

УДК 551.466.81:534.1

© 2001 г. Ю.В. Кистович, Ю.Д. Чашечкин

ПЕРЕНОС ВЕЩЕСТВА И СИЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПУЧКА ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

В первом порядке теории возмущений выполнен расчет стационарного течения, порождаемого произвольным полем монохроматических внутренних волн в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости. Картина линий тока рассчитана для пучка гармонических волн, возбуждаемых точечным диполем. Также рассчитано стационарное силовое воздействие, которое оказывает пучок, падающий на жесткую плоскую поверхность.

Расчет переноса вещества волновыми движениями (стоксов дрейф) в случае поверхностных волн [1, 2] согласуется с экспериментом [3]; при расчете волнового дрейфа на границах раздела однородных разнородных жидкостей дополнительно учитывается влияние возникающих пограничных слоев [4]. Менее исследован стоксов дрейф в теории внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости, уравнения движения которой [5] существенно отличаются от уравнений теории поверхностных волн. Развитие теории слабонелинейных внутренних волн в вязкой среде, точно удовлетворяющих граничным условиям, позволяет рассчитывать не только волновой перенос вещества, но и силовое действие волн на отражающую поверхность, что важно для задач динамики взаимодействия атмосферы и подстилающей поверхности, оценки воздействия океанских внутренних волн на крупномасштабные сооружения.

Цель данной работы – расчет средних скоростей, искажения стратификации и силового воздействия на препятствия поля двумерных монохроматических внутренних волн в вязкой непрерывно стратифицированной среде.

1. Уравнения движения и граничные условия. Система уравнений двумерного движения вязкой несжимаемой непрерывно стратифицированной жидкости в системе координат (x, y, z) имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \rho \Delta v_x + \\ &+ 2\nu \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + f^x \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \rho \Delta v_z + \\ &+ \nu \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + 2\nu \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \rho g + f^z \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{1.1}$$

где ρ , P , (v_x, v_z) – полные плотность, давление и скорость, ν – кинематическая вязкость, которая предполагается постоянной, (f^x, f^z) – силовые источники, вызывающие движение жидкости, ось z направлена против ускорения силы тяжести g .

Рассматриваются движения в среде с произвольным непрерывным распределением плотности $\rho_0(z)$ и соответствующим профилем гидростатического давления

$$P_0(z) \equiv P_0(z_0) - g \int_{z_0}^z \rho_0(\zeta) d\zeta$$

Граничными условиями являются условия прилипания для скорости на имеющихся в жидкости жестких поверхностях S : $v_x|_S = v_z|_S = 0$, а также условия затухания всех возмущений на бесконечности.

Учитывая двумерность задачи и несжимаемость жидкости, в дальнейших вычислениях используем функцию тока Ψ , связанную со скоростью соотношениями

$$v_x = \partial\Psi/\partial z, \quad v_z = -\partial\Psi/\partial x \quad (1.2)$$

Вводя возмущения плотности и давления

$$P \rightarrow P_0(z) + P, \quad \rho \rightarrow \rho_0(z) + \rho \quad (1.3)$$

и подставляя выражения (1.2) и (1.3) в уравнение (1.1), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho)(\Psi_{tz} + \Psi_z \Psi_{xz} - \Psi_x \Psi_{zz}) &= -P_x + \nu(\rho_0 + \rho)\Delta\Psi_z + \\ &+ 2\nu\rho_x \Psi_{xz} + \nu(\rho'_0 + \rho_z)(\Psi_{zz} - \Psi_{xx}) + f^x \\ (\rho_0 + \rho)(-\Psi_{tx} - \Psi_z \Psi_{zx} + \Psi_x \Psi_{zz}) &= -P_z - \nu(\rho_0 + \rho)\Delta\Psi_x + \\ &+ \nu\rho_x(\Psi_{zz} - \Psi_{xx}) - 2\nu(\rho'_0 + \rho_z)\Psi_{xz} - \rho g + f^z \\ \rho_t + \rho_x \Psi_z - (\rho'_0 + \rho_z)\Psi_x &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь и далее нижние индексы t, x, z означают дифференцирование по соответствующей переменной.

