

УДК 533.26

© 2001 г. К.Г. Гараев

### ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВДУВЕ ОХЛАДИТЕЛЯ В ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Рассматривается задача минимизации конвективного теплового потока, передаваемого от пограничного слоя к обтекаемой поверхности при сверхзвуковых режимах течения. В качестве управления выступает удельный расход охладителя через пористую или перфорированную оболочку; в качестве ограничения – мощность системы охлаждения, определяемая с помощью фильтрационного закона Дарси. В отличие от аналогичных работ по оптимальному управлению пограничным слоем (см., например, [1–3]), дополнительно рассматривается уравнение сохранения энергии в теплозащитной оболочке аппарата. Такой подход позволяет поддерживать желаемую температуру наружной стороны обшивки за счет профилирования толщины обшивки.

Для решения оптимальной задачи ниже использованы: инфинитезимальный аппарат Ли – Овсянникова [4], теория инвариантных вариационных задач Нётер [5, 6], метод обобщенных интегральных соотношений Дородницына [7], а также численные методы. Проведен вычислительный эксперимент для случая обтекания под нулевым углом атаки сферической головки сверхзвуковым потоком газа, изготовленной из коррозионностойкой стали 14X17H2 с пористостью  $\Pi = 0,3$ , коэффициентом проницаемости  $K_{\Pi} = 6,4 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$  и коэффициентом теплопроводности  $\lambda = 32 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ . Выигрыш в значении функционала по сравнению с постоянным вдоль образующей расходом охладителя составил 32%.

**1. Постановка задачи.** Уравнения ламинарного пограничного слоя на теле вращения, обтекаемом под нулевым углом атаки, возьмем в виде [8]

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v r) &= 0 \\ \rho \left( u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ p &= \rho R T, \quad \mu = \mu_{eo} \tau b(\tau) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ось  $x$  направлена вдоль образующей тела осевой симметрии, ось  $y$  перпендикулярна оси  $x$  по направлению внешней нормали,  $u, v$  – проекции вектора скорости на координатные оси,  $p$  – давление;  $r(x)$  – текущий радиус тела вращения,  $H = C_p T + u^2/2$  – полная энтальпия,  $C_p$  – теплоемкость при постоянном давлении,  $T$  – температура газа,  $R$  – газовая постоянная;  $\text{Pr}$  – число Прандтля,  $b(\tau)$  – известная функция безразмерной температуры  $\tau = T/T_{eo}$ ; индекс  $e$  соответствует параметрам газа на внешней границе пограничного слоя, индекс  $o$  – в точке полного торможения потока.

Граничные условия примем в виде

$$\begin{aligned} y = 0: \quad u = 0, \quad v = (m/\rho)_w, \quad H = H_w(x) = C_p T_w(x) \\ y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow U_e(x), \quad H \rightarrow H_e(x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $T_w(x)$  – заданная температура наружной стороны обшивки (допускается, что она равна температуре пристеночного слоя газа);  $m_w = (\rho v)_w$  – удельный расход вдуваемого газа (того же состава, что и в набегающем потоке) через единицу площади в единицу времени; индекс  $w$  соответствует параметрам газа на стенке. Мощность, затрачиваемая системой охлаждения на вдув газа через пористую или перфорированную поверхность на участке  $[0, x_k]$ , при учете закона Дарси [9] оценивается функционалом

$$N = 2\pi \int_0^{x_k} r \Delta p v_w dx = 2\pi a \int_0^{x_k} r v_w^2 dx \quad (1.3)$$

где параметр  $a$  зависит от толщины обшивки, коэффициентов пористости и проницаемости материала, а также теплофизических свойств газа в порах.

Ставится следующая вариационная задача. Среди непрерывных управлений  $m(x) = (\rho v)_w$  требуется найти такое, которое обеспечивает минимум количества тепла

$$Q = 2\pi \int_0^{x_k} r \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (1.4)$$

передаваемого в единицу времени от пограничного слоя к обтекаемой поверхности тела вращения при заданном ограничении на мощность системы охлаждения (1.3) и связях (1.1), (1.2).

