

УДК 539.95

© 2001 г. К.В. Брушлинский

ДВА ПОДХОДА К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ЦИЛИНДРЕ

На примере задачи о равновесии плазменного цилиндра в винтовом магнитном поле сопоставляются два различных подхода к вопросу о его устойчивости. Первый подход использует симметрию равновесной конфигурации. Ее модель построена в терминах краевой задачи с уравнением Грэда – Шафранова. Равновесие названо "диффузионно устойчивым", если решение задачи может быть получено итерационными методами типа установления. Устойчивость определяется спектральным свойством дифференциального оператора линеаризованного уравнения. Другой подход – традиционная линейная теория МГД-устойчивости равновесных конфигураций. После ее схематического изложения в применении к цилиндру показано, что при обоих рассмотренных подходах собственные значения спектральных задач для винтовых гармоник любого малого возмущения обращаются в нуль одновременно. Это значит, что границы устойчивости в области параметров задачи в обоих случаях совпадают.

В многочисленных работах по математическому моделированию физических процессов, относящихся к проблеме управляемого термоядерного синтеза, значительное внимание уделяется исследованию устойчивости конфигураций плотной горячей плазмы, удерживаемых магнитным полем ("магнитные ловушки"). Время удержания предполагается большим в масштабе естественных плазменных процессов, поэтому рассматриваются конфигурации, находящиеся в равновесии. Рассматриваются две группы вопросов: 1) геометрия и физические параметры равновесной конфигурации и 2) устойчивость конфигурации относительно возмущений, нарушающих ее равновесие. В каждой из них исследования опираются на решение (как правило, численное) задач с уравнениями магнитной газодинамики (МГД).

Конструкция плазменных установок или их элементов часто обладает симметрией (плоской, осевой, винтовой). Поэтому широко распространены двумерные математические модели, допускающие сильные упрощения по сравнению с общим случаем. В двумерных задачах о равновесии система МГД-уравнений может быть сведена к одному скалярному уравнению типа Грэда – Шафранова

$$\Delta\psi = g(\psi) \quad (0.1)$$

для функции тока магнитного поля ψ [1–3]. Здесь Δ – двумерный оператор Лапласа, рассматриваемый в различных системах криволинейных координат в зависимости от типа симметрии. Особенность краевых задач с уравнением (0.1) состоит в том, что они могут иметь неединственные решения. Часть решений нельзя получить итерационными методами типа "установления", т.е. численным интегрированием эволюционного уравнения

$$\partial\psi/\partial t = \Delta\psi - g(\psi) \quad (0.2)$$

Их естественно считать "неустойчивыми" в указанном смысле, а устойчивость или неустойчивость назвать "диффузионной" в соответствии с природой уравнения (0.2). Диагностика и критерии диффузионной устойчивости используют спектральный анализ дифференциального оператора линеаризованного уравнения (0.1) [4–6].

Затронутые вопросы единственности и устойчивости принадлежат общей теории полулинейных уравнений эллиптического и параболического типов [7]. Помимо двумерных задач плазмостатики [8], они обнаружили себя в задачах теории горения (любой размерности) [9, 10], электрохимии [11], при моделировании химических процессов [12]. Ту же природу имеют осо-

бенности локализованных тепловых режимов и режимов с обострением в квазилинейной теории теплопроводности [13].

Диффузионную устойчивость следует отличать от традиционно рассматриваемой МГД-устойчивости равновесных плазменных конфигураций относительно возмущений гидродинамического типа, включая движения. Исследования МГД-устойчивости составляют вторую группу обсуждаемых вопросов и являются постоянной темой в научной литературе (см., например, [14–19]). Представляет интерес установить какие-либо взаимоотношения или иерархию между обоими типами устойчивости. Вопрос поставлен в работах автора [5, 20] и не имеет очевидного ответа. Исследование устойчивости в линейном приближении в обоих случаях связано со спектральным анализом дифференциальных операторов, но весьма различной природы. В случае МГД рассматриваются трехмерные возмущения, описываемые системой уравнений, а уравнение Грэда – Шафранова и его линеаризованный аналог – скалярные и ограничиваются двумерным анализом.

