

УДК 532.594:538.4

© 2001 г. В.М. Коровин

**КАПИЛЛЯРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОГО ЦИЛИНДРА
ВЯЗКОЙ ФЕРРОЖИДКОСТИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

В линейной постановке изучается влияние однородного магнитного поля на капиллярный распад тонкого цилиндра покоящейся магнитной жидкости, окруженной неограниченной жидкостью с другими коэффициентами вязкости и магнитной проницаемости. Получено приближенное выражение корня дисперсионного соотношения, описывающее режим развития неустойчивости при доминирующей роли сил вязкости по сравнению с силами инерции. Из найденного выражения в качестве частных случаев следуют известные формы записи корней, соответствующие как поверхности раздела несмешивающихся жидкостей с равными коэффициентами вязкости, так и поверхности раздела вязкой и невязкой жидкостей. По сравнению с имеющимися работами в последнем случае получены следующие члены разложений по степеням малого параметра, представляющего отношение характерного времени диффузии завихренности к характерному капиллярно-вязкому времени.

Исследованию влияния внешних магнитных полей на устойчивость свободных поверхностей, а также поверхностей раздела магнитных жидкостей посвящено большое число работ (см., например, библиографию в [1, 2]). Известно, что плоская свободная поверхность покоящейся магнитной жидкости теряет устойчивость под действием ортогонального к ней магнитного поля H_n , превышающего критическое значение H_* . В случае неустойчивости, вызываемой нормальной компонентой наклонного поля $H = H_n + H_t$, $H_n > H_*$, тангенциальная компонента H_t подавляет рост гармоник, соответствующих некоторому диапазону изменения волновых векторов, зависящему от H_t . Эффект стабилизирующего воздействия тангенциального магнитного поля ярко проявляется при подавлении с помощью поля капиллярной неустойчивости цилиндрического слоя магнитной жидкости [1–3] и тонкой цилиндрической струи [4], а также в экспериментах с магнитными жидкостями при исследовании образования вязких пальцев в пористых средах [1] и распада тонкого слоя магнитной жидкости вследствие неустойчивости Релея–Тейлора [5].

В данной работе изучается влияние однородного продольного поля на капиллярную неустойчивость тонкого цилиндра покоящейся жидкости с вязкостью η_1 и магнитной проницаемостью μ_1 , окруженного безграничной жидкостью с вязкостью η_2 и проницаемостью $\mu_2 \neq \mu_1$; плотности жидкостей одинаковы. Для цилиндра вязкой немагнитной жидкости, имеющего свободную поверхность, эта задача впервые была рассмотрена Релеем [6]. Применительно к случаю, когда вязкие силы играют доминирующую роль по сравнению с силами инерции, было получено дисперсионное соотношение и изучено развитие осесимметричных возмущений цилиндрической свободной поверхности [6].

Первое экспериментальное исследование капиллярного распада сильно вытянутой осесимметричной капли вязкой жидкости плотности ρ_1 , взвешенной в несмешивающейся вязкой жидкости плотности $\rho_2 = \rho_1$, было проведено Тейлором [7]. Анализ этого явления до настоящего времени уделяется значительное внимание (см., например, экспериментальные

[8–10] и теоретические [11–18] работы; в [15–18] капиллярный распад сильно вытянутой осесимметричной капли исследован в нелинейной постановке).

Содержанием линейной теории устойчивости однородных стационарных состояний сплошных сред является нахождение дисперсионного соотношения и исследование поведения его корней при действительных значениях волнового числа в зависимости от величин безразмерных параметров, характеризующих исследуемое явление. Применительно к рассматриваемой задаче аналитически корень был найден ранее в отсутствие магнитного поля при следующих упрощающих предположениях: а) $\eta_1 \neq 0, \eta_2 = 0$ [6, 11–13], б) $\eta_1 = 0, \eta_2 \neq 0$ [11, 13], в) $\eta_1 = \eta_2$ [14]. В отличие от имеющихся работ полученное ниже более общее выражение охватывает все эти частные случаи.

1. Постановка задачи. Пусть в безграничном объеме магнитной жидкости покоится горизонтальный цилиндр радиуса a , состоящий из несмешивающейся жидкости, имеющей другую магнитную проницаемость. Обе жидкости помещены в однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, параллельное оси жидкого цилиндра, и имеют одинаковые плотности. Введем цилиндрическую систему координат r, ϑ, z , так чтобы поверхность раздела описывалась уравнением $r = a$. Считается, что магнитные проницаемости жидкостей μ_1 (в области $r < a$) и μ_2 (в области $r > a$) зависят лишь от модуля напряженности магнитного поля. В рассматриваемом случае в каждой из сред индукция $\mathbf{B}_{j0} = \mu_j \mathbf{H}_0$ и намагниченность $\mathbf{M}_{j0} = \chi_j \mathbf{H}_0$ однородны; здесь $\chi_j = \mu_j(H_0)/\mu_0 - 1$ – магнитная восприимчивость, а $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн·м⁻¹ – магнитная постоянная. Здесь и всюду далее $j = 1, 2$.

Поскольку $\nabla H_0 = 0$ и магнитные силовые линии не пересекают поверхность раздела, то поле не оказывает силовое воздействие на жидкости. Ввиду этого давление распределено по гидростатическому закону: при $r < a$ имеем $P_{10} = \rho g r \cos \vartheta + \alpha/a$, а при $r > a$ – соответственно $P_{20} = \rho g r \cos \vartheta$, где g – величина ускорения силы тяжести, α – коэффициент поверхностного натяжения, а азимутальный угол ϑ отсчитывается от направления $\mathbf{g}$.

Сформулируем в линейной постановке задачу об устойчивости гидростатического состояния $P_{01}, \mathbf{M}_{01}, P_{02}, \mathbf{M}_{02}$ относительно осесимметричных возмущений цилиндрической поверхности раздела жидкостей. В случае $\mu_1(H_0) \neq \mu_2(H_0)$ деформация исходной формы поверхности раздела вызывает возмущения магнитного поля $\mathbf{H}_j - \mathbf{H}_0 = \nabla f_j(r, z, t)$, а также индукции $\mathbf{B}_j - \mathbf{B}_{j0} = \mathbf{b}_j(r, z, t)$ и намагниченности $\mathbf{M}_j - \mathbf{M}_{j0} = \mathbf{m}_j(r, z, t)$ и порождает объемные магнитные силы, оказывающие влияние на дальнейшую динамику жидкостей. С точностью до малых первого порядка имеем

$$\begin{aligned} H_j - H_0 &= \frac{\partial f_j}{\partial z}, \quad \mathbf{b}_j = \mu_j(H_0) \frac{\partial f_j}{\partial r} \mathbf{e}_r + \mu_{ij}(H_0) \frac{\partial f_j}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{m}_j &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b}_j - \nabla f_j \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z$ – векторы базиса, соответствующие координатным линиям r и z , а $\mu_{ij} = dB_j/dH_j$ – дифференциальная магнитная проницаемость.