2. Стоксово течение в поле внутренних волн. Рассчитывается течение, порождаемое за счет нелинейных эффектов произвольным полем монохроматических внутренних волн с частотой ω , функция тока которого описывается соотношением

$$\Psi_1 = \text{Re}[\psi(x, z)e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2}[\psi(x, z)e^{-i\omega t} + \psi^*(x, z)e^{i\omega t}] \quad (2.1)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Исходное поле (2.1) порождает стационарное (стоксово) течение и волны высших гармоник. Поле Ψ_1 удовлетворяет следующей из (1.4) линеаризованной системе уравнений

$$\begin{aligned} \rho_0 \Psi_{1tz} &= -P_{1x} + \nu\rho_0 \Delta\Psi_{1z} + \nu\rho'_0(\Psi_{1zz} - \Psi_{1xx}) + f^x \\ \rho_0 \Psi_{1tx} &= P_{1z} + \nu\rho_0 \Delta\Psi_{1x} + 2\nu\rho'_0 \Psi_{1xz} + \rho_1 g - f^z \\ \rho_{1t} - \rho'_0 \Psi_{1x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение нелинейной системы уравнений (1.4) ищется в виде разложений по гармоникам частоты ω для функции тока

$$\Psi(x, z, t) = \Psi_s(x, z) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Psi_n^+(x, z)e^{in\omega t} + \Psi_n^-(x, z)e^{-in\omega t}] \quad (2.3)$$

и аналогичных разложений для давления и плотности. Здесь и далее члены с индексом s описывают стоксово течение. В нулевом приближении нелинейными поправками к исходному полю с частотой ω можно пренебречь и считать

$$\Psi_1^+ = \frac{1}{2}\psi^*(x, z), \quad \Psi_1^- = \frac{1}{2}\psi(x, z) \quad (2.4)$$

Из уравнений (2.2) следует, что в свободной от источников части пространства функция ψ удовлетворяет уравнению внутренних волн

$$\Delta\psi - \frac{N^2}{\omega^2} \psi_{xx} - \frac{i\nu}{\omega} \Delta^2\psi + \frac{\rho'_0}{\rho_0} \psi_z - \frac{2i\nu\rho'_0}{\omega\rho_0} \Delta\psi_z - \frac{i\nu\rho''_0}{\omega\rho_0} (\psi_{zz} - \psi_{xx}) = 0 \quad (2.5)$$

при выводе которого не используется традиционное приближение Буссинеска. Здесь $N^2(z) = g/\Lambda$ – квадрат частоты плавучести, $\Lambda = [\ln \rho_0(z)/dz]^{-1}$ – масштаб стратификации. Подставляя выражение (2.3) и аналогичные выражения для давления и плотности в систему (1.4) и оставляя только квадратичные члены по Ψ_1 , получим при учете уравнений (2.2) систему уравнений относительно Ψ_s, P_s и ρ_s

$$\begin{aligned} &(\rho_0 + \rho_s)(\Psi_{sz} \Psi_{sxz} - \Psi_{sx} \Psi_{szz}) + P_{sx} - \nu(\rho_0 + \rho_s) \Delta \Psi_{sz} - \\ &- 2\nu\rho_{sx} \Psi_{sxz} - \nu(\rho'_0 + \rho_{sz})(\Psi_{szz} - \Psi_{sxx}) = F^x \\ &(\rho_0 + \rho_s)(-\Psi_{sz} \Psi_{sxx} + \Psi_{sx} \Psi_{sxz}) + P_{sz} + \nu(\rho_0 + \rho_s) \Delta \Psi_{sx} + \\ &+ \nu\rho_{sx}(\Psi_{sxx} - \Psi_{szz}) + 2\nu(\rho'_0 + \rho_{sz}) \Psi_{sxz} + \rho_s g = F^z \\ &\rho_{sx} \Psi_{sz} - (\rho'_0 + \rho_{sz}) \Psi_{sx} = Q \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} F^x &= \langle -\rho_1 \Psi_{1xz} - \rho_0(\Psi_{1z} \Psi_{1xz} - \Psi_{1x} \Psi_{1zz}) + \\ &+ \nu[\rho_1 \Delta \Psi_{1z} + 2\rho_{1x} \Psi_{1xz} + \rho_{1z}(\Psi_{1zz} - \Psi_{1xx})] \rangle \\ F^z &= \langle -\rho_1 \Psi_{1zx} - \rho_0(\Psi_{1x} \Psi_{1xz} - \Psi_{1z} \Psi_{1xx}) - \\ &- \nu[\rho_1 \Delta \Psi_{1x} + 2\rho_{1z} \Psi_{1xz} + \rho_{1x}(\Psi_{1xx} - \Psi_{1zz})] \rangle \\ Q &= \langle \rho_{1z} \Psi_{1x} - \rho_{1x} \Psi_{1z} \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

Угловые скобки означают усреднение по периоду $2\pi/\omega$.