В настоящей работе указанный вопрос рассматривается на относительно простом примере одномерной равновесной конфигурации в плазменном цилиндре с винтовым магнитным полем. Пример хорошо известен в роли распрямленной модели тороидальных установок (токамак, стелларатор). Его МГД-устойчивость составляет предмет многочисленных работ, например, [14–18, 21], а диффузионная устойчивость рассмотрена в статье [20], определившей ряд закономерностей и тенденций, связанных с правой частью $g(\psi)$ уравнения (0.1). Сопоставление двух подходов к устойчивости приводит здесь к следующим результатам.

Произвольные трехмерные малые МГД-возмущения представляются рядом Фурье, составленным из винтовых возмущений. Каждому из них ставится в соответствие двумерное винтовое диффузионное возмущение, описываемое линеаризованным уравнением (0.2). Спектральные задачи, связанные с этими возмущениями, различны, но они совпадают в случае собственных значений, равных нулю. Поскольку переход старшего собственного значения через нуль дает границу устойчивости в области параметров задачи, полученный результат означает, что эти границы совпадают для обоих видов устойчивости. Отсюда следует, что если конфигурация диффузионно устойчива для всех значений шага винта, задающего винтовую симметрию, то она устойчива для всех Фурье-гармоник МГД-возмущений. Исследование диффузионной устойчивости сопряжено с более простыми спектральными задачами, и в этом – практическое значение сформулированного результата.

Ниже, в разд. 1, схематично излагается двумерная модель равновесия в терминах уравнения Грэда – Шафранова и вводится понятие диффузионной устойчивости в применении к плазменному цилиндру с винтовым полем. В разд. 2 воспроизводится схема исследования МГД-устойчивости в линейном приближении, реализованная в том же цилиндре. В разд. 3 проведено сопоставление обоих видов устойчивости и получен основной результат работы.

1. Двумерная модель равновесия. "Диффузионная устойчивость". Равновесная (т.е. находящаяся в покое) конфигурация плотной плазмы в магнитном поле характеризуется распределением в пространстве трех физических величин: давления p , напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ и плотности электрического тока $\mathbf{j}$. Они связаны МГД-уравнением равновесия

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad (1.1)$$

и уравнениями Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (1.2)$$

Уравнения приведены в безразмерной форме: единицы измерения составляют из величин, участвующих в постановке конкретных задач.

При наличии симметрии (плоской, осевой, винтовой) уравнения двумерны и математический аппарат плазмостатики сильно упрощается. Уравнения (1.2) позволяют описывать магнитное поле и ток в направлении двух активных координат с помощью скалярных функций тока ψ и I . Из уравнения (1.1) следует, что функции p , ψ и I попарно зависимы, т.е.

$$p = p(\psi), \quad I = I(\psi) \quad (1.3)$$

а функция ψ удовлетворяет скалярному уравнению Грэда – Шафранова (0.1), конкретный вид которого зависит от типа симметрии. Например, обсуждаемая ниже винтовая

симметрия предполагает зависимость конфигурации только от r и $\Theta = \varphi - \alpha z$, где r , φ , z – цилиндрические координаты, $\alpha = 2\pi/h$, h – шаг винта координатных линий. В этом случае

$$rH_r = \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}, \quad H_\Theta \equiv H_\varphi - \alpha r H_z = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$rj_r = \frac{\partial I}{\partial \Theta}, \quad j_\Theta = -\frac{\partial I}{\partial r}; \quad I \equiv H_I = H_z + \alpha r H_\varphi$$

и уравнение Грэда – Шафранова имеет вид

$$\Delta^{**}\psi = g(\psi, r) \quad (1.4)$$

где

$$\Delta^{**}\psi \equiv \nabla \left(\frac{\nabla \psi}{v} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{v} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2}, \quad v \equiv 1 + \alpha^2 r^2$$

$$g(\psi, r) = -\frac{dp}{d\psi} + \frac{2\alpha}{v^2} I - \frac{I}{v} \frac{dI}{d\psi}$$

Правая часть уравнения (1.4) содержит две произвольные функции (1.3), описывающие распределение давления и электрического тока между магнитными поверхностями $\psi(r, \Theta) = \text{const}$. Их следует задать, исходя из каких-либо требований и пожеланий к искомой конфигурации или на основе априорной экспериментальной информации. Модель равновесной конфигурации строится в результате решения краевой задачи с уравнением (1.4) в заданной области с заданными граничными условиями.

