

УДК 531.36:62–50

© 2001 г. Э.К. Лавровский, А.М. Формальский

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСКАЧИВАНИЕМ И ТОРМОЖЕНИЕМ ДВУЗВЕННОГО МАЯТНИКА

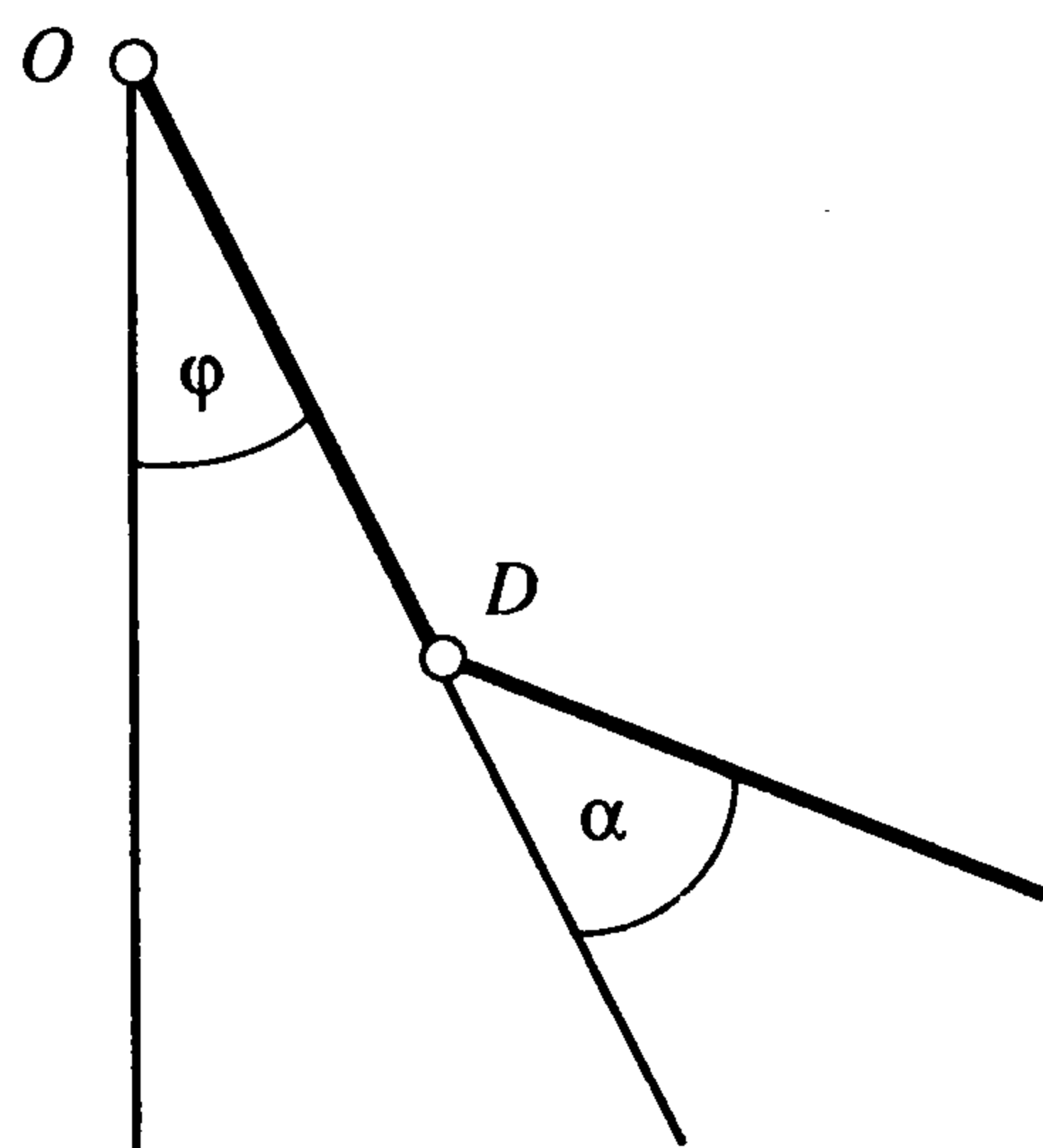
Решается задача построения управления, максимизирующего или минимизирующего отклонение первого (верхнего) звена плоского двухзвенного маятника на одном или нескольких полуциклах колебаний. В качестве управляющего параметра рассматривается межзвенный угол, который может изменяться в заданных пределах. В уравнения движения системы входит как этот угол, так и его производная, что затрудняет решение задачи. Заменой переменных удается исключить производную управления из уравнений. После этого оптимальное управление строится в виде обратной связи. Приведены результаты численных исследований.