С помощью преобразований Степанова – Манглера – Дородницына [8, 10, 11]

$$\begin{aligned} s = \frac{1}{l^3} \int_0^x r^2 \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)} dx, \quad t = \frac{U_e \eta}{l \sqrt{l v_{eo} V_{\max}}} \\ \eta = \int_0^y \frac{(1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}{\tau} r dy, \quad U = \frac{u}{u_e}, \quad V = \sqrt{\frac{V_{\max} l^3}{v_{eo}}} \frac{w}{u_e} + \frac{\dot{U}_e}{U_e} t U \\ w = (1 - \alpha_e^2)^{-\gamma/(\gamma-1)} \frac{u}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{v}{\tau r}, \quad \psi = 1 - \tau - \alpha^2 \\ V_{\max} = V_{\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_{\infty}^2}}, \quad \alpha = \frac{u}{V_{\max}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $l$  – некоторый характерный размер (например, радиус сферы  $r_0$  в случае обтекания сферической головки), система (1.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial s} + V \frac{\partial U}{\partial t} = \beta (1 - U^2 - \psi) + \frac{\partial}{\partial t} \left( b(\tau) \frac{\partial U}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \\ U \frac{\partial \psi}{\partial s} + V \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial t} \left( b(\tau) \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \alpha_e^2 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( b(\tau) \frac{\partial U^2}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Краевые условия (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} t = 0: \quad U = 0, \quad V = m/q, \quad \psi = 1 - \tau_w \\ t \rightarrow \infty: \quad U \rightarrow 1, \quad \psi \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$m(s) = \frac{(\rho v)_w}{\rho_{eo}} \sqrt{\frac{l}{v_{eo} V_{\max}}}, \quad q = \left(\frac{r}{l}\right) \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \beta = \frac{d\alpha_e / ds}{\alpha_e (1 - \alpha_e^2)}$$

Функционал (1.4) и изопериметрическое условие (1.3) запишутся в виде

$$Q^* = \frac{Q \text{Pr}}{2\pi\mu_{eo} C_p T_{eo}} \sqrt{\frac{v_{eo}}{l^3 V_{\max}}} = - \int_0^{s_k} \left( b \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{t=0} ds \quad (1.8)$$

$$N^* = \frac{N}{2\pi\alpha v_{eo} l V_{\max}} = \int_0^{s_k} f m^2 (1 - \psi_w)^2 ds, \quad f = \frac{l}{r\alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{3\gamma/(\gamma-1)}} \quad (1.9)$$

Вариационная задача в новых переменных ставится так: среди непрерывных управлений  $m(s)$  требуется отыскать такое, которое реализует минимальное значение функционала (1.8) при связях (1.6)–(1.7) и изопериметрическом условии (1.9).

Уравнения Эйлера – Лагранжа для осесимметричного случая по форме полностью совпадут с уравнениями Эйлера – Лагранжа для плоского случая [12, 13], так как уравнения (1.6) совпадают по форме с уравнениями пограничного слоя для плоского случая. Аналогичное утверждение справедливо и для условий трансверсальности. Следовательно, для решения поставленной оптимальной задачи можно использовать подход [12], основанный на совместном использовании теории инвариантных задач Нётер и инфинитезимального аппарата Ли – Овсянникова. Этот подход позволил получить (так же как и в плоском случае) приближенную аналогичную формулу для оптимального удельного расхода охладителя в окрестности критической точки в виде

$$m(x) = \frac{\text{Pr}(1 - \alpha_e^2)^{2\gamma/(\gamma-1)}}{2\alpha U_0 (1 - \omega_0 / \theta_0)^2} \left[ (A_1^{(1)} + N_0 B_1^{(1)}) + \left(\frac{x}{x_k}\right)^{-p_1} (A_1^{(2)} + N_0 B_1^{(2)}) + \right. \\ \left. + \left(\frac{x}{x_k}\right)^{-p_2} (A_1^{(3)} + N_0 B_1^{(3)}) \right] \quad (1.10)$$