С учетом (1.1) запишем линеаризованные уравнения феррогидродинамики [2]

$$\frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{u_j}{r} + \frac{\partial w_j}{\partial r} = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{\partial p_j}{\partial r} + \eta_j \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} - \frac{u_j}{r^2} \right) + \mu_0 M_{j0} \frac{\partial^2 f_j}{\partial r \partial z} \quad (1.3)$$

$$\rho \frac{\partial w_j}{\partial t} = -\frac{\partial p_j}{\partial z} + \eta_j \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} \right) + \mu_0 M_{j0} \frac{\partial^2 f_j}{\partial z^2} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_j}{\partial r} + \sigma_j^2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial z^2} = 0, \quad \sigma_j = \sqrt{\frac{\mu_{rj}(H_0)}{\mu_j(H_0)}} \quad (1.5)$$

где $(u_j, 0, w_j)$ – компоненты вектора скорости, а p_j – возмущение давления в соответствующей области.

Пусть уравнение $r = a + \xi(z, t)$ представляет форму возмущенной поверхности раздела жидкостей. Линеаризованные кинематические и динамические условия на поверхности раздела (при $r = a$), а также условия непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля и нормальной составляющей индукции записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= u_1, \quad u_1 = u_2, \quad w_1 = w_2 \\ \eta_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) &= \eta_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= 2\eta_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} - 2\eta_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} - \alpha \left(\frac{\xi}{a^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \\ f_1 &= f_2, \quad \mu_{r1} \frac{\partial f_1}{\partial r} - \mu_{r2} \frac{\partial f_2}{\partial r} = (M_{10} - M_{20}) \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \mu_{rj} = \frac{\mu_j(H_0)}{\mu_0} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Физический смысл имеют, естественно, лишь ограниченные при $r = 0$ и исчезающие при $r \rightarrow \infty$ функции u_j, w_j, p_j, f_j .

С целью упрощения выкладок введем потенциалы скоростей $\phi_j(r, z, t)$ и функции тока $\psi_j(r, z, t)$

$$u_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial z}, \quad w_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \quad (1.8)$$

и перейдем [19] от системы (1.2) – (1.4) к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial \psi_j}{\partial t} - \nu_j \left(\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z^2} \right) &= 0, \quad \nu_j = \frac{\eta_j}{\rho} \end{aligned} \quad (1.9)$$

и представлениям для возмущений давления

$$p_j = -\rho \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \mu_0 M_{j0} \frac{\partial f_j}{\partial z} \quad (1.10)$$

С учетом соотношений (1.8), (1.10) краевые условия (1.6) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \frac{\partial \phi_2}{\partial r} &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) \\ \eta_1 \left[2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r \partial z} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right] &= \end{aligned}$$

$$= \eta_2 \left[2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right] \quad (1.11)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) + \mu_0 \left(M_{10} \frac{\partial f_1}{\partial z} - M_{20} \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) =$$

$$= 2 \left[\eta_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) - \eta_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial z} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) \right] - \alpha \left(\frac{\xi}{a^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right)$$

Далее рассматривается задача (1.5), (1.7), (1.9), (1.11).

2. Дисперсионное соотношение. Нахождение корня. Исследуем поведение решений вида

$$[\xi, \varphi_j, \psi_j, f_j] = e^{i(kz - \omega t)} [\xi_0, \Phi_j(r), \Psi_j(r), F_j(r)], \quad i = \sqrt{-1} \quad (2.1)$$

при возрастании времени. Здесь ξ_0 – постоянная, k – задаваемое волновое число, а ω подлежит нахождению в процессе решения задачи. При подстановке выражений (2.1) в уравнения (1.5), (1.9) получаем

$$F_j'' + \frac{1}{r} F_j' - (k\sigma_j)^2 F_j = 0 \quad (2.2)$$

$$\Phi_j'' + \frac{1}{r} \Phi_j' - k^2 \Phi_j = 0, \quad \Psi_j'' - \frac{1}{r} \Psi_j' - m_j^2 \Psi_j = 0 \quad (2.3)$$

$$m_j = \sqrt{k^2 - i\omega / v_j}, \quad \text{Re } m_j > 0$$

Решения уравнений (2.2), удовлетворяющие условиям сшивки (1.7), преобразованным с помощью представлений (2.1), записываются следующим образом:

$$F_1 = i\xi_0 (M_{10} - M_{20}) K_0(\sigma_2 ka) I_0(\sigma_1 kr) / s$$

$$F_2 = i\xi_0 (M_{10} - M_{20}) I_0(\sigma_1 ka) K_0(\sigma_2 kr) / s \quad (2.4)$$

$$s = \sigma_1 \mu_{r1} I_1(\sigma_1 ka) K_0(\sigma_2 ka) + \sigma_2 \mu_{r2} I_0(\sigma_1 ka) K_1(\sigma_2 ka)$$

где $I_l(x)$, $K_l(x)$ ($l = 0, 1$) – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Из уравнений (2.3) находим

$$\Phi_1 = A_1 I_0(kr), \quad \Phi_2 = A_2 K_0(kr) \quad (2.5)$$

$$\Psi_1 = C_1 r I_1(m_1 r), \quad \Psi_2 = C_2 r K_1(m_2 r)$$

где A_1, A_2, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

С целью удовлетворения преобразованным с помощью (2.1) кинематическим и динамическим условиям на поверхности раздела (1.11) подставим в них решения (2.4), (2.5). В результате с использованием рекуррентных формул для функций Бесселя получим

$$i\xi_0 \omega + A_1 k I_1(x) + iC_1 k I_1(y_1) = 0$$

$$A_1 I_1(x) + A_2 K_1(x) + iC_1 I_1(y_1) - iC_2 K_1(y_2) = 0$$

$$iA_1 k I_0(x) - iA_2 k K_0(x) - C_1 m_1 I_0(y_1) - C_2 m_2 K_0(y_2) = 0 \quad (2.6)$$

$$2iA_1 \eta_1 k^2 I_1(x) + 2iA_2 \eta_2 k^2 K_1(x) - C_1 \eta_1 (k^2 + m_1^2) I_1(y_1) - C_2 \eta_2 (k^2 + m_2^2) K_1(y_2) = 0$$

$$\xi_0 [\alpha(1 - x^2) - a\mu_0 H_0^2 c(x)] + A_1 [i\rho\omega a^2 I_0(x) - 2\eta_1 x^2 I_1'(x)] -$$

$$- A_2 [i\rho\omega a^2 K_0(x) + 2\eta_2 x^2 K_1'(x)] - 2iC_1 \eta_1 x y_1 I_1'(y_1) + 2iC_2 \eta_2 x y_2 K_1'(y_2) = 0$$