Исследованию плазменных конфигураций в терминах изложенной модели посвящена обширная литература, см., например, [3, 16, 17]. Работы на эту тему с участием автора подытожены в обзорах [4, 5]. В них, в частности, привлечено внимание к тому, что первая краевая задача с уравнением типа (0.1) может иметь неединственные решения. Часть из них не могут, вообще говоря, быть получены итерационными методами "установления", т.е. с помощью решения уравнения (0.2). По этой причине они названы "диффузионно неустойчивыми".

Подчеркнем, что устойчивость или неустойчивость – не следствие избранного метода решения, а внутреннее свойство задачи, которое связано со спектром дифференциального оператора линеаризованного уравнения

$$L[u] \equiv -\Delta u + \frac{\partial g}{\partial \psi} u$$

при условии $u = 0$ на границе области. А именно, критерием устойчивости решения ψ краевой задачи с уравнением (0.1) является неравенство $\lambda_1 > 0$, где λ_1 – первое (минимальное) собственное значение краевой задачи с оператором L

$$L[u] = \lambda u \quad (1.5)$$

Действительно, сходимость метода установления, т.е. выход решения уравнения (0.2) на стационарный режим (0.1), определяется поведением погрешности, которая подчиняется уравнению

$$\partial u / \partial t + L[u] = 0 \quad (1.6)$$

и убывает или возрастает со временем по закону $\exp(-\lambda_1 t)$. Обратное неравенство $\lambda_1 < 0$ для какого-либо решения ψ задачи с уравнением (0.1) означает диффузионную неустойчивость этого решения и, как правило, его неединственность.

С целью сопоставления диффузионной устойчивости с МГД-устойчивостью рассмотрим пример одномерной равновесной конфигурации в плазменном цилиндре

с винтовым магнитным полем. Уравнения (1.1), (1.2) имеют вид

$$\frac{dp}{dr} + H_z \frac{dH_z}{dr} + \frac{H_\phi}{r} \frac{dH_\phi r}{dr} = 0 \quad (1.7)$$

$$H_r \equiv 0, \quad j_r \equiv 0; \quad j_\phi = -\frac{dH_z}{dr}, \quad j_z = \frac{dH_\phi r}{rdr} \quad (1.8)$$

Здесь две функции, например $H_z(r)$, $H_\phi(r)$, должны быть известны на отрезке $0 \leq r \leq 1$, остальные – определяются уравнениями (1.7), (1.8).

Такую конфигурацию можно рассматривать как частный случай двумерной, включив ее в модель с винтовой симметрией при произвольном значении винтового параметра α . Введем функцию тока $\psi(r)$ согласно уравнению

$$H_\Theta \equiv H_\phi - \alpha r H_z = -d\psi / dr$$

Она удовлетворяет уравнению (1.4), в котором

$$I \equiv H_l \equiv H_z + \alpha r H_\phi; \quad \frac{dp}{d\psi} = \frac{dp}{dr} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^{-1}, \quad \frac{dI}{d\psi} = \frac{dI}{dr} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^{-1} \quad (1.9)$$

Двумерные винтовые возмущения конфигурации (1.7), (1.8) подчиняются уравнению (1.6), в котором коэффициенты оператора L не зависят от t и Θ , поэтому они могут быть представлены суммой ряда из частных решений вида

$$u(t, r, \Theta) = e^{\lambda t} e^{im\Theta} u(r)$$

причем

$$L[u] \equiv -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{v} \frac{du}{dr} \right) + \left(\frac{m^2}{r^2} + \frac{\partial g}{\partial \psi} \right) u = \lambda u \quad (1.10)$$

$$|u(0)| < \infty, \quad u(1) = 0$$

где $g(\psi, r)$ – правая часть уравнения (1.4). Дифференцируя ее аналогично указанному выше (формулы (1.9)), имеем