Здесь

$$A_1^{(1)} = \frac{\gamma^* b + s^* P_0}{p_1 p_2}, \quad A_1^{(2)} = \frac{p_1 a + \gamma^* b + s^* P_0}{p_1 (p_1 - p_2)}, \quad A_1^{(3)} = \frac{p_2 a + \gamma^* b + s^* P_0}{p_2 (p_2 - p_1)}, \\ B_1^{(1)} = \frac{12\sigma^*}{p_1 p_2}, \quad B_1^{(2)} = \frac{12\sigma^* + p_1 s^*}{p_1 (p_1 - p_2)}, \quad B_1^{(3)} = \frac{12\sigma^* + p_2 s^*}{p_2 (p_2 - p_1)} \\ a = \gamma^* U_0 - s^* N_0, \quad b = S_0 - 2U_0, \quad \sigma^* = s^* Q_0 - \gamma^* U_0 \\ P_0 = \frac{l_0}{\text{Pr}} \left( \frac{2m_0}{\theta_0} + \frac{\omega_0}{\theta_0} - 1 - \frac{2c}{\theta_0^2} \right), \quad U_0 = -\frac{\theta_0}{6} + \frac{\theta_1}{4} \\ N_0 = \frac{l_0}{6} \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) + \frac{l_1}{12}, \quad Q_0 = \frac{2c}{\theta_0^2}, \quad S_0 = m_0 - W_0 \\ l_0 = 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3 \frac{\omega_0}{\theta_0}, \quad l_1 = 4 \left( \frac{\omega_0}{\theta_0} - 2 \frac{\omega_1}{\theta_1} \right) \\ W_0 = m_0 - \frac{c}{\text{Pr} \theta_0} + \frac{l_0}{\text{Pr}} Z_0, \quad c = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma} \left( 1 - \frac{P_\infty}{P_{eo}} \right)}, \quad Z_0 = -\frac{\theta_0}{6} + \frac{\theta_1}{3} \quad (1.11)$$

$$\frac{P_{\infty}}{P_{eo}} = \left( \frac{\gamma+1}{2} M_{\infty}^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \left( \frac{\gamma+1}{2\gamma M_{\infty}^2 - \gamma + 1} \right)^{-1/(\gamma-1)}$$

$$\gamma^* = -P_0 - \alpha_1 Q_0 + \beta_1 P_0, \quad S^* = W_0 - \alpha_1 U_0 - \beta_1 S_0$$

$$\alpha_1 = 12 \left( \frac{N_0 Z_0}{U_0} - M_0 \right), \quad \beta_1 = -\frac{Z_0}{U_0}; \quad M_0 = l_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \text{Pr}} \right)$$

$p_1, p_2$  – корни квадратного уравнения

$$p^2 + p \left[ \left( \frac{S_0}{U_0} - 2 \right) + 12(Q_0 - N_0) \right] + 12 \left[ P_0 + Q_0 \left( \frac{S_0}{U_0} - 2 \right) \right] = 0 \quad (1.12)$$

Следует подчеркнуть, что это уравнение не эквивалентно аналогичному уравнению, полученному для плоского случая [12].