где

$$c(\kappa) = \kappa(\mu_{r1} - \mu_{r2})^2 I_0(\sigma_1 \kappa) K_0(\sigma_2 \kappa) / s, \quad \kappa = ka, \quad y_1 = m_1 a, \quad y_2 = m_2 a$$

Для существования нетривиального решения полученной системы линейных однородных уравнений относительно неизвестных $\xi_0, A_1, A_2, C_1, C_2$ необходимо равенство нулю определителя матрицы, составленной из коэффициентов системы (2.6). Это равенство представляет дисперсионное соотношение, служащее для нахождения функции $\omega(k)$. Данную матрицу путем умножения ее строк и столбцов на некоторые размерные коэффициенты, определяемые постановкой задачи, можно привести к безразмерному виду без потери общности последующего результата вычисления $\omega(k)$.

С целью нахождения характерной скорости v_c движения жидкостей, вызываемого капиллярными силами, обратимся к условию баланса нормальных напряжений на поверхности раздела (1.6). В общем случае все входящие в это равенство слагаемые имеют одинаковый порядок, так что при $\eta_1 \neq 0, \eta_2 \geq 0$ имеем $v_c = \alpha \xi_* / (a\eta_1)$, где ξ_* – характерное отклонение поверхности раздела от исходной цилиндрической формы. С учетом этой оценки из кинематического условия (1.6) находим характерное капиллярно-вязкое время $\tau_c = a\eta_1 / \alpha$.

Полагая $\Omega = \omega\tau_c$, матрицу $\|a_{ij}\|$ из коэффициентов системы уравнений (2.6) приведем к безразмерному виду

$$\begin{vmatrix} i\Omega & \kappa I_1(\kappa) & 0 & i\kappa I_1(y_1) & 0 \\ 0 & I_1(\kappa) & K_1(\kappa) & iI_1(y_1) & -iK_1(y_2) \\ 0 & i\kappa I_0(\kappa) & -i\kappa K_0(\kappa) & -y_1 I_0(y_1) & -y_2 K_0(y_2) \\ 0 & 2i\kappa^2 I_1(\kappa) & \frac{2i}{\beta} \kappa^2 K_1(\kappa) & -(\kappa^2 + y_1^2) I_1(y_1) & \frac{\kappa^2 + y_2^2}{\beta} K_1(y_2) \\ Q(\kappa) & a_{52} & a_{53} & -2i\kappa y_1 I_1'(y_1) & \frac{2i}{\beta} \kappa y_2 K_1'(y_2) \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

$$a_{52} = i\varepsilon_1 \Omega I_0(\kappa) - 2\kappa^2 I_1'(\kappa), \quad a_{53} = -i\varepsilon_1 \Omega K_0(\kappa) - \frac{2\kappa^2}{\beta} K_1'(\kappa)$$

$$Q(\kappa) = 1 - \kappa^2 - qc(\kappa), \quad y_j = \sqrt{\kappa^2 - i\varepsilon_j \Omega}, \quad j = 1, 2$$

$$q = \frac{a\mu_0}{\alpha} H_0^2, \quad \beta = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\rho\alpha a}{\eta_1^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho\alpha a}{\eta_1 \eta_2}$$

Параметр ε_1 представляет отношение характерного времени $\tau_d = \rho a^2 / \eta_1$ диффузии завихренности к характерному времени τ_c . Интерпретация ε_2 аналогична.

Обозначим $\det \|a_{ij}\| = F(\Omega, \kappa; \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. В случае $\Omega = 0$ четвертый столбец матрицы (2.7) пропорционален второму столбцу, а третий – пятому. Ввиду этого $F(0, \kappa; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ при всех $\kappa, \varepsilon_1, \varepsilon_2$. По аналогичной причине $F'_\Omega(0, \kappa; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ при любых $\kappa, \varepsilon_1, \varepsilon_2$. С использованием пакета символьных вычислений MAPLE установлено, что при произвольных $\kappa, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ выполняется условие $F''_{\Omega\Omega}(0, \kappa; \varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq 0$. Таким образом, дисперсионное соотношение $\det \|a_{ij}\| = 0$ имеет корень $\Omega = 0$ кратности два. С физической точки зрения тривиальный корень не представляет интереса.

Аналогичный анализ показывает, что для произвольной пары Ω, κ имеют место равенства

$$F(\Omega, \kappa; 0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_j} \right|_{\varepsilon_* = 0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_2^2} \right|_{\varepsilon_* = 0} = 0, \quad \varepsilon_* = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Фигурирующие в (2.7) выражения, содержащие в качестве сомножителей $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, своим происхождением обязаны левым частям уравнений (1.3), (1.4). Ввиду этого при постановке задачи в рамках квазистационарных уравнений Стокса (т.е. при отбрасывании в (1.3), (1.4) производных по времени) в элементах матрицы (2.7) исчезают слагаемые, содержащие $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, и $\det \|a_{ij}\| = 0$ при любых Ω и κ . Таким образом, в рамках квазистационарных уравнений Стокса дисперсионное соотношение задачи о капиллярной неустойчивости жидкого цилиндра не существует.

Далее рассматривается развитие капиллярной неустойчивости достаточно тонкого ($0 < \varepsilon_j \ll 1$) цилиндра, когда силы инерции малы по сравнению с вязкими силами. Проведенный анализ показал, что разложение $F(\Omega, \kappa; \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ по степеням ε_j начинается с квадратичных членов. Ввиду этого условие существования нетривиального решения системы уравнений (2.6) в первом приближении записывается следующим образом:

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_1^2} \right|_{\varepsilon_* = 0} + 2\beta \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} \right|_{\varepsilon_* = 0} = 0 \quad (2.8)$$

С использованием MAPLE установлено, что в развернутом виде (2.8) представляет уравнение третьей степени относительно Ω . Нетривиальный корень этого уравнения в размерном виде записывается следующим образом:

$$\omega = \frac{i\alpha\kappa^2}{2a} \frac{Q(\kappa)[\eta_1 I_1^2(\kappa)S(\kappa) - \eta_2 K_1^2(\kappa)R(\kappa)]}{\eta_1 \eta_2 + \kappa^2(\eta_1 - \eta_2)[\eta_1 S(\kappa)T(\kappa) - \eta_2 R(\kappa)U(\kappa)]} \quad (2.9)$$

где

$$R(\kappa) = I_0(\kappa)I_2(\kappa) - I_1^2(\kappa), \quad S(\kappa) = K_0(\kappa)K_2(\kappa) - K_1^2(\kappa)$$

$$T(\kappa) = \kappa^2 I_0^2(\kappa) - (\kappa^2 + 1)I_1^2(\kappa), \quad U(\kappa) = \kappa^2 K_0^2(\kappa) - (\kappa^2 + 1)K_1^2(\kappa)$$

Влияние магнитного поля на развитие капиллярной неустойчивости описывается слагаемым $qc(\kappa)$, входящим в сомножитель $Q(\kappa)$, стоящий в числителе этой формулы.