Задачи управления колебательными системами привлекают внимание многих исследователей. Они изучаются, например, в монографиях [1–4]. Значительные трудности вызывает обычно построение управления, тем более оптимального, объектами, в которых число управляющих воздействий меньше числа степеней свободы (объектами с "дефицитом" числа управлений). К таким объектам относятся качели, маятниковые системы, шагающие механизмы, у которых приводы установлены только в межзвенных шарнирах. Животные, человек также могут перемещать "звенья" своего тела только одно относительно другого. Однако делают они это так, чтобы внешние силы, возникающие при относительном движении, – силы взаимодействия с окружающей средой, гравитационные силы – осуществляли движение тела как целого желаемым образом. Например, ходьба, бег животных, ползание пресмыкающихся происходят благодаря силам трения с опорной поверхностью. Животные "организуют" эти силы надлежащим образом при относительном движении звеньев тела. Человек управляет колебаниями качелей вокруг точки подвеса, перемещаясь на них подходящим образом. В точке подвеса отсутствует какой-либо управляющий момент. Гимнаст раскачивается на перекладине, управляя в основном углом в тазобедренном суставе. Момент в запястном суставе при этом весьма мал. В обоих последних случаях человек надлежащим образом использует силу тяжести.

Изучалась [5] задача оптимального управления раскачиванием и торможением качелей. Управляющим параметром, как и ранее [2–4], считалось положение находящейся на них материальной точки. Уравнения движения, получающиеся при использовании в качестве фазовых переменных угла и угловой скорости отклонения качелей от вертикали, содержат как положение, так и скорость материальной точки, другими словами, содержат управление вместе со своей производной, что неудобно для решения задачи синтеза оптимального управления. Использование в качестве одной из фазовых переменных кинетического момента вместо угловой скорости позволяет исключить скорость перемещения материальной точки из уравнений движения и построить полную картину синтеза оптимального управления.

Изучались две задачи оптимального управления раскачиванием двухзвенного физического маятника¹. В первой задаче в качестве управляющей функции выбрана скорость изменения межзвенного угла, которая считается ограниченной; решается эта задача с использованием принципа максимума Понтрягина. Во второй задаче в качестве управления выбран сам межзвенный угол. При этом авторы не исключают, однако, из уравнений движения производную

¹ Голубев Ю.Ф., Хайруллин Р.З. Оптимальное управление раскачиванием двухзвенного физического маятника: Препринт № 27. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша РАН, 1999. 28 с.



Фиг. 1

межзвенного угла и получают для этой задачи необходимые условия оптимальности, при помощи которых проводят численные исследования. Построить оптимальное управление в виде обратной связи (решить задачу синтеза), не исключив производную угла, не удастся.

В настоящей работе при изучении колебаний двухзвенного маятника управляющим параметром считается, как и во второй из упомянутых выше задач, межзвенный угол. В отличие от уравнений движения качелей использование в качестве фазовых переменных кинетического момента и угла отклонения от вертикали верхнего звена двухзвенника позволяет исключить из его уравнений движения лишь вторую производную управляющего параметра. Исключить также и первую производную удастся введением вместо угла отклонения верхнего звена некоторой новой переменной – приведенного угла отклонения. После этого решается задача

синтеза оптимального управления как раскачиванием, так и торможением двухзвенника, причем без использования принципа максимума Понтрягина.

Изучаемая здесь задача представляет интерес как с точки зрения теоретической механики, так и для моделирования движений гимнаста на перекладине. Подобные движения изучались в ряде работ (см., например, статью [6] и библиографию к ней).