Постоянные  $\theta_0, \theta_1, \omega_0, \omega_1$  находятся из алгебраической системы уравнений

$$\theta_0 = 18m_0 - 7\theta_1 - 9\theta_0 + 10\omega_1 + 8\omega_0 - \frac{32c}{\theta_1} + \frac{34c}{\theta_0}$$

$$\theta_1 = 12m_0 - 4\theta_0 - 6\theta_1 + 8\omega_1 + 4\omega_0 - \frac{16c}{\theta_1} + \frac{20c}{\theta_0}$$

$$\omega_1 = 6m_0 \frac{\omega_0}{\theta_0} - \omega_0 - 3\omega_1 - 4 \frac{\omega_1^2}{\theta_1} + \frac{\omega_0^2}{\theta_0} + 6c \frac{\omega_0}{\theta_0^2} +$$

$$+ c \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \left[ \frac{1}{6\theta_0} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3 \frac{\omega_0}{\theta_0} \right) - \frac{2\omega_0}{\theta_1 \theta_0} \right] - \frac{6c}{\text{Pr} \theta_0} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3 \frac{\omega_0}{\theta_0} \right) \quad (1.13)$$

$$\omega_0 = \theta_0(1 - \tau_w)$$

справедливых для случая линейной зависимости вязкости от температуры.

В формулах (1.11), (1.13)  $m_0$  – постоянный (вдоль образующей тела вращения) расход охладителя.

**2. О форме внутреннего контура стенки, обеспечивающей требуемую температуру наружной стороны обшивки.** Обычно при решении проблем неразрушающейся тепловой защиты предполагается поддержание желаемой температуры стенки (со стороны газового потока) с помощью соответствующего регулирующего расхода охладителя через пористую или перфорированную поверхность. Так как при решении рассматриваемой здесь вариационной задачи местный расход газа уже выбран в качестве управляющего воздействия, для обеспечения требуемой температуры наружной стороны обшивки выберем переменную толщину стенки. С математической точки зрения к уравнениям пограничного слоя следует добавить уравнение сохранения энергии в теплозащитной оболочке аппарата, которое при учете допущений об однородности и однотемпературности среды для стационарного случая обтекания сферы можно записать в виде [14]

$$\lambda^* \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} - \left( \frac{C_p (\rho v)_w}{(1 + y/r_0)^2} - \frac{2}{r_0} \frac{\lambda^*}{1 + y/r_0} \right) \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\lambda^* = \lambda_1(1 - \Pi) + \lambda_2 \Pi$$

Здесь  $T^*$  – температура пористой стенки,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\rho$  – плотность,  $C_p$  – удельная теплоемкость,  $r_0$  – радиус сферы; (индекс 1 соответствует

характеристикам твердой компоненты оболочки, индекс 2 – характеристикам охладителя, движущегося в пористом материале);  $\Pi$  – пористость материала; координаты  $x$  и  $y$  выбраны так же, как и для основного потока.

Для уравнения (2.1) используются следующие краевые условия

$$y = 0: \quad T^* = T_w; \quad y = -h, \quad T^* = T_c \quad (2.2)$$

где  $h(x)$  – толщина стенки,  $T_c$  – температура охладителя на внутреннем контуре стенки.

Условие сопряжения тепловых потоков на обтекаемой поверхности представим в виде [15]

$$\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y} = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее краевым условиям (2.2), имеет вид

$$T^*(x, y) = T_w + (T_c - T_w) \left[ 1 - \exp\left(k^2 \frac{y/r_0}{1 + y/r_0}\right) \right] \left[ 1 - \exp\left(-k^2 \frac{h/r_0}{1 - h/r_0}\right) \right]^{-1} \quad (2.4)$$

$$k^2 = \frac{r_0 c_{p1} (\rho v)_w}{\lambda^*}$$

При учете соотношения (2.4) равенство (2.3) запишется в виде

$$-\frac{1}{f_0} \left( 4 \frac{\varphi_1}{f_1} - 3 \frac{\varphi_0}{f_0} \right) = \frac{r}{qr_w} \text{Pr} m \left( 1 - \frac{\varphi_0}{f_0} - \tau_c \right) \left[ 1 - \exp\left(-m\delta \frac{h}{1 - h/r_0}\right) \right]^{-1} \quad (2.5)$$