Таким образом, в рассматриваемом приближении нелинейные члены в системе (1.1) заменяются эффективными стационарными силовыми источниками ($F^x(x, z)$, $F^z(x, z)$) в уравнениях движения и массовым источником с расходом $Q(x, z)$ в уравнении неразрывности.

Из соотношения (2.1) и последнего уравнения в (2.2) следует, что

$$\rho_1 = \frac{i\rho'_0}{2\omega} (\psi_x e^{-i\omega t} - \psi_x^* e^{i\omega t})$$

Подстановка этого выражения и соотношения (2.1) в выражения (2.7) дает

$$\begin{aligned} F^x &= \frac{\rho_0}{4} \left\{ \psi_z \psi_{xz}^* - \psi_x \psi_{zz}^* - \frac{\psi_x \psi_z^*}{\Lambda} - \right. \\ &- \frac{i\nu}{\omega\Lambda} [\psi_x \Delta \psi_z^* + \psi_{xz}(\psi_{zz}^* - 3\psi_{xx}^*)] \left. \right\} + \text{с.с.} \\ F^z &= \frac{\rho_0}{4} \left\{ \psi_z \psi_{xx}^* - \psi_x \psi_{xz}^* + \frac{\psi_x \psi_x^*}{\Lambda} + \right. \\ &+ \frac{i\nu}{\omega\Lambda} [\psi_x \Delta \psi_x^* + \psi_{xx}(\psi_{xx}^* - \psi_{zz}^*)] \left. \right\} + \text{с.с.} \\ Q &= -\frac{i\rho'_0}{4\omega} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_x \psi_z^* - \psi_z \psi_x^*) \end{aligned} \quad (2.8)$$

где с.с. означает комплексно-сопряженную величину. Из вида выражения для Q в (2.8) следует, что такой источник имеет нулевой полный массовый расход ($\iint Q(x, z) dx dz = 0$).

В предположении о малости скоростей индуцированного волной течения систему (2.6) можно линеаризовать:

$$\begin{aligned} P_{sx} - \nu \rho_0 \Delta \Psi_{sz} + \nu \rho'_0 (\Psi_{sxx} - \Psi_{szz}) &= F^x \\ P_{sz} + \nu \rho_0 \Delta \Psi_{sx} + 2\nu \rho'_0 \Psi_{sxz} + \rho_s g &= F^z \\ -\rho'_0 \Psi_{sx} &= Q \end{aligned} \quad (2.9)$$

Сравнивая последние уравнения в системах (2.8) и (2.9), найдем функцию тока стокового течения, порождаемого произвольным полем монохроматических внутренних волн,

$$\Psi_s(x, z) = \frac{i}{4\omega} [\psi_x(x, z) \psi_z^*(x, z) - \psi_z(x, z) \psi_x^*(x, z)] \quad (2.10)$$

Видно, что если поле $\psi(x, z)$ удовлетворяет условиям прилипания, то

$$\Psi_{sx}|_S = \Psi_{sz}|_S = 0$$

т.е. стоковое течение также точно удовлетворяет граничным условиям. При подстановке в выражение (2.10) функции тока изолированного волнового пучка, возбуждаемого компактным источником [7], получается, что скорость индуцированного течения обращается в нуль в приближении идеальной жидкости ($\nu = 0$). В областях пересечения нескольких волновых пучков стоков дрейф появляется и в отсутствие вязкости.