1. Уравнения движения. Рассмотрим плоский двухзвенный физический маятник, подвешенный в точке O при помощи идеального (без трения) цилиндрического шарнира (фиг. 1). Звенья, представляющие собой абсолютно твердые тела, соединяются между собой также при помощи цилиндрического шарнира в точке D . Оси шарниров горизонтальны и параллельны одна другой. Центр масс первого звена будем считать расположенным на отрезке OD . Обозначим через m_1^* , l_1^* , r_1^* , I_1^* соответственно массу первого (верхнего) звена, его длину OD , расстояние от точки O до его центра масс и его момент инерции относительно точки O . Пусть m_2^* , l_2^* , r_2^* , I_2^* – аналогичные величины, относящиеся ко второму звену. Угол отклонения первого звена (отрезка OD) от вертикали, отсчитываемый против хода часовой стрелки, обозначим через φ , буквой α обозначим угол отклонения второго звена (отрезка, соединяющего точку D с центром масс второго звена) от линии, продолжающей отрезок OD .

Будем изучать идеализированную модель управления, в которой управляющим параметром является межзвенный угол α , изменяющийся в заданных пределах

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max} \quad (\alpha_{\min}, \alpha_{\max} = \text{const}, \quad \alpha_{\min}, \alpha_{\max} \in (-\pi, \pi)) \quad (1.1)$$

Допустимым управлением будем считать кусочно-непрерывную функцию $\alpha(t)$, принадлежащую отрезку (1.1). Множество допустимых управлений обозначим через U .

Введем следующие безразмерные параметры двухзвенника, безразмерное время t и кинетический момент K (t^* и K^* – соответствующие размерные величины, g – ускорение свободного падения):

$$r_1 = \frac{r_1^*}{l_1^*}, \quad I_1 = \frac{I_1^*}{m_1^* l_1^{*2}}, \quad r_2 = \frac{r_2^*}{l_1^*}, \quad m_2 = \frac{m_2^*}{m_1^*}, \quad I_2 = \frac{I_2^*}{m_1^* l_1^{*2}}; \quad t = t^* \sqrt{\frac{g}{l_1^*}}, \quad K = \frac{K^* \sqrt{l_1^*}}{m_1^* l_1^{*2} \sqrt{g}}$$

Выражение для кинетического момента K (безразмерного) имеет следующий вид:

$$K = \xi(\alpha) \frac{d\varphi}{dt} + \eta(\alpha) \frac{d\alpha}{dt}; \quad \xi(\alpha) = I_1 + I_2 + m_2 + 2m_2 r_2 \cos \alpha, \quad \eta(\alpha) = I_2 + m_2 r_2 \cos \alpha \quad (1.2)$$

Выражение $\xi(\alpha)$ описывает момент инерции двухзвенника (безразмерный) относительно точки O , поэтому $\xi(\alpha) > 0$ при всех значениях угла α .

Уравнения движения системы можно записать в виде

$$dK/dt = \Phi(\varphi, \alpha), \quad \Phi(\varphi, \alpha) = -r_1 \sin \varphi - m_2 [\sin \varphi + r_2 \sin(\varphi + \alpha)] \quad (1.3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\zeta(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} + \frac{K}{\xi(\alpha)}, \quad \zeta(\alpha) = \frac{\eta(\alpha)}{\xi(\alpha)} \quad (1.4)$$

Уравнение (1.3) описывает изменение момента количества движения системы под влиянием момента сил гравитации. Уравнение (1.4) получено разрешением соотношения (1.2) относительно производной $d\varphi/dt$.

При использовании в качестве фазовых переменных системы углов φ , α и угловых скоростей $d\varphi/dt$, $d\alpha/dt$ в уравнения движения двузвенника входят старшие производные $d^2\varphi/dt^2$, $d^2\alpha/dt^2$. Рассмотрение в качестве одной из переменных кинетического момента K позволяет исключить эти старшие производные, но производная $d\alpha/dt$ в системе (1.3), (1.4) остается.

В модели (1.3), (1.4) не учтено ни трение в шарнире O , ни сопротивление движению маятника со стороны окружающей среды.

2. Новая переменная – приведенный угол. В уравнения (1.3), (1.4) наряду с углом α входит и его производная $d\alpha/dt$. Это затрудняет использование угла α в качестве управляющего параметра и решение задач синтеза оптимального управления, которые сформулированы ниже – в разд. 3.