Здесь

$$\delta = \frac{\rho_{eo} C_p}{\lambda^*} \sqrt{\frac{v_{eo} V_{\max}}{r_0}}, \quad q = \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Решая уравнение (2.5) относительно  $h(x)$ , получим

$$h(x) = \frac{\ln S}{r_0^{-1} \ln S - m\delta} \quad (2.6)$$

$$S = 1 + \frac{r}{qr_0} \text{Pr} m \left( 1 - \frac{\varphi_0}{f_0} - \tau_c \right) \left[ \frac{1}{f_0} \left( 4 \frac{\varphi_1}{f_1} - 3 \frac{\varphi_0}{f_0} \right) \right]^{-1}$$

Таким образом, после того, как оптимальное управление  $m(x)$  (реализующее минимальное значение теплового потока при заданной температуре  $\tau_w$ ) будет найдено, закон изменения толщины стенки  $h(x)$ , обеспечивающий температуру  $\tau_w$ , определится по формуле (2.6), где функции  $f_0, f_1, \varphi_0, \varphi_1$  являются решениями аппроксимирующей системы второго приближения (штрих означает дифференцирование по переменной  $\bar{x} = x r_0^{-1}$  [14])

$$\begin{aligned} f_0' &= 18m\bar{r} - 6\beta \left( \frac{7f_1'}{6} + \frac{9f_0}{6} - \frac{5}{3}\varphi_1 - \frac{4}{3}\varphi_0 \right) - 32 \frac{q}{f_1} - 34 \frac{q}{f_0} \\ f_1' &= 12m\bar{r} - 12\beta \left( \frac{f_0}{3} + \frac{f_1}{2} - \frac{2}{3}\varphi_1 - \frac{\varphi_0}{3} \right) - 16 \frac{q}{f_1} + 20 \frac{q}{f_0} \\ \varphi_1' &= 6m\bar{r} \frac{\varphi_0}{f_0} - 6\beta \left( \frac{\varphi_0}{6} + \frac{\varphi_1}{2} - \frac{2}{3} \frac{\varphi_1^2}{f_1} - \frac{1}{6} \frac{\varphi_0^2}{f_0} \right) + 6 \frac{q\varphi_0}{f_0^2} + \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$+ 6q \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \left( \frac{1}{6f_0} \left( 4 \frac{\varphi_1}{f_1} - 3 \frac{\varphi_0}{f_0} \right) - \frac{2}{3} \frac{\varphi_0}{f_0 f_1} \right) - 6 \frac{q}{\text{Pr} f_0} \left( 4 \frac{\varphi_1}{f_1} - 3 \frac{\varphi_0}{f_0} \right) + 4q \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\alpha_e^2}{f_1}$$

$$\varphi'_0 = -f_0 \tau'_w + (1 - \tau_w) f'_0$$

$$\bar{r} = \frac{r}{r_0}, \quad \beta = \frac{\alpha'_e}{\alpha_e (1 - \alpha_e^2)}, \quad q = r^2 \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

