t_{kl}(x)$ – ортогональные системы функций в области, занятой каноническим телом:

$$\begin{aligned} u_m &= \cos \mu_m \varphi, \quad \mu_m = \frac{(m-1)\pi}{\varphi_0}, \quad m = 1, 2, \dots \\ v_{mn} &= \frac{dQ_v^\mu}{dx}(x_2) P_v^\mu(x) + \frac{dP_v^\mu}{dx}(x_2) Q_v^\mu(x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$P_v^\mu(x)$, $Q_v^\mu(x)$ – присоединенные функции Лежандра соответственно первого и второго рода порядка μ_m степени v_{nm} (индексы m и n опущены для краткости). Степень v_{nm} является n -м собственным значением задачи Штурма–Лиувилля и определяется уравнением

$$\frac{dv_{mn}}{dx}(x_1) = 0, \quad v_{11} = 0, \quad v_{11} = 1$$

Функции $v_{mn}(x)$ удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{x_1}^{x_2} v_{mn} v_{ml} dx = 0, \quad n \neq l$$

и вместе с функциями u_m образуют ортогональную систему функций на сферических поверхностях $\rho = \text{const}$ ($x_1 \leq x \leq x_2$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$), включая сферические границы $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$.

Функция $w_k(\rho)$ дается зависимостью

$$w_k = \rho_2^{-3/2} \rho^{-1/2} \left[-\frac{1}{2} \sin \left(\tau_k \ln \frac{\rho_2}{\rho} \right) + \tau_k \cos \left(\tau_k \ln \frac{\rho_2}{\rho} \right) \right] \quad (3.9)$$

Собственные значения τ_k таковы:

$$\tau_k = \frac{(k-1)\pi}{\ln(\rho_2/\rho_1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функция w_k удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} w_k w_l d\rho = 0, \quad k \neq l$$

и вместе с функциями u_m образуют ортогональную систему на конических поверхностях $x = \text{const}$ ($\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$), включая конические границы $x = x_1$ и $x = x_2$.

Функция $t_{kl}(x)$ записывается в виде

$$t_{kl} = \frac{dt_{2kl}}{dx}(x_2)t_{1kl}(x) - \frac{dt_{1kl}}{dx}(x_2)t_{2kl}(x) \quad (3.10)$$

Здесь

$$t_{1kl} = \text{Re } P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{i\zeta}(x), \quad t_{2kl} = \text{Im } P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{i\zeta}(x)$$

$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{i\zeta}$ – присоединенная функция Лежандра первого рода мнимого порядка $i\zeta_{kl}$ и комплексной степени $-1/2 + i\tau_k$ (i – мнимая единица, индексы l и k для краткости опущены).

Модуль порядка ζ_{kl} является собственным значением Штурма–Лиувилля и определяется уравнением

$$\frac{dt_{kl}}{dx}(x_1) = 0, \quad l = 1, 2, \dots$$

Функции t_{kl} удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{x_1}^{x_2} t_{kl} t_{kn} \frac{1}{1-x^2} dx = 0, \quad l \neq n$$

и вместе с функциями w_k образуют ортогональную систему на полуплоскостях $\varphi = \text{const}$ ($\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $x_1 \leq x \leq x_2$), в том числе на плоских границах $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$.

При разделении переменных в уравнении Лапласа каждой паре ортогональных функций соответствует третья функция

$$\begin{aligned} R_{mn}^{(j)} &= A_{mn}^{(j)} \rho^{v_{mn}} + B_{mn}^{(j)} \rho^{-(v_{mn}+1)} \\ X_{km}^{(j)} &= C_{km}^{(j)} X_{1km} + D_{km}^{(j)} X_{2km} \\ \Phi_{kl}^{(j)} &= E_{kl}^{(j)} \exp[-\zeta_{kl}(\varphi_0 - \varphi)] + G_{kl}^{(j)} \exp(-\zeta_{kl}\varphi) \end{aligned}$$