Исключая из системы (2.9) давление P_s и используя соотношения (2.8), получаем уравнение для возмущения плотности в стоковом течении

$$\frac{4g}{\rho_0} \rho_{sx} \approx (\psi_z \Delta \psi_x^* - \psi_x \Delta \psi_z^*) + \frac{2\psi_x \Delta \psi^*}{\Lambda} - \frac{i\nu}{\omega} \Delta^2 \psi_x \psi_z^* + \text{с.с.} \quad (2.11)$$

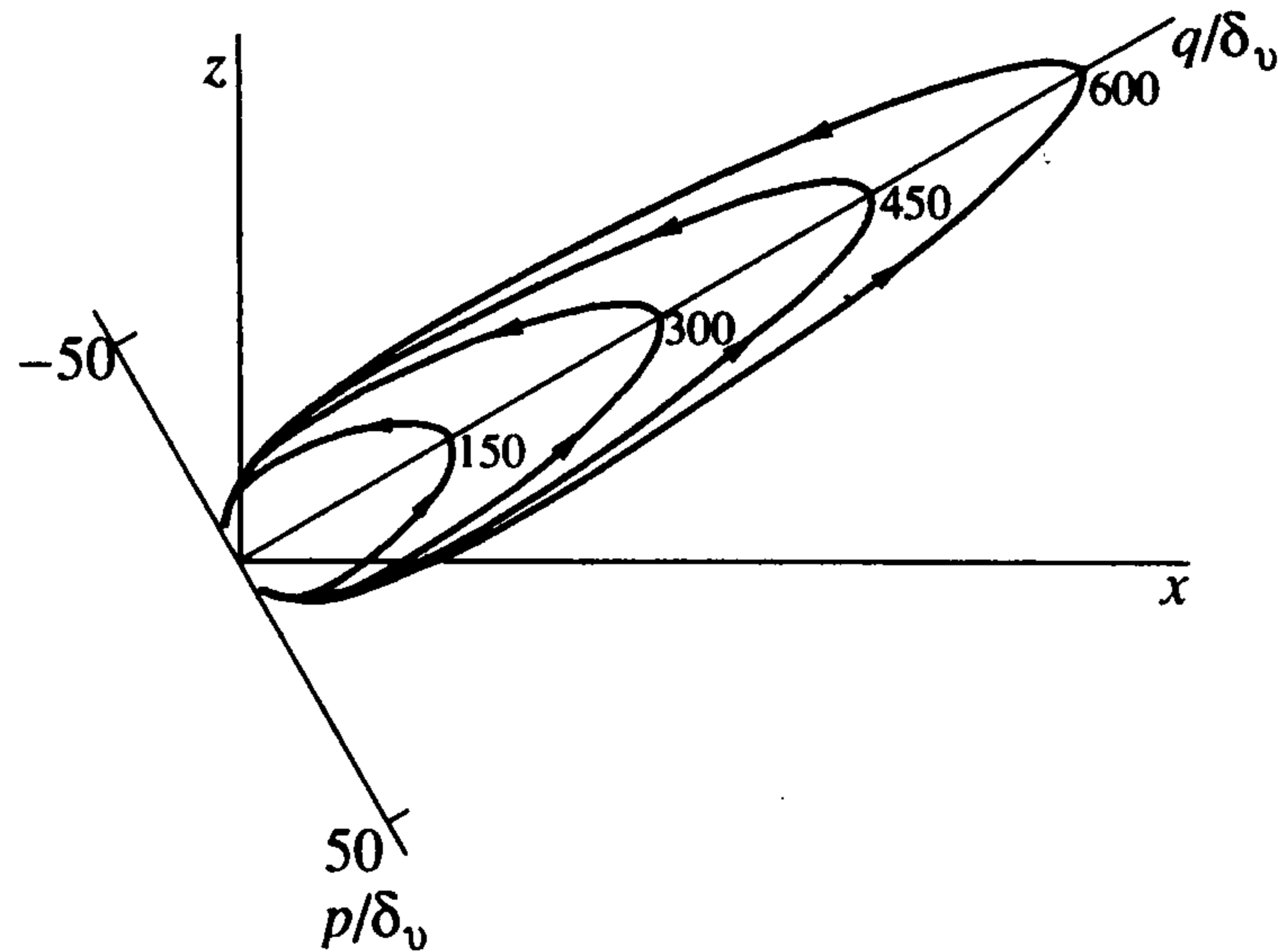
Здесь опущены члены следующих порядков малости по $1/\Lambda$.