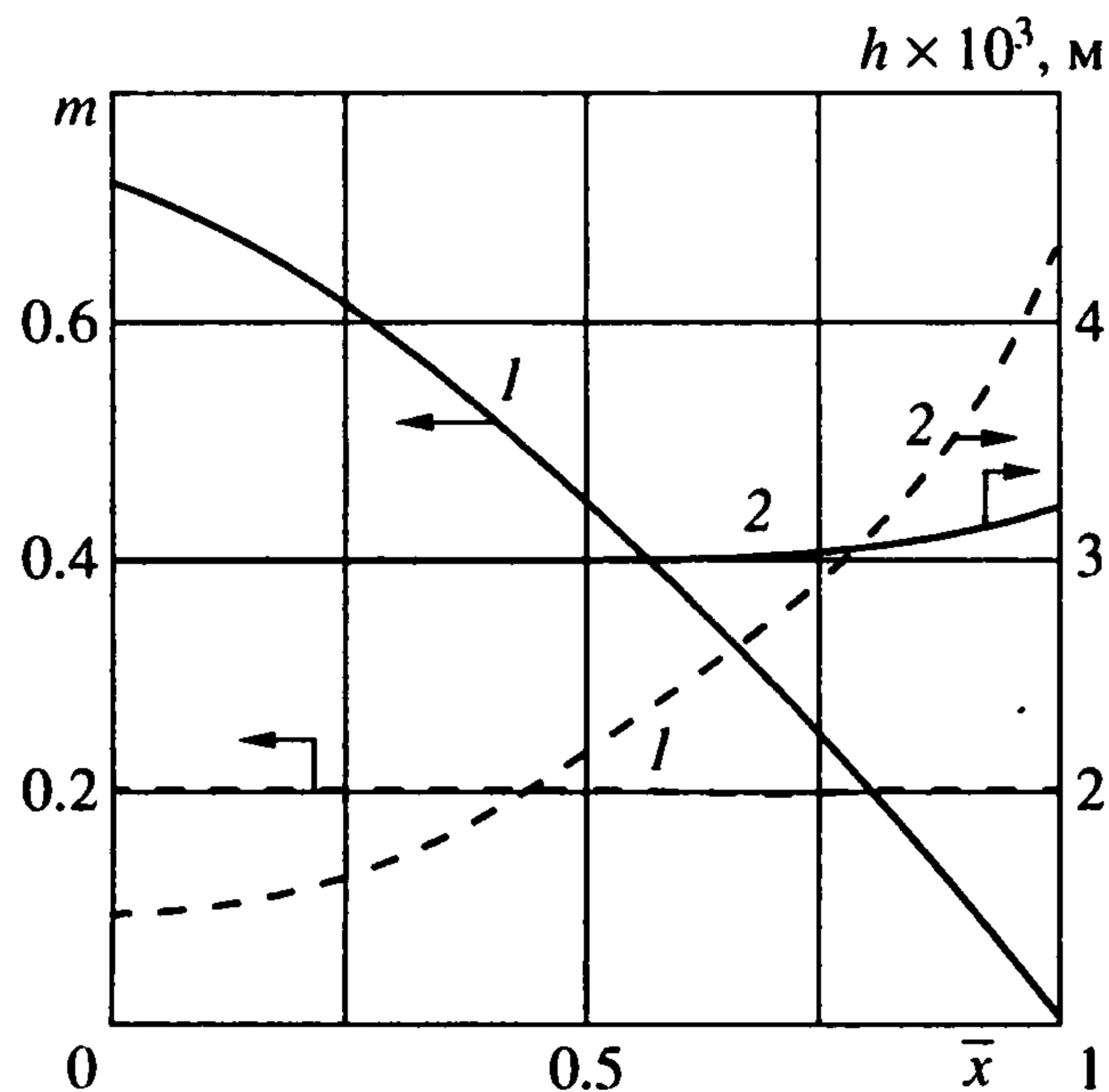
Начальные условия (для затупленного тела вращения) имеют вид

$$f(0) = f_1(0) = \varphi(0) = \varphi_1(0) = 0$$

### 3. Вычислительный эксперимент по оптимизации тепломассообмена на проницаемой сфере.

Вычислительный эксперимент был проведен для случая обтекания сферы радиуса  $r_0 = 0,05$  м сверхзвуковым потоком ( $M_\infty = 7$ ); параметры стандартной атмосферы соответствовали высоте  $H = 10^4$  м. В качестве материала стенки была выбрана коррозионно-стойкая сталь 14X17H2 с пористостью  $\Pi = 0,3$ , коэффициентом теплопроводности  $\lambda^* = 32$  Вт/м·К и коэффициентом проницаемости  $K_\Pi = 6,4 \cdot 10^{-14}$  м<sup>2</sup> [9]. Зависимость вязкости от температуры была взята линейной:  $b(\tau) =$

$= 1$  [10].