В случае $\eta_1 \neq 0, \eta_2 = 0$ порядок уравнений (1.3), (1.4) при $j = 2$ понижается и в (1.6) следует отбросить кинематическое условие $w_1 = w_2$. В результате порядок матрицы (2.7) понижается: в (2.7) требуется вычеркнуть третью строку и пятый столбец и положить $\beta^{-1} = 0$. При учете первых двух членов разложения $\det \|a_{ij}\|$ по степеням ε_1 условие существования нетривиального решения упрощенной указанным способом системы уравнений (2.6)

$$2 \left. \frac{dF}{d\varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1 = 0} + \varepsilon_1 \left. \frac{d^2 F}{d\varepsilon_1^2} \right|_{\varepsilon_1 = 0} = 0 \quad (2.10)$$

представляет кубическое уравнение относительно $\omega a \eta_1 / \alpha$. Отсюда находим имеющий физический смысл корень дисперсионного соотношения

$$\omega = \frac{\alpha}{a \eta_1} \Omega, \quad \Omega = \Omega_0 + \varepsilon_1 \Omega_1 \quad (2.11)$$

$$\Omega_0 = \frac{i}{2} \frac{I_1^2(\kappa)Q(\kappa)}{T(\kappa)}, \quad \Omega_1 = \frac{i}{2} \frac{\Omega_0^2 E(\kappa)}{\kappa^2 I_1(\kappa)K_1(\kappa)T(\kappa)}$$

$$E(\kappa) = \kappa^3 I_0(\kappa)K_1(\kappa)[I_1^2(\kappa) - I_0^2(\kappa)] + \kappa^2 I_1(\kappa)K_1(\kappa)[2I_0^2(\kappa) - I_1^2(\kappa)] + I_1^2(\kappa)$$

Аналогичным образом можно получить следующие члены разложения. Проведенный анализ показал, что в окрестности точки $\kappa = 0$ это разложение является неравномерным по κ .

При $\eta_1 = 0$, $\eta_2 \neq 0$ полагаем $\tau_c^\circ = a\eta_2 / \alpha$, $\tau_d^\circ = \rho a^2 / \eta_2$. В этом случае используемая при проведении выкладок матрица записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} i\Omega & \kappa I_1(\kappa) & 0 & 0 \\ 0 & I_1(\kappa) & K_1(\kappa) & -iK_1(y) \\ 0 & 0 & 2i\kappa^2 K_1(\kappa) & (\kappa^2 + y^2)K_1(y) \\ Q(\kappa) & i\varepsilon_0\Omega I_0(\kappa) & -i\varepsilon_0\Omega K_0(\kappa) - 2\kappa^2 K_1'(\kappa) & 2i\kappa y K_1'(y) \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

$$y = \sqrt{\kappa^2 - i\varepsilon_0\Omega}, \quad \varepsilon_0 = \tau_d^\circ / \tau_c^\circ$$

Приближенное выражение корня дисперсионного соотношения, найденное с помощью аналогичного (2.10) уравнения, в котором фигурируют определитель матрицы (2.12) и параметр ε_0 , имеет вид

$$\omega = \frac{\alpha}{a\eta_2} \Omega, \quad \Omega = \Omega_0 + \varepsilon_0 \Omega_1 \quad (2.13)$$

$$\Omega_0 = -\frac{i}{2} \frac{K_1^2(\kappa) Q(\kappa)}{U(\kappa)}, \quad \Omega_1 = -\frac{i}{2} \frac{\Omega_0^2 G(\kappa)}{\kappa^2 I_1(\kappa) K_1(\kappa) U(\kappa)}$$

$$G(\kappa) = \kappa^3 I_1(\kappa) K_0(\kappa) [K_0^2(\kappa) - K_1^2(\kappa)] + \kappa^2 I_1(\kappa) K_1(\kappa) [2K_0^2(\kappa) - K_1^2(\kappa)] - K_1^2(\kappa)$$

В частном случае $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ равенство (2.9) значительно упрощается