Здесь X_{1km} и X_{2km} – частные решения дифференциального уравнения функции конуса [16]. Связь функций X_{1km} и X_{2km} с присоединенными функциями Лежандра дается зависимостями

$$\begin{aligned} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu} &= X_{1km} - X_{2km} \\ Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu} &= \frac{\pi}{4} \cos \pi \mu_m \left(\frac{1}{a_c} X_{2km} + \frac{1}{a_t} X_{1km} \right) + i \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{a_c} X_{2km} - \frac{1}{a_t} X_{1km} \right) \\ a_c &= \text{ch}^2 \frac{\pi \tau_k}{2} - \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \mu_m \right) \right], \quad a_t = \text{ch}^2 \frac{\pi \tau_k}{2} - \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \mu_m \right) \right] \end{aligned}$$

полученными из значений присоединенных функций Лежандра на "разрезе", т.е. для действительного аргумента $-1 < x < 1$ [16].

Функции X_{1km} и X_{2km} имеют вид

$$X_{rkm} = \frac{2^{\mu_m} \pi}{\gamma_{1km}(0)\gamma_{2km}(0)(1-x^2)^{\mu_m/2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\gamma_{rkm}(p)}{\Gamma(r-\frac{1}{2}+p)p!} x^{2p+r-1}, \quad r=1,2 \quad (3.11)$$

$$\gamma_{rkm}(p) = \left[\operatorname{Re} \Gamma\left(\frac{2r-1}{4} - \frac{\mu_m}{2} + p + \frac{1}{2} i\tau_k\right) \right]^2 + \left[\operatorname{Im} \Gamma\left(\frac{2r-1}{4} - \frac{\mu_m}{2} + p + \frac{1}{2} i\tau_k\right) \right]^2$$

Γ – гамма-функция.

В решении бигармонического уравнения каждой паре тех же ортогональных функций соответствует третья функция

$$R_{mn} = -\frac{1}{2(2\nu_{mn}+3)(-2\nu_{mn}+1)} \left(\rho^2 R_{mn}^{(1)} - 2\rho^3 \frac{dR_{mn}^{(1)}}{d\rho} \right)$$

$$X_{km} = -\rho^2 \frac{\gamma_{1km}(0)\gamma_{2km}(0)}{\pi 2^{\mu_m+1}} [C_{km}^{(1)}(-JX_{1km} + J_1 X_{2km}) + D_{mk}^{(1)}(-J_2 X_{1km} + JX_{2km})]$$

$$\Phi_{kl} = -\rho^2 (1-x^2) \frac{1}{2\zeta_{kl}^2} \left(-\frac{1}{2} \Phi_{kl}^{(1)} + \varphi \frac{d\Phi_{kl}^{(1)}}{d\varphi} \right)$$

$$J = \int X_{1km} X_{2km} dx, \quad J_r = \int X_{rkm}^2 dx, \quad r=1,2$$

$A_{mn}^{(j)}, B_{mn}^{(j)}, C_{km}^{(j)}, D_{km}^{(j)}, E_{kl}^{(j)}, G_{kl}^{(j)}$ ($j=0,1,2$) – последовательности произвольных постоянных.

Для тела вращения, ограниченного сферическими и коническими поверхностями ($\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $x_1 \leq x \leq x_2$), условия периодичности по координате φ удовлетворяются, если μ_m заменить на $m-1$:

$$\psi_1 = \sum_m \left(\sum_n R_{mn}^{(1)} \nu_{mn} + \sum_k Z_{km}^{(1)} w_{km} \right) \cos(m-1)\varphi$$

$$\psi_2 = \sum_m \left(\sum_n R_{mn}^{(1)} \nu_{mn} + \sum_k Z_{km}^{(2)} w_{km} \right) \sin(m-1)\varphi \quad (3.12)$$

$$\psi = \sum_m \left[\sum_n (R_{mn} + R_{mn}^{(0)}) \nu_{mn} + \sum_k (X_{km} + X_{km}^{(0)}) w_{km} \right] \cos(m-1)\varphi$$