Относительный порядок малости членов в соотношении (2.11) зависит от положения точки наблюдения. Вдали от источников и отражающих поверхностей, где функция тока исходного поля меняется медленно, главным является первый член. Малость двух других членов следует из условия слабой стратификации и малой вязкости ($\Lambda \gg \lambda \gg \delta_v$, где λ – характерный масштаб пучка, $\delta_v = \sqrt{\nu/\omega}$ – поперечный масштаб внутреннего пограничного течения [5]), что выполняется как для лабораторных, так и натуральных условий. Вблизи источников и отражающих поверхностей, где кроме волн существуют внутренние пограничные течения [8], главными являются первый и третий члены, поскольку здесь действие оператора Лапласа Δ на функцию равносильно умножению ее на величину ω/ν . В промежуточной области все три члена сравнимы по величине, когда характерный пространственный масштаб внутренних волн λ порядка вязкого волнового масштаба $L_v = (\nu g)^{1/3} / N$ [7].

Интегрируя соотношение (2.11) при учете уравнений (2.5) и оставляя только главный член, получим, что вдали от источников и ограничивающих поверхностей возмущение плотности в стоковом течении имеет вид

$$\rho_s(x, z) = \frac{\rho_0 N^2}{4g\omega^2} [\psi_z \psi_{xx}^* - \psi_x \psi_{xz}^* + \psi_z^* \psi_{xx} - \psi_x^* \psi_{xz}] \quad (2.12)$$

В качестве примера рассматривается стоковое течение, индуцируемое пучком внутренних волн с частотой ω , распространяющимся под углом $\theta = \arcsin(\omega/N)$ к горизонту. Пучок возбуждается точечным диполем в экспоненциально стратифицированной жидкости. Функция тока исходного поля в сопутствующей пучку системе



Фиг. 1

координат (p, q) имеет вид [9]

$$\psi(p, q) = D_0 \int_0^\infty \exp(ikp - \delta_v^2 k^3 q) dk, \quad \delta_v = \left(\frac{v}{2N \cos \theta} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

Картина изолиний функции тока Ψ_s (они являются касательными к полю скоростей), рассчитанная по формулам (2.10) и (2.13), приведена на фигуре в координатах (p^*, q^*) , нормированных на масштаб внутреннего пограничного течения δ_v : $p^* = p/\delta_v$, $q^* = q/\delta_v$. Стрелками указаны направления стационарного движения жидкости. Таким образом, в центре пучка внутренних волн фазовая скорость и скорость Стокса дрейфа направлены противоположно.

3. Стационарное силовое воздействие внутренних волн. Рассматривается стационарная компонента силового воздействия пучка периодических внутренних волн, падающего на горизонтальную жесткую поверхность $z = 0$. Функция тока пучка, порождаемого компактным источником, может быть представлена в виде [9]

$$\psi(p, q) = \int_0^\infty D(k) \exp(ikp - \delta_v^2 k^3 q) dk \quad (3.1)$$

где $D(k)$ – спектральная функция источника, (p, q) – сопутствующая система координат (ось q направлена вдоль пучка). Полное поле, состоящее из падающего и отраженного пучков, а также внутреннего пограничного течения на плоскости, имеет вид [9]

$$\psi(x, z) = \int_0^\infty A(k) \varphi(k, z) e^{ikx} dk$$

$$\varphi(k, z) = e^{ik_w z} - \frac{k_b + k_w}{k_b - k_w} e^{-ik_w z} + \frac{2k_w}{k_b - k_w} e^{-ik_b z} \quad (3.2)$$

$$k_w(k) \approx -k \cot \theta + \frac{i \delta_v^2 k^3}{\sin^4 \theta}, \quad k_b(k) \approx (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2v}}$$

причем

$$A(k) = \frac{1}{\sin \theta} D\left(\frac{k}{\sin \theta}\right) \exp\left(-\frac{\delta_v^2 k^3 L}{\sin^3 \theta}\right)$$

где L – расстояние от источника до плоскости, измеренное вдоль пучка.