$$\begin{aligned} v H_\Theta \frac{\partial g}{\partial \psi} = & \frac{d^2 H_\Theta}{dr^2} + \frac{1 - 3\alpha^2 r^2}{rv} \frac{dH_\Theta}{dr} - \frac{2\alpha^2 r^2 H_l}{rv H_\Theta} \frac{dH_l}{dr} - \\ & - \frac{(1 + 6\alpha^2 r^2 - 3\alpha^4 r^4) H_\Theta + 8\alpha^3 r^3 H_l}{r^2 v^2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Конфигурация диффузионно устойчива, если для любой пары значений m и α все $\lambda > 0$. Заметим, что при фиксированном α коэффициент при u в уравнении (1.10) возрастает с ростом m и, следовательно, возрастают собственные значения λ (см., например, [22]), повышая устойчивость. Наименее устойчивы гармоники с номером $m = 0$ (длинноволновые возмущения). Поэтому равновесная конфигурация (1.7), (1.8) устойчива относительно любых двумерных винтовых возмущений тогда и только тогда, когда спектр оператора L положителен при $m = 0$ и всех возможных значениях α .

2. Схема исследования МГД-устойчивости. Приведем краткую схему исследования МГД-устойчивости в линейном приближении. Малые возмущения V_1 , p_1 , H_1 любой равновесной плазменной конфигурации описываются уравнениями магнитной газодинамики, линеаризованными на состоянии покоя (1.1), (1.2):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial V_1}{\partial t} = & -\nabla p_1 + \mathbf{j}_1 \times \mathbf{H} + \mathbf{j} \times \mathbf{H}_1 \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} = & -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{V}_1 - \nabla p \cdot \mathbf{V}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Дифференцируя первое уравнение (2.1) по t и исключая p_1 и $\mathbf{H}_1$, получим векторное уравнение относительно только $\mathbf{V}_1$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial t^2} = \nabla(\gamma p \nabla \cdot \mathbf{V}_1 + \nabla p \cdot \mathbf{V}_1) + \mathbf{j} \times (\nabla \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{H})) + (\nabla \times \nabla \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{H})) \times \mathbf{H} \equiv -\mathbf{K}[\mathbf{V}_1] \quad (2.2)$$

которое чаще встречается в форме

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mathbf{K}[\xi], \quad \xi = \int \mathbf{V}_1 dt \quad (2.3)$$

в применении к вектору ξ малого смещения. Последнее очевидно следует из системы (2.1) или же может быть получено из уравнения (2.2) интегрированием по t . Форма (2.3) удобнее при толковании механического смысла устойчивости: правая часть играет роль силы, а квадратичная форма $\int \mathbf{K}[\xi] \cdot \xi d\mathbf{r}$ – потенциальной энергии возмущения.

Коэффициенты линейного оператора $\mathbf{K}$ зависят только от равновесного решения, поэтому задача с уравнением (2.3) и граничными условиями, например $\xi_n = 0$ на жесткой границе области, допускает разделение переменных

$$\xi(t, \mathbf{r}) = e^{i\omega t} \xi(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

и сводится к краевой задаче с уравнением

$$\rho \omega^2 \xi = \mathbf{K}[\xi] \quad (2.5)$$

Оператор $\mathbf{K}$ – самосопряженный в широком диапазоне естественных граничных условий, поэтому его собственные значения ω^2 действительны. Равновесие устойчиво, если все они положительны, – в этом случае малые смещения (2.4) не возрастают со временем. Оно неустойчиво, если существует хоть одно $\omega^2 < 0$.

Спектральные задачи с уравнениями (1.5) и (2.5) имеют мало общего. Первая – скалярная и связана с возмущениями размерности не выше двух, вторая – векторная и допускает трехмерные возмущения.

В применении к рассмотренной выше одномерной равновесной конфигурации в цилиндре (1.7), (1.8) уравнение (2.5) допускает дальнейшее разделение переменных

$$\xi(\mathbf{r}) = e^{im\varphi - ikz} \xi(r) = e^{im\Theta} \xi(r)$$

где

$$\Theta = \varphi - \alpha z, \quad \alpha = k/m, \quad \xi(r) = (\xi_r, i\xi_\varphi, i\xi_z)$$