В ОРП гармонический вектор $\mathbf{B}$ записывается по аналогии с бигармоническим вектором $\mathbf{G}$ (3.1) в виде

$$\mathbf{B} = \rho \psi_1 \mathbf{e}_\rho + \operatorname{rot}(\rho \psi_2 \mathbf{e}_\rho) + \operatorname{grad} \psi_0, \quad (3.13)$$

где ψ_0 – частное решение уравнения

$$\nabla^2 \psi_0 = -2\psi_1$$

При подстановке выражения (3.13) в первое уравнение (1.4) векторное уравнение Лапласа разделяется на два скалярных

$$\nabla^2 \psi_1 = 0, \quad \nabla^2 \psi_2 = 0 \quad (3.14)$$

а вектор перемещений $\mathbf{u}$ (1.5) принимает вид (3.5), если ввести обозначение

$$F = \psi_0 - \frac{1}{4(1-\nu)} \left(\rho^2 \psi_1 + \rho \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho} + \Phi \right)$$

Так же как в цилиндрических координатах, лапласиан функций F

$$\nabla^2 F = -2\psi_1 - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi_1)$$

един в ОРБ и ОРП, вследствие чего объемная деформация Δ идентична в обоих общих решениях:

$$\Delta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi_1)$$

Вектор $\mathbf{w}$ элементарного вращения также выражается одной и той же зависимостью в ОРБ и ОРП:

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot}(\rho \psi_1 \mathbf{e}_\rho) + \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi_2)$$

4. О краевых условиях задачи Штурма–Лиувилля. Собственные функции $y_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots$) задачи Штурма–Лиувилля на отрезке $a \leq x \leq b$ удовлетворяют краевым условиям [17]

$$\alpha_1 y_m(a) + \alpha_2 y'_m(a) = 0, \quad \beta_1 y_m(b) + \beta_2 y'_m(b) = 0 \quad (4.1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – постоянные, подчиненные условиям

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0 \quad (4.2)$$

Решения (2.6), (2.7), (3.8) – (3.10) задач Штурма–Лиувилля удовлетворяют краевым условиям (4.1) при $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = \beta_2 = 1$. Однако возможны другие сочетания постоянных $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$.

Уместно привести собственные функции уравнения Штурма–Лиувилля и уравнение для собственных значений при произвольных $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, подчиненных условиям (4.2).

Если $y_{1m}(x)$ и $y_{2m}(x)$ – два частных решения уравнения Штурма–Лиувилля, соответствующего собственному значению λ_m , то собственная функция $y_m(x)$ может быть записана в виде

$$y_m(x) = [\beta_1 y_{2m}(b) + \beta_2 y'_{2m}(b)] y_{1m}(x) - [\beta_1 y_{1m}(b) + \beta_2 y'_{1m}(b)] y_{2m}(x)$$

либо

$$y_m(x) = [\alpha_1 y_{2m}(a) + \alpha_2 y'_{2m}(a)] y_{1m}(x) - [\alpha_1 y_{1m}(a) + \alpha_2 y'_{1m}(a)] y_{2m}(x)$$

Уравнение собственных значений принимает вид

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \beta_1 [y_{1m}(a) y_{2m}(b) - y_{2m}(a) y_{1m}(b)] + \alpha_1 \beta_2 [y_{1m}(a) y'_{2m}(b) - y_{2m}(a) y'_{1m}(b)] + \\ & + \alpha_2 \beta_1 [y'_{1m}(a) y_{2m}(b) - y'_{2m}(a) y_{1m}(b)] + \alpha_2 \beta_2 [y'_{1m}(a) y'_{2m}(b) - y'_{2m}(a) y'_{1m}(b)] = 0 \end{aligned}$$