Из первого соотношения (3.2) следует, что

$$\psi_x(x, 0) = \psi_z(x, 0) = 0 \quad (3.3)$$

Нормальная $\mathcal{F}_z$ и тангенциальная $\mathcal{F}_x$ стационарные компоненты полной силы, действующие на единицу площади отражающей плоскости, представляются в виде [6]

$$\mathcal{F}_z = P_s(x, 0) + 2\rho_0 v \Psi_{sxz}|_{z=0}, \quad \mathcal{F}_x = \rho_0 v (\Psi_{sxx} - \Psi_{szz})|_{z=0} \quad (3.4)$$

причем в силу соотношений (3.3) $\mathcal{F}_x = 0$. Давление $P_s(x, 0)$ определяется из первого уравнения (2.9), которое при учете равенств (3.3) записывается в виде

$$P_{sx}(x, 0) = \rho_0 v \Psi_{szz}|_{z=0}$$

Подставляя сюда выражения (2.10) и (3.2), получим

$$P_s(x, 0) = \frac{3i\rho_0 v}{4\omega} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{k'}{k' - k''} A(k') A^*(k'') \times \\ \times \varphi_{zz}(k', 0) \varphi_{zz}^*(k'', 0) e^{i(k' - k'')x} dk' dk'' + \text{с.с.} \quad (3.5)$$

Интегрируя равенство (3.5) по x от $-\infty$ до $+\infty$, найдем силу, действующую на бесконечную полосу единичной (вдоль оси y) ширины,

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{3i\pi\rho_0 v}{2\omega} \int_0^\infty k [|A(k)|^2 h'(k) h^*(k) + |h(k)|^2 A'(k) A^*(k)] dk + \text{с.с.} \\ h(k) = 2k_w(k) [k_b(k) + k_w(k)] \quad (3.6)$$

Штрих означает производную по k .

Если пучок возбуждается точечным диполем, расположенным на расстоянии L вдоль пучка от плоскости, то

$$A(k) = \frac{D_0}{\sin \theta} \exp \left(-\frac{\delta_v^2 k^3 L}{\sin^3 \theta} \right)$$

и при учете выражений для k_w и k_b из (3.2) получим

$$\tilde{\mathcal{F}} = -18\pi\rho_0 v_m^2 \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta} \sqrt{\frac{v}{2\omega}} (\delta_v^2 L)^{2/3} \left[\Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \right]^{-1} \quad (3.7)$$

Здесь введена максимальная колебательная скорость в пучке v_m в месте его попадания на отражающую плоскость.

Таким образом, стационарная компонента силы, порождаемой пучком внутренних волн, падающим на горизонтальную отражающую плоскость, растет пропорционально квадрату его амплитуды и монотонно увеличивается с уменьшением частоты волны (из записи формулы (3.7) следует, что при этом источник приближается по вертикали к отражающей поверхности и площадь пятна взаимодействия возрастает). Полученные выражения неприменимы при $\omega \rightarrow 0$, поскольку вычисления корней дисперсионного уравнения носят приближенный характер. Использование точных решений дисперсионного уравнения устраняет в (3.7) "инфракрасную" расходимость.

Расчет сил, действующих на наклонную отражающую поверхность, должен проводиться по аналогичной методике с использованием решений дисперсионного уравнения внутренних волн в связанной с ней локальной системе координат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (Федеральная целевая программа "Интеграция", 2.1-304) и Российского фонда фундаментальных исследований (99-05-64980).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in water waves // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1953. V. 245. № 903. P. 535–581.
2. *Chang M.-S.* Mass transport in deep water long-crested random gravity waves // *J. Geophys. Res.* 1969. V. 74. № 6. P. 1515–1536.
3. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface // *J. Fluid Mech.* 1960. V. 8. Pt. 2. P. 293–306.
4. *Dore B.D.* Mass transport in layered fluid systems // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 40. Pt. 1. P. 113–126.
5. *Чашечкин Ю.Д., Кистович Ю.В.* Монохроматические внутренние волны в произвольно стратифицированной вязкой жидкости // *Докл. РАН.* 1998. Т. 359. № 1. С. 112–115.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. *Макаров С.А., Неклюдов В.И., Чашечкин Ю.Д.* Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1990. Т. 26. № 7. С. 744–754.
8. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Геометрия и энергетика пучков внутренних волн // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1997. Т. 33. № 1. С. 41–47.
9. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Точное решение одной линеаризованной задачи излучения монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости // *ПММ.* 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 611–619.

Москва
e-mail: chakin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
23.V.2000