Обозначив

$$\xi_\Theta = \xi_\varphi - \alpha r \xi_z, \quad \eta = \frac{m}{r} \xi_\Theta, \quad \zeta = H_z \xi_\varphi - H_\varphi \xi_z$$

$$H_\Theta = H_\varphi - \alpha r H_z, \quad H_l = H_z + \alpha r H_\varphi$$

получим из уравнения (2.5)

$$\begin{aligned} \rho \omega^2 \xi_r &= K_r(\xi) \equiv K_0[\xi_r] + \left(\frac{m}{r} H_\Theta\right)^2 \xi_r + \frac{d}{dr}(\gamma p \eta) + \frac{d}{dr}\left(\frac{m}{r} H_l \zeta\right) + \frac{2kH_\varphi}{r} \zeta \\ \rho \omega^2 \eta &= K_\eta(\xi) \equiv -\frac{m^2}{r^2} (\nu \gamma p + H_l^2) \frac{d\xi_r r}{r dr} + 2kH_\varphi \frac{m}{r^2} H_l \xi_r + \frac{m^2 \nu}{r^2} \left(\gamma p \eta + \frac{m}{r} H_l \zeta\right) \\ \rho \omega^2 \zeta &= K_\zeta(\xi) \equiv -\frac{mH_l}{r} (\gamma p + H^2) \frac{d\xi_r r}{r dr} + 2kH^2 \frac{H_\varphi}{r} \xi_r + \frac{m}{r} H_l \gamma p \eta + \frac{m^2}{r^2} H^2 \nu \zeta \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$K_0[\xi_r] \equiv -\frac{d}{dr} \left(\rho C_s^2 \frac{d\xi_r r}{r dr} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{H_\phi}{r} \right)^2 \xi_r r$$

$$\rho C_s^2 = \gamma p + H^2; \quad H^2 = H_z^2 + H_\phi^2$$

Последние два уравнения (2.6) разрешим относительно η и ζ и подставим результат в первое уравнение (2.6). Тогда векторная краевая задача с уравнением (2.5) превращается в скалярную [15]

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{v} F \frac{d\xi_r r}{dr} \right) + G \xi_r r = 0; \quad |\xi_r(0)| < \infty, \quad \xi_r(1) = 0 \quad (2.7)$$

где

$$r^2 F(r, \omega) = \left(1 - \frac{S^2}{D} \right) (H_\Theta^2 - S)$$

$$r^2 G(r, \omega) = \frac{m^2}{r^2} (H_\Theta^2 - S) - \frac{4\alpha^2 H_\phi^2}{D} (\gamma p H_\Theta^2 - H^2 S) + r \frac{d}{dr} \left(\frac{H_\phi}{v r^2} (2H_\Theta - v H_\phi) + 2\alpha r H_l \frac{S^2}{D} \right)$$

$$S = \frac{\rho \omega^2 r^2}{m^2}, \quad D = v \gamma p H_\Theta^2 - v \rho C_s^2 r^2 S + S^2$$

Ее специфика – в том, что собственное значение ω^2 входит в коэффициенты F и G нелинейным образом. Одна из возможностей исследования МГД-устойчивости плазменного цилиндра – подбирать ω^2 методом "стрельбы" в серии численных решений уравнения (2.7) [18].

3. Общая граница устойчивости. Спектральные задачи (1.10) и (2.7), сильно отличающаяся друг от друга, обе относятся к гармоникам возмущений (диффузионного и МГД) с фиксированными значениями номера m и винтового параметра α . Границам обоих типов устойчивости этих гармоник соответствуют условия, при которых наименьшие собственные значения λ и ω^2 обращаются в нуль.

Уравнение (2.7) при $\omega^2 = 0$ сильно упрощается. При $m \neq 0$ оно имеет вид

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{H_\Theta^2}{v r} \frac{d\xi_r r}{dr} \right) + \left[\left(\frac{m H_\Theta}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{v} \left(\frac{2\alpha H_\phi}{r} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{H_\phi^2}{r^2} - \frac{2H_\phi H_\Theta}{v r^2} \right) \right] \xi_r r = 0 \quad (3.1)$$

а при $m = 0, k \neq 0$ ($\alpha = \infty$)

$$-r \frac{d}{dr} \left(\frac{H_z^2}{r} \frac{d\xi_r r}{dr} \right) + \left[(k H_z)^2 - 2 \frac{H_\phi}{r} \frac{dH_\phi}{dr} - 2 \frac{H_\phi^2}{r^2} \right] \xi_r r = 0 \quad (3.2)$$