Заметим, что

$$\frac{d\varphi}{dt} + \zeta(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(\varphi - F(\alpha))}{dt} \quad (2.1)$$

где

$$F(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} + A \operatorname{arctg} \left(B \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad (2.2)$$

Постоянные величины A и B определяются равенствами

$$A = \frac{I_1 - I_2 + m_2}{R}, \quad B = \frac{R}{I_1 + I_2 + m_2 + 2m_2 r_2}; \quad R = \sqrt{(I_1 + I_2 + m_2)^2 - 4m_2^2 r_2^2}$$

Для того чтобы избавиться от производной $d\alpha/dt$, введем в рассмотрение вместо угла φ приведенный угол p по формуле (см. равенство (2.1))

$$p = \varphi - F(\alpha) \quad (2.3)$$

Переменная (2.3) введена так, что уравнение (1.4) можно записать в виде

$$\frac{dp}{dt} = \frac{K}{\xi(\alpha)} \quad (2.4)$$

Преобразование переменных, аналогичное (2.3), рассматривалось ранее [7].

Итак, далее будем рассматривать уравнения (1.3), (2.4) относительно переменных K и p . При этом будем считать, что вместо угла φ в уравнении (1.3) фигурирует величина, вычисляемая в соответствии с выражением (2.3) по формуле

$$\varphi = p + F(\alpha) \quad (2.5)$$

Заметим, что при скачкообразном изменении межзвенного угла α кинетический момент K системы не меняется (см. уравнение (1.3)), так же как и приведенный угол p (см. уравнение (2.4)). При скачке угла α происходит скачок угла φ , который вычисляется при помощи соотношения (2.5) (см. также работу, цитируемую в сноске).

3. Постановка задачи. Пусть задано начальное состояние системы (1.3), (2.4)

$$p(0) < 0, \quad K(0) = 0 \quad (3.1)$$

Если, например, $\alpha(0) = 0$ (оба звена лежат на одной прямой), то при начальном условии (3.1), как следует из равенства (2.5), угол $\varphi(0) < 0$.

Поставим задачу об оптимальном раскачивании двухзвенного маятника: требуется найти закон изменения управляющего параметра α на отрезке (1.1), при котором достигается $\max [p(T)]$, где T – первый после начала движения (при $t = 0$) момент времени, когда $K(T) = 0$. Эту формулировку задачи запишем так:

$$\max [p(T)], \quad K(T) = 0, \quad T > 0 \quad (3.2)$$

Здесь и всюду далее операции $\max$ (максимизации) и $\min$ (минимизации) осуществляются по всем значениям α в заданных пределах (1.1).

Поставленная задача представляет собой задачу максимизации приведенного угла p на "полуцикле" раскачивания маятника.

Задачу об оптимальном торможении маятника на полуцикле при условии (3.1) поставим так:

$$\min [p(T)], \quad K(T) = 0, \quad T > 0 \quad (3.3)$$

При постановке задачи (3.2) (задачи (3.3)) начальное состояние (3.1) и отрезок (1.1) допустимых значений управления считаются такими, что момент времени $T > 0$, при котором кинетический момент $K(T)$ обращается в нуль и достигается максимум (минимум) угла p , существует.

Рассмотрим функцию $F(\alpha)$ (2.2) и обозначим через α^* ее максимальное на отрезке (1.1) значение, а через α_* – минимальное:

$$\alpha^* = \arg \max F(\alpha), \quad \alpha_* = \arg \min F(\alpha) \quad (3.4)$$

Экстремум функции $F(\alpha)$ достигается в одной из граничных точек отрезка (1.1) или внутри него.

Допустим, что управление $\alpha^0(t)$, решающее задачу (3.2), найдено. Положим в конце интервала управления $\alpha^0(t)$ – в момент времени $t = T$ – угол α равным значению α^* (3.4), которое максимизирует функцию $F(\alpha)$. Угол p при мгновенном изменении угла α останется без изменения, а угол φ скачком изменится и примет значение, определяемое формулой (2.5). Можно убедиться, что описанное управление

$$\alpha = \alpha^0(t) \text{ при } 0 \leq t < T, \quad \alpha = \alpha^* \text{ при } t = T \quad (3.5)$$

максимизирует угол $\varphi(T)$, т.е. максимально раскачивает первое (верхнее) звено двухзвенника на полуцикле.

Пусть $\alpha_0(t)$ – управление, решающее задачу (3.3), тогда управление

$$\alpha = \alpha_0(t) \text{ при } 0 \leq t < T, \quad \alpha = \alpha_* \text{ при } t = T \quad (3.6)$$

минимизирует угол $\varphi(T)$, т.е. наилучшим образом тормозит первое (верхнее) звено двухзвенника на полуцикле.