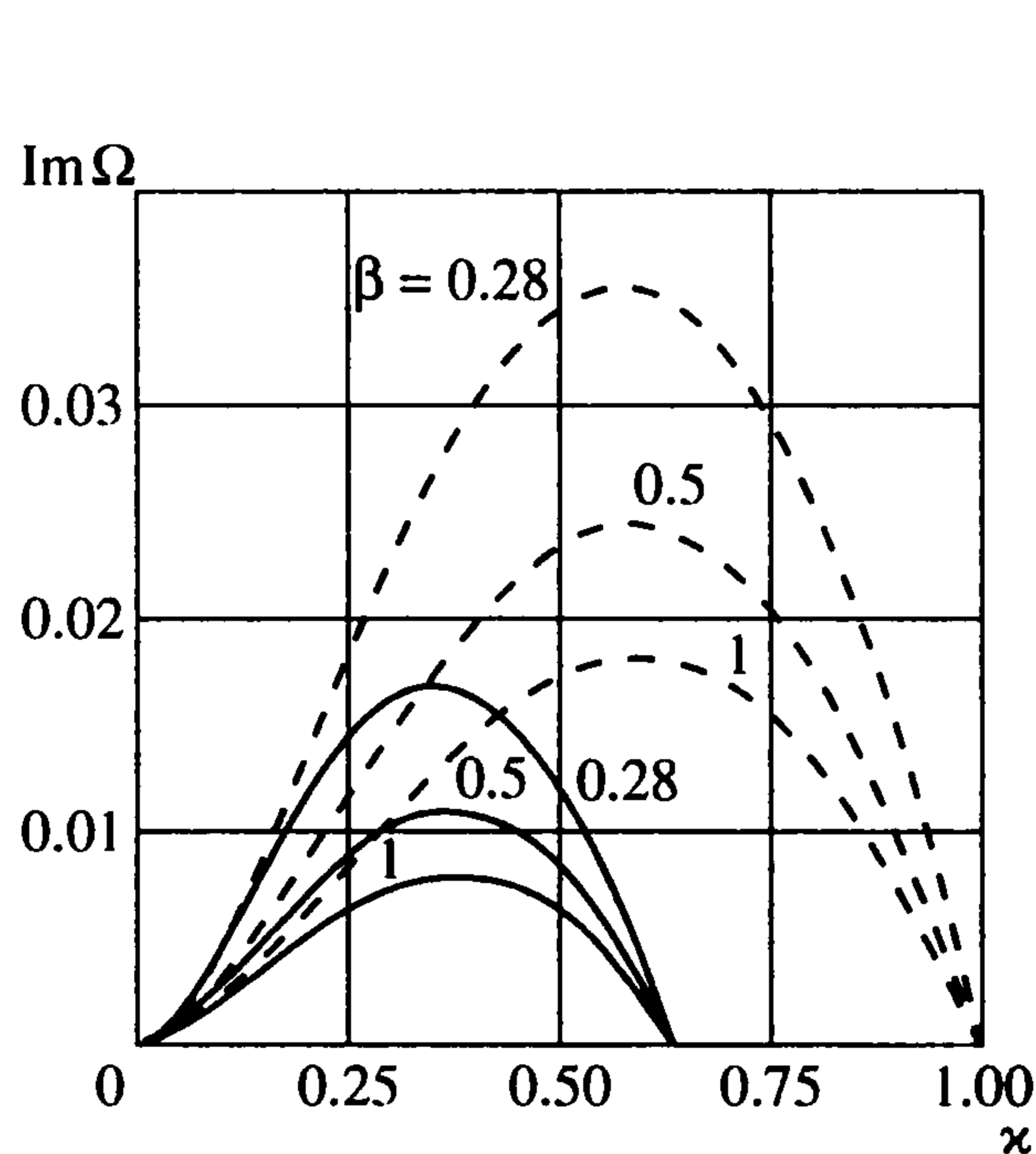
$$\omega = \frac{i\alpha}{2a\eta} Q(\kappa) \{ 2I_1(\kappa) K_1(\kappa) + \kappa [I_1(\kappa) K_0(\kappa) - I_0(\kappa) K_1(\kappa)] \} \quad (2.14)$$

В предельных случаях $\eta_2/\eta_1 \rightarrow 0$, $\eta_1/\eta_2 \rightarrow 0$ из (2.9) следуют первые члены разложений (2.11), (2.13).

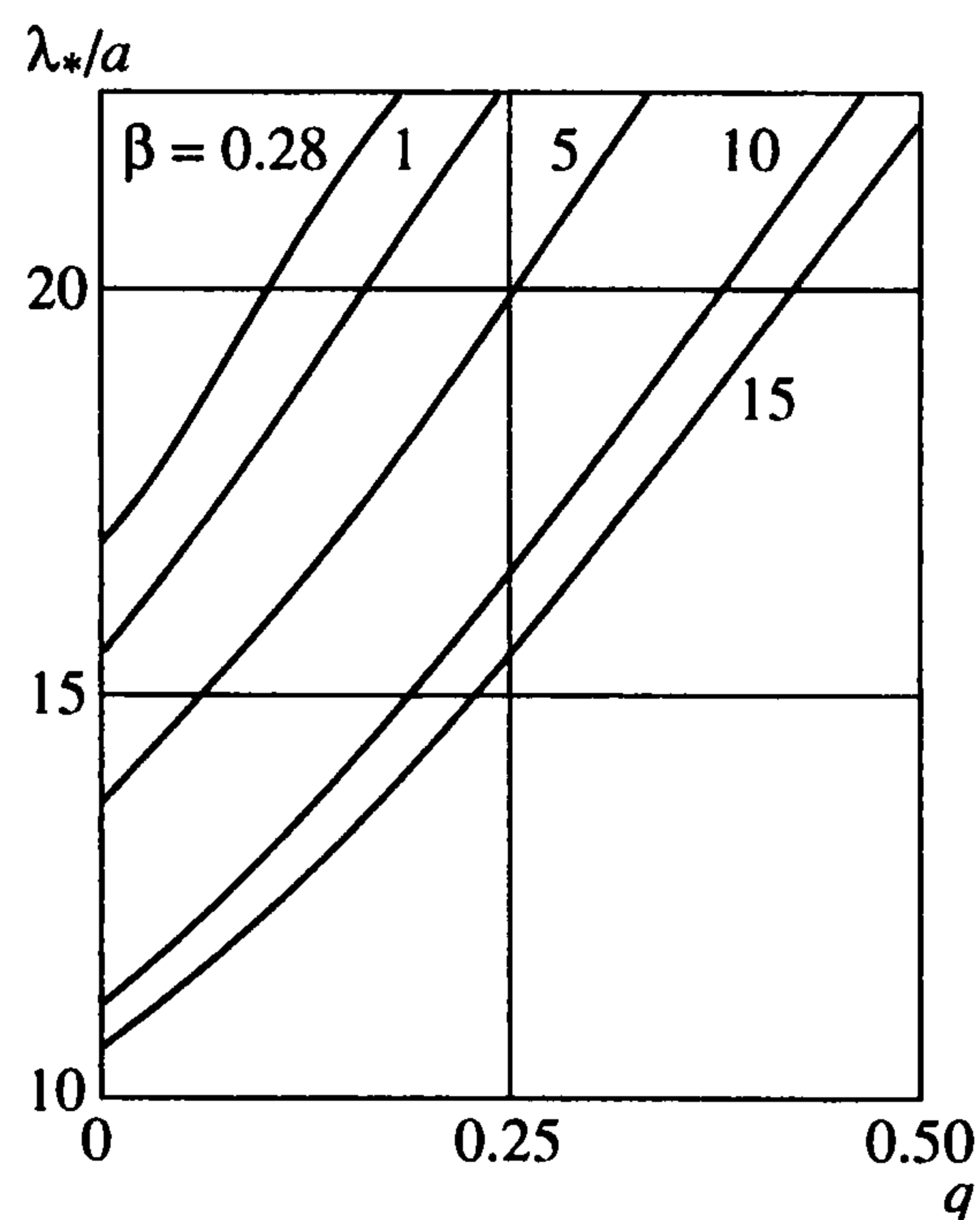
В отсутствие скачка магнитной проницаемости при переходе через поверхность раздела (случай $\mu_{r1} = \mu_{r2}$) формула (2.14) и первые члены разложений (2.11), (2.13) с точностью до обозначений совпадают с результатами, полученными ранее в [14, 6, 11–13].