На фигуре представлен оптимальный закон вдува  $m(\bar{x})$  (сплошная кривая 1), определенный по формуле (1.10) для случая  $\bar{x}_k = 1$ ,  $\tau_w = 0,25$ ,  $T_c = 273$  К и мощности, соответствующей постоянному вдуву  $m_0 = 0,2$  (штриховая кривая 1). Выигрыш в значении функционала по сравнению с постоянным вдувом составляет примерно 32%. Представлены также зависимости толщины стенки, соответствующие оптимальному управлению (сплошная кривая 2) и постоянному вдуву (штриховая кривая 2). Следует отметить, что стенка, соответствующая оптимальному вдуву, более технологична для изготовления (ее толщина почти постоянна), чем стенка, отвечающая постоянному закону вдува.

Отметим, что для случая обтекания сферы эффективность пористого охлаждения оценивается как отношение экранируемого за счет вдува интегрального теплового потока к расходу газа [16]

$$J = \left[ \int_0^{x_k} r q_0 dx - \int_0^{x_k} r q_w dx \right] \left[ (H_{eo} - H_w) \int_0^{x_k} r(\rho v)_w dx \right]^{-1} \quad (3.1)$$

где  $q_0$  – локальный тепловой поток в отсутствие вдува,  $q_w$  – при наличии вдува.

Если суммарный расход охладителя

$$\frac{P}{2\mu r_0} = \int_0^{x_k} r(\rho v)_w dx$$

задан, то при заданной температуре стенки задача максимизации функционала (3.1) эквивалентна рассмотренной ранее задаче минимизации теплового потока (1.4).

Работа выполнена при поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. С. 479.
2. *Крайко А.Н.* К оптимальному управлению пограничным слоем // Изв. вузов. Авиационная техника. 1972. № 1. С. 124–125.
3. *Гараев К.Г.* Группы Ли и теория Нётер в проблеме управления с приложениями к оптимальным задачам пограничного слоя // Казань: КГТУ им. А.Н. Туполева, 1994. С. 238.
4. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. С. 399.
5. *Noether E.* Invariante Variations Probleme // Nachr. Königl. Ges. Wiss. Göttingen; Math.-Phys. Kl. 1918. S. 235–257. = *Нётер Э.* Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 611–630.
6. *Ибрагимов Н.Х.* Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения // Теорет. и мат. физика. 1969. Т. 1. № 3. С. 350–359.
7. *Дородницын А.А.* Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя // ПМТФ. 1960. № 3. С. 111–118.
8. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. С. 847.
9. *Белов С.В.* Пористые материалы в машиностроении. М.: Машиностроение, 1981. С. 247.
10. *Дородницын А.А.* Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе // Сб. теорет. работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 140–173.
11. *Лю-Шень-Цюань.* Расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе при наличии отсоса или вдува // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т. 2. № 5. С. 868–883.
12. *Гараев К.Г.* Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 92–100.
13. *Гараев К.Г.* Об одном следствии из теоремы Нётер для двумерной вариационной задачи типа Майера // ПММ. 1980. Т. 44. № 3. С. 448–453.
14. *Гараев К.Г., Кусюмов А.Н., Павлов В.Г.* Управление тепловым режимом на проницаемом сферическом носке в сверхзвуковом потоке с учетом сопряженного теплообмена // Изв. вузов. Авиационная техника. 1988. № 4. С. 30–34.
15. *Лыков А.В., Алексащенко В.А., Алексащенко А.А.* Сопряженные задачи конвективного теплообмена. М.: Изд-во БГУ, 1971. С. 346.
16. *Kubota Karashima.* Heat shielding problems with local mass injection at multiple stations // Jap. Soc. Aeronaut and Space Sci. 1971. V. 4. № 26. P. 85–101.

Казань

Поступила в редакцию  
12.V.1999