Выбор сочетаний постоянных $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ влияет не только на спектр собственных значений и, следовательно, на сходимость разложений по собственным функциям $y_m(x)$, но и на порядок усеченной системы линейных алгебраических уравнений при постоянном числе удерживаемых слагаемых. Чаще других применяются сочетания $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = \beta_2 = 1$ или $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \beta_2 = 0$. Последнее сочетание является необходимым условием перехода к рациональной форме граничных условий на плоскостях $z = 0$ и $z = z_0$ в цилиндрических координатах и на сферических границах $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$ в сферических координатах [18].

5. Заключительные замечания. В цилиндрических и сферических координатах представление векторного бигармонического потенциала перемещений зависимостями (2.1), (3.1) и векторного гармонического потенциала зависимостями (2.10), (3.13) приводит ОРБ к двум скалярным бигармоническим уравнениям (2.2) и (3.3), а ОРП – к трем скалярным уравнениям Лапласа (1.5), (2.11), (3.14). При этом излишняя общность ОРБ устраняется частично, а ОРП – полностью. Полное устранение излишней общности ОРБ обусловлено зависимостями (2.4), (3.5) векторов перемещений от первой

бигармонической функции (2.2), (3.3) и от лапласиана второй бигармонической функции. Таким образом, ОРБ приведено к скалярным бигармоническому уравнению и уравнению Лапласа.

Критерием достаточной общности можно считать суммарный порядок дифференциальных уравнений скалярных потенциалов перемещений. Если он равен 6, то число последовательностей произвольных постоянных в (2.5) и в (3.7) совпадает с числом граничных условий, равным 18. В этом случае при усечении бесконечной системы число неизвестных совпадает с числом уравнений.

Следует заметить, что аналогичные преобразования ОРБ и ОРП могут быть проведены не только в прямоугольной системе координат, но и в эллиптической цилиндрической, параболической цилиндрической и конической [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Теория упругости. М. Наука, 1970. 939 с.
2. Папкович П.Ф. Обзор некоторых общих решений основных дифференциальных уравнений покоя изотропного упругого тела // ПММ. 1937. Т. 1. Вып. 1. С. 117–132.
3. Boussinesq J. Application des potentiels a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides elastiques. Paris: Gauthier-Villars, 1885. 721 p.
4. Папкович П.Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции // Изв. АН СССР. ОМЕН. 1932. № 10. С. 1425–1435.
5. Галеркин Б.Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле // Докл. АН СССР. Сер. А. 1930. № 14. С. 353–358.
6. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Losung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie // ZAMM. 1934. V. 14. № 4. S. 203–212.
7. Гродский Г.Д. Интегрирование общих уравнений равновесия изотропного упругого тела при помощи ньютоновских потенциалов и гармонических функций // Изв. АН СССР. ОМЕН. 1935. № 4. С. 587–591.
8. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
9. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 281 с.
10. Фридман Л.И. Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289. № 4. С. 825–828.
11. Фридман Л.И. Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 12. С. 102–108.
12. Кузнецов Н.Д., Фридман Л.И., Колотников М.Е. Расчетные методы определения собственных частот элементов конструкций в форме тел вращения и близких к ним // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1993. № 3. С. 98–106.
13. Morse P.M., Feshbach H. Methods of theoretical physics. Pt. 2. N. Y., etc.: McGraw-Hill, 1953. = Морс Ф., Фейнбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
14. Фридман Л.И. О представлении решений динамических задач теории упругости в цилиндрических координатах // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 71–80.
15. Абрамян Б.Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра // Докл. АН Арм. ССР. 1954. Т. 19. № 1. С. 3–12.
16. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. V. 1. N. Y., etc.: McGraw-Hill, 1955. = Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.
17. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.
18. Фридман Л.И. О рациональной форме граничных условий в задачах теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 46–52.