3. Влияние магнитного поля на капиллярную неустойчивость. При построении графиков, иллюстрирующих влияние поля на неустойчивость жидкого цилиндра, принят линейный ($\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$) закон намагничивания феррожидкостей. Представленные на фиг. 1–4 кривые соответствуют случаю цилиндра магнитной жидкости ($\mu_{r1} = 4$), окруженного немагнитной жидкостью ($\mu_{r2} = 1$). На фиг. 1 штриховые кривые соответствуют отсутствию поля ($q = 0$), а сплошные – случаю $q = 0,3$. При κ , лежащих правее точек пересечения построенных кривых с осью абсцисс, $\text{Im } \Omega < 0$, т.е. гармоники, соответствующие таким ka , устойчивы. Как видно из фиг. 1, магнитное поле стабилизирует некоторый диапазон неустойчивых в отсутствие поля гармоник (с длинами волн $\lambda > 2\pi a$), причем ширина этого диапазона не зависит от вязкостей граничащих друг с другом жидкостей. При увеличении напряженности магнитного поля интервал длин волн, стабилизируемых полем, расширяется. Кроме того, при фиксированных β , μ_{r1} , μ_{r2} с увеличением напряженности магнитного поля увеличивается характерное время развития $(\text{Im } \Omega)_*^{-1}$ наиболее быстро растущей гармоники (реализующей максимум соответствующей кривой). В случае фиксированного поля при увеличении вязкости внутренней жидкости по сравнению с вязкостью окружающей ее жидкости качественно происходит то же самое.

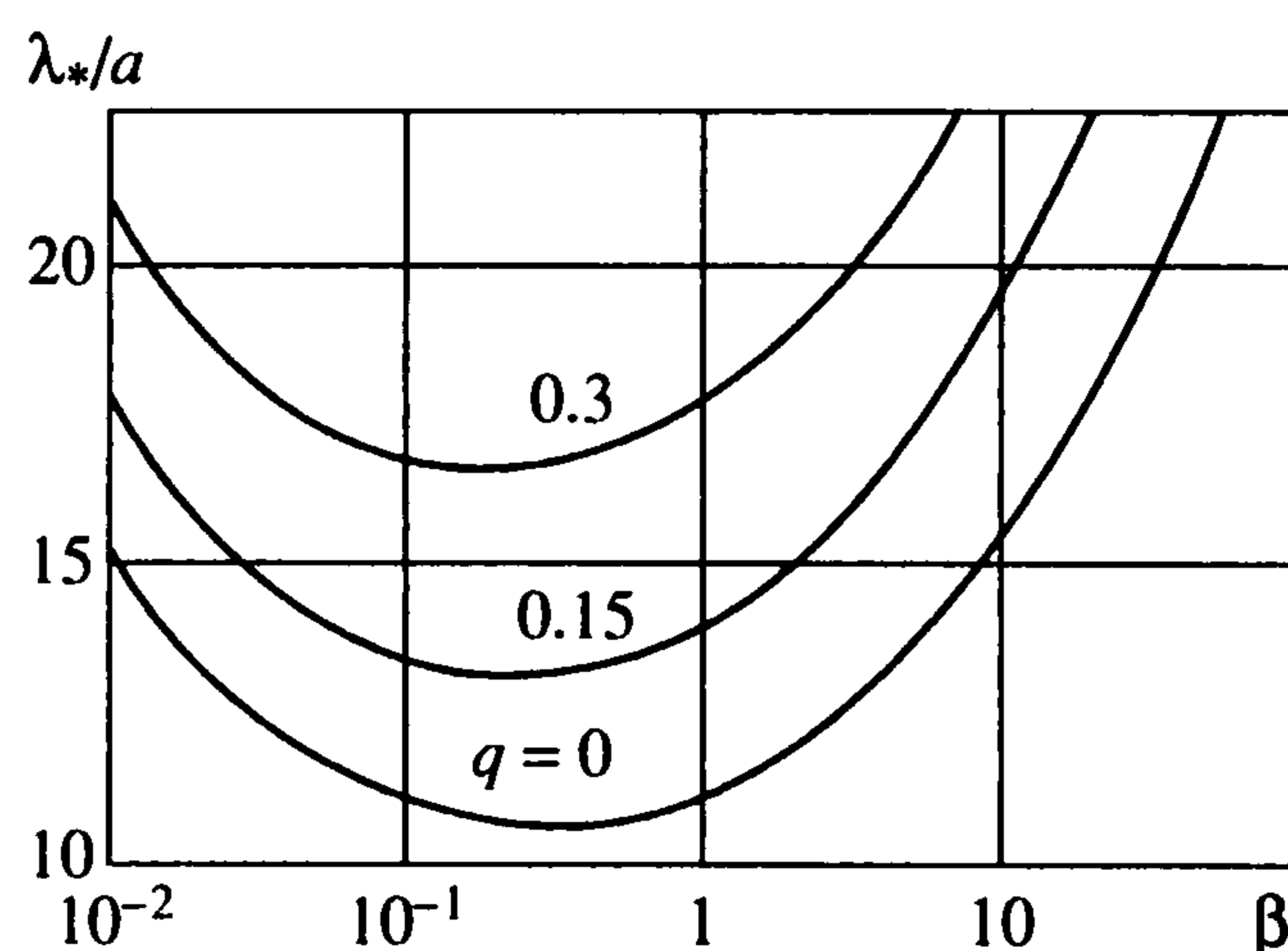
Экспериментальное нахождение длины волны λ_* наиболее быстро растущей гармоники, основанное на измерении диаметра капель, образующихся при капиллярном распаде жидкого цилиндра, в случае $\varepsilon_1 \ll 1$, $\beta\varepsilon_2 \ll 1$ хорошо согласуется с линейной