Положив $u = H_\Theta \xi_r$, получим из (3.1)

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{v} \frac{du}{dr} \right) + \left(\frac{m^2}{r^2} + Q \right) u = 0, \quad Q = \frac{\partial g}{\partial \psi} \quad (3.3)$$

Здесь Q совпадает с выражением $\partial g / \partial \psi$, определенным формулой (1.11). Таким образом, уравнение (3.3) совпадает с уравнением (1.10) при $\lambda = 0$. В предельном случае (3.2) замена $v = H_z \xi_r$ приводит к уравнению

$$-r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) + (k^2 + Q^*) v = 0 \quad (3.4)$$

где

$$Q^* = \frac{1}{H_z} \frac{d^2 H_z}{dr^2} - \frac{1}{r H_z} \frac{dH_z}{dr} - \frac{2H_\phi}{r H_z^2} \frac{dH_\phi}{dr} - \frac{2H_\phi^2}{r^2 H_z^2}$$

которое совпадает с линеаризованным на равновесии (1.7), (1.8) уравнением Грэда – Шафранова в его осесимметричной версии

$$\Delta^* \psi \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r^2 \frac{dp}{d\psi} - I \frac{dl}{d\psi} \equiv g^*(\psi, r)$$

Здесь

$$\frac{d\psi}{dr} = r H_z, \quad I = r H_\phi, \quad Q^* = \frac{\partial g^*}{\partial \psi}$$

Наконец, предельный случай $m = 0$, $\alpha \rightarrow \infty$, $H_z \equiv 0$ соответствуют Z-пинчу, устойчивость которого исчерпывающим образом исследована (см., например, [14, 17]).

Таким образом, собственные функции обеих задач (1.10), (2.7), соответствующие нулевому собственному значению, удовлетворяют одному и тому же уравнению (3.3) с граничными условиями $|u(0)| < \infty$, $u(1) = 0$. Это значит, что границы устойчивости в области параметров задачи совпадают в обоих рассмотренных случаях для каждой из гармоник возмущений.

Исключение составляет случай полностью одномерных возмущений цилиндра: $m = 0$, $k = 0$, $\alpha = 0$. Здесь МГД-устойчивость безусловна, по крайней мере, при значениях показателя адиабаты $\gamma \leq 2$. Действительно, в этом случае из уравнений (2.6) следует $\xi_\phi \equiv \xi_z \equiv 0$, а $\xi = \xi_r$ удовлетворяет уравнению

$$\rho \omega^2 \xi = K_0[\xi]$$

Устойчивость следует из положительной определенности оператора K_0 , который удобно переписать в виде

$$K_0[\xi] \equiv -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \rho C_s^2 \frac{d\xi}{dr} \right) + q \xi, \quad q \equiv r \frac{d}{dr} \left(\frac{H_\phi}{r} \right)^2 - \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho C_s^2}{r} \right)$$

Используя уравнение равновесия (1.7), преобразуем:

$$q = \frac{2 - \gamma}{r} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dH_\phi^2}{dr} + \frac{\rho C_s^2}{2}$$

$$\rho C_s^2 = \gamma p + H_z^2 + H_\phi^2 = 2(\gamma - 1)p + H_z^2 + (2 - \gamma)p + H_\phi^2$$

Отсюда имеем

$$\int_0^1 K_0(\xi) \xi r dr = \int_0^1 \left\{ [2(\gamma - 1)p + H_z^2] \left[\left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 + \frac{\xi^2}{r^2} \right] + [(2 - \gamma)p + H_\phi^2] \left(\frac{d\xi}{dr} - \frac{\xi}{r} \right)^2 \right\} r dr \geq 0$$

при любом ξ и при $\gamma \leq 2$ ("энергетический принцип" или "интеграл энергии" [14, 17]).

Диффузионная устойчивость шнура относительно одномерных возмущений по-прежнему нетривиальна (см. примеры в [20]).

Проведенное сопоставление позволяет сделать следующий вывод. Чтобы констатировать факт МГД-устойчивости равновесной плазменной конфигурации в цилиндре с винтовым магнитным полем, достаточно установить диффузионную устойчивость всех винтовых гармоник возмущения. А именно спектры задач (1.10) при $m = 0$ и любых значениях α должны быть положительны. Если хоть одна гармоника диффу-

зионно неустойчива, то в параметрах конфигурации преодолена соответствующая граница, и та же гармоника неустойчива в традиционном гидродинамическом смысле.

В заключение обратим внимание на то, что спектральная задача (1.10) помимо очевидной особенности при $r = 0$ имеет еще одну – при $r = r_c$, где $H_\Theta(r_c) = 0$. Она соответствует равенству

$$\mu(r) \equiv \frac{H_\varphi}{rH_z} = \alpha \quad (3.5)$$

т.е. совпадению "угла прокручивания" $\mu(r)$ силовой линии равновесного магнитного поля и винтового параметра α . Иначе говоря, силовая линия совпадает при этом с координатной линией, вдоль которой возмущения данной гармоники предполагаются постоянными (винтовая симметрия). Такое совпадение называют "резонансом", а цилиндрическую поверхность $r = r_c$ – резонансной поверхностью [16]. Известно, что возмущения на резонансной поверхности наиболее опасны с точки зрения устойчивости; примеры [20] показали неустойчивость именно вблизи резонанса. Уравнение (3.3), участвующее в обоих обсуждавшихся подходах к задаче об устойчивости, правильно отражает это обстоятельство.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00395).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 3. С. 710–722.
2. Johnson J.L., Oberman C.R., Kulsrud R.M., Frieman E.A. Some stable hydromagnetic equilibria // Phys. Fluids. 1958. V. 1. № 4. P. 281–296.
3. Пустовитов В.Д., Шафранов В.Д. Равновесие и устойчивость плазмы в стеллараторах // Вопросы теории плазмы / Под ред. Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1987. Вып. 15. С. 146–291.
4. Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Петровская Н.Б. О единственности и устойчивости решений двумерных задач плазмостатики // Мат. моделирование. 1995. Т. 7. № 4. С. 73–86.
5. Брушлинский К.В., Савельев В.В. Магнитные ловушки для удержания плазмы // Мат. моделирование. 1999. Т. 11. № 5. С. 3–36.
6. Brushlinsky K.V. Mathematical modelling in plasmastatics // Comp. Phys. Comm. 2000. V. 126. № 1–2. P. 37–40.
7. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. Вып. 2. С. 87–158.
8. Макнамара Б. Равновесие плазмы в магнитном поле // Управляемый термоядерный синтез / Под ред. Дж. Киллина. М.: Мир, 1980. С. 224–267.
9. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 368 с.
10. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
11. Crouzeix M., Rappaz J. On Numerical Approximation in Bifurcation Theory. Paris: Masson; Berlin: Springer, 1990. 165 p.
12. Семенов Н.Н. О некоторых проблемах химической кинетики и реакционной способности. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 686 с.
13. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 2. С. 321–324.
14. Кадомцев Б.Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 132–176.
15. Соловьев Л.С. Гидромагнитная устойчивость замкнутых плазменных конфигураций // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1972. Вып. 6. С. 210–290.

16. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982. 320 с.
17. *Bateman G.* MHD-Instability. Cambridge (Mass); London: MIT Press, 1979. = Бейтман Г. МГД-неустойчивости. М.: Энергоиздат, 1982. 199 с.
18. Герлах Н.И., Зуева Н.М., Соловьев Л.С. Линейная теория винтовой МГД-неустойчивости // Магнит. гидродинамика. 1978. № 4. С. 49–54.
19. Джонсон Дж.Л. Проблемы МГД-равновесия и устойчивости плазмы в стеллараторах // Физика плазмы. 1999. Т. 25. № 12. С. 1013–1028.
20. Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Синько С.В. Вопросы единственности и устойчивости в одномерных моделях равновесия плазменного шнура // Физика плазмы. 1998. Т. 24. № 11. С. 973–981.
21. *Newcomb W.A.* Hydromagnetic stability of a diffuse linear pinch // Ann. Phys. 1960. V. 10. № 2. P. 232–267.
22. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 383 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.VIII.2000