Фиг. 1



Фиг. 2

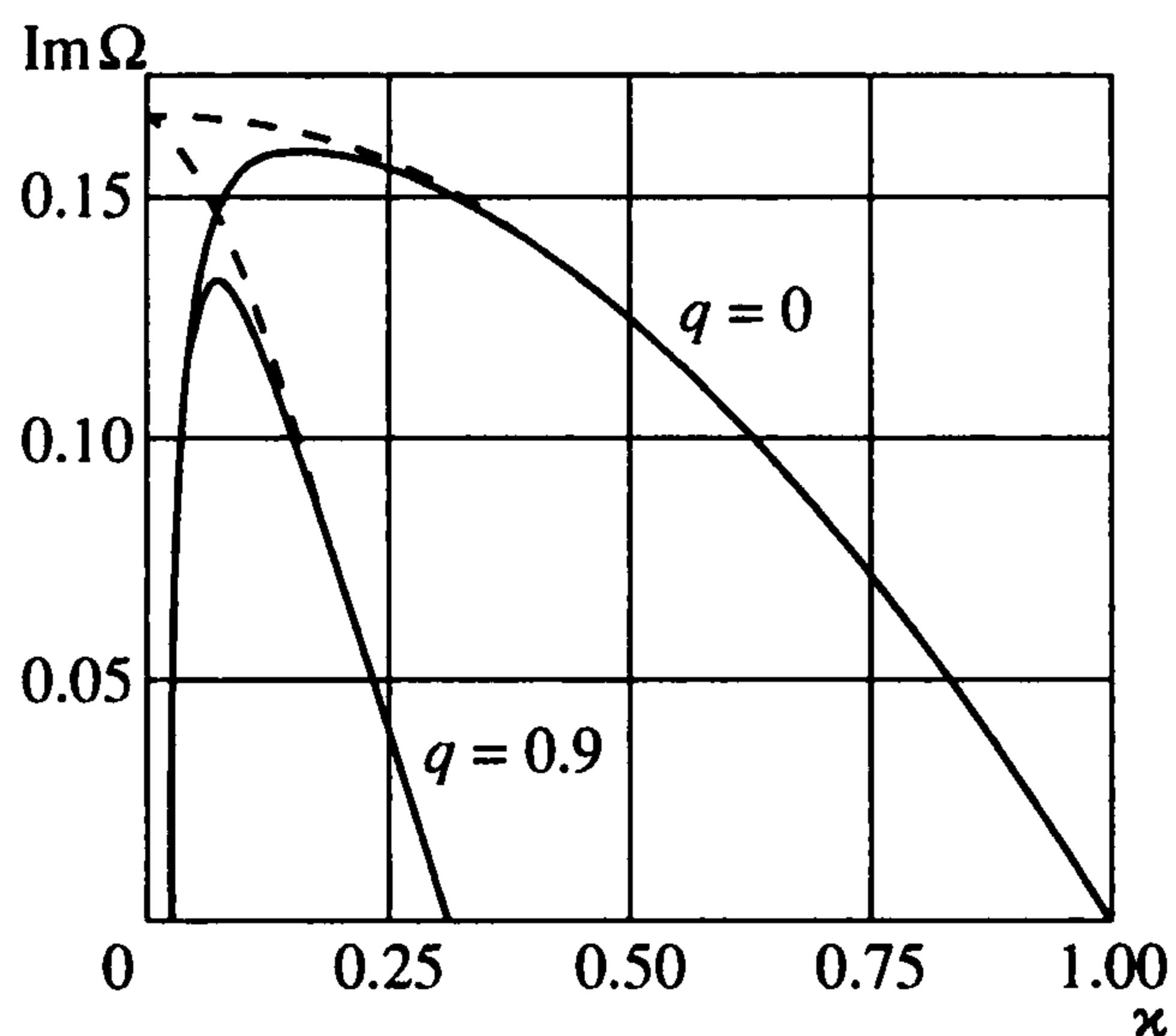


Фиг. 3

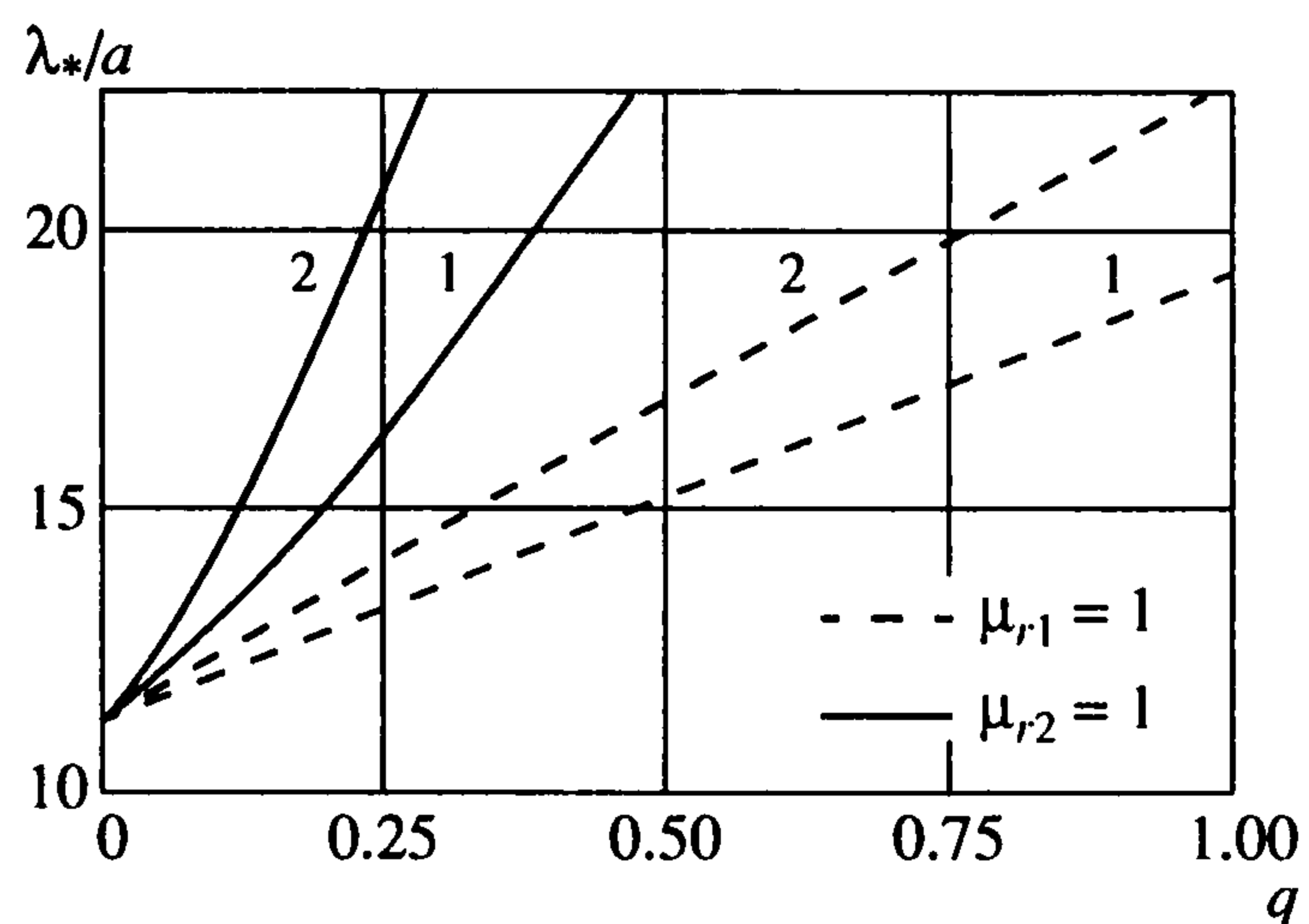
теорией [9, 10]. При этом, разумеется, не учитывается формирование сателлитов – расположенных в промежутках между крупными каплями мелких капель, образующихся за счет нелинейных эффектов. В общем случае безразмерная величина λ_*/a является функцией q , β , μ_{r1} , μ_{r2} , σ_1 , σ_2 .

Фиг. 2 иллюстрирует влияние магнитного поля на длину волны наиболее быстро растущей гармоники. Представленные на фигуре графики, соответствующие различным значениям β , построены при $\mu_{r1} = 4$, $\mu_{r2} = 1$. Из графиков следует, что для одного и того же жидкого цилиндра размер капель увеличивается с увеличением напряженности магнитного поля. В случае же фиксированного поля λ_*/a – немонотонная функция отношения вязкостей жидкостей (фиг. 3). При этом наименьшее значение длины волны наиболее быстро растущей гармоники $\lambda_*/a = 10,65$ реализуется в отсутствие поля при $\beta = 0,284$. С ростом поля происходит уменьшение значения β , при котором λ_*/a имеет минимум.

Как отмечалось выше, в случае контакта вязкой и невязкой жидкостей полученные ранее выражения для корней дисперсионных соотношений соответствуют первым членам разложений (2.11), (2.13) при $Q(\kappa) = 1 - \kappa^2$. В таком приближении наиболее быстро растут гармоники с $ka = 0$ [6, 11–13]. На фиг. 4 этому случаю соответствует штриховая кривая при $q = 0$, представляющая первый член разложения (2.11). При учете в (2.11) линейного по ϵ_1 члена ситуация существенно изменяется: график функции $\text{Im } \Omega(\kappa)$, представленный на фиг. 4 сплошной линией при $q = 0$, $\epsilon_1 = 10^{-2}$, имеет



Фиг. 4



Фиг. 5

максимум при некотором $k_*a \neq 0$. Пара кривых на фиг. 4, соответствующая $q = 0,9$, построена при $\mu_{r1} = 4$, $\mu_{r2} = 1$; штриховая линия по-прежнему соответствует первому члену разложения (2.11). Аналогичным образом ведут себя кривые, построенные с помощью соотношения (2.13). Таким образом, в отличие от ранее полученных выражений [6, 11–13] для корней дисперсионных соотношений, соответствующих случаям контакта вязкой и невязкой жидкостей, при учете следующего приближения по малому параметру длина волны наиболее быстро растущей гармоники оказывается конечной.

Ввиду квадратичной зависимости ω от скачка магнитной проницаемости $\mu_{r1} - \mu_{r2}$ магнитное поле оказывает стабилизирующее воздействие как на цилиндр магнитной жидкости, окруженной немагнитной жидкостью, так и на цилиндр немагнитной жидкости, находящийся внутри магнитной жидкости. На фиг. 5 все графики построены при $\eta_1 = \eta_2$. Кривые 1 ($\mu_{r1} = 4$) и 2 ($\mu_{r1} = 5$) иллюстрируют влияние поля на капиллярную неустойчивость цилиндра магнитной жидкости, окруженного немагнитной жидкостью ($\mu_{r2} = 1$), а штриховые кривые 1 ($\mu_{r2} = 4$) и 2 ($\mu_{r2} = 5$) соответствуют противоположному случаю, когда внутрь магнитной жидкости помещен цилиндр немагнитной жидкости ($\mu_{r1} = 1$). Из графиков следует, что при одном и том же значении поля и равенстве диаметров жидких цилиндров в первом случае в результате капиллярного распада образуются более крупные капли, чем во втором случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01057).

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosensweig R.E. Ferrohydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1985. = Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
2. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
3. Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баштовой В.Г., Краков М.С. Исследование устойчивости неподвижного цилиндрического столба намагничивающейся жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 3–8.
4. Баштовой В.Г., Краков М.С. Устойчивость осесимметричной струи намагничивающейся жидкости // ПМТФ. 1978. № 4. С. 147–153.
5. Korovin V.M., Kubasov A.A. Tangential magnetic field induced structure in a thin layer of viscous magnetic fluid when developing Rayleigh–Taylor instability // J. Magn. Magnetic Materials. 1999. V. 202. № 2/3. P. 547–553.
6. Lord Rayleigh. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force // Phil. Mag. 1892. V. 34. № 207. P. 145–154.

7. *Taylor G.I.* The formation of emulsions in definable fields of flow // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1934. V. 146. № 858. P. 501–523.
8. *Rumscheidt F.D., Mason S.G.* Break-up of stationary liquid threads // *J. Colloid Sci.* 1962. V. 17. № 3. P. 260–269.
9. *Lee W.-K., Yu K.-L., Flumerfelt R.W.* Instability of stationary and uniformly moving cylindrical fluid bodies. II. Viscoelastic threads and experimental observations // *Intern. J. Multiphase Flow.* 1981. V. 7. № 4. P. 385–400.
10. *Stone H.A., Bentley B.J., Leal L.G.* An experimental study of transient effects in the break-up of viscous drops // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 173. P. 131–158.
11. *Tomotika S.* On the instability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous fluid // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1935. V. 150. № 870. P. 322–337.
12. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
13. *Lee W.-K., Flumerfelt R.W.* Instability of stationary and uniformly moving cylindrical fluid bodies. I. Newtonian systems // *Intern. J. Multiphase Flow.* 1981. V. 7. № 4. P. 363–383.
14. *Stone H.A., Brenner M.P.* Note on the capillary thread instability for fluids of equal viscosities // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 318. P. 373–374.
15. *Stone H.A., Leal L.G.* Relaxation and break-up of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 198. P. 399–427.
16. *Papageorgiou D.* On the break-up of viscous liquid threads // *Phys. Fluids.* 1995. V. 7. № 7. P. 1529–1544.
17. *Brenner M.P., Lister J.R., Stone H.A.* Pinching threads, singularities and the number 0,0304... // *Phys. Fluids.* 1996. V. 8. № 11. P. 2827–2836.
18. *Lister J.R., Stone H.A.* Capillary break-up of a viscous thread surrounded by another viscous fluid // *Phys. Fluids.* 1998. V. 10. № 11. P. 2758–2764.
19. *Мусеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.

Москва
e-mail: korovin@inmech.msu.su

Поступила в редакцию
7.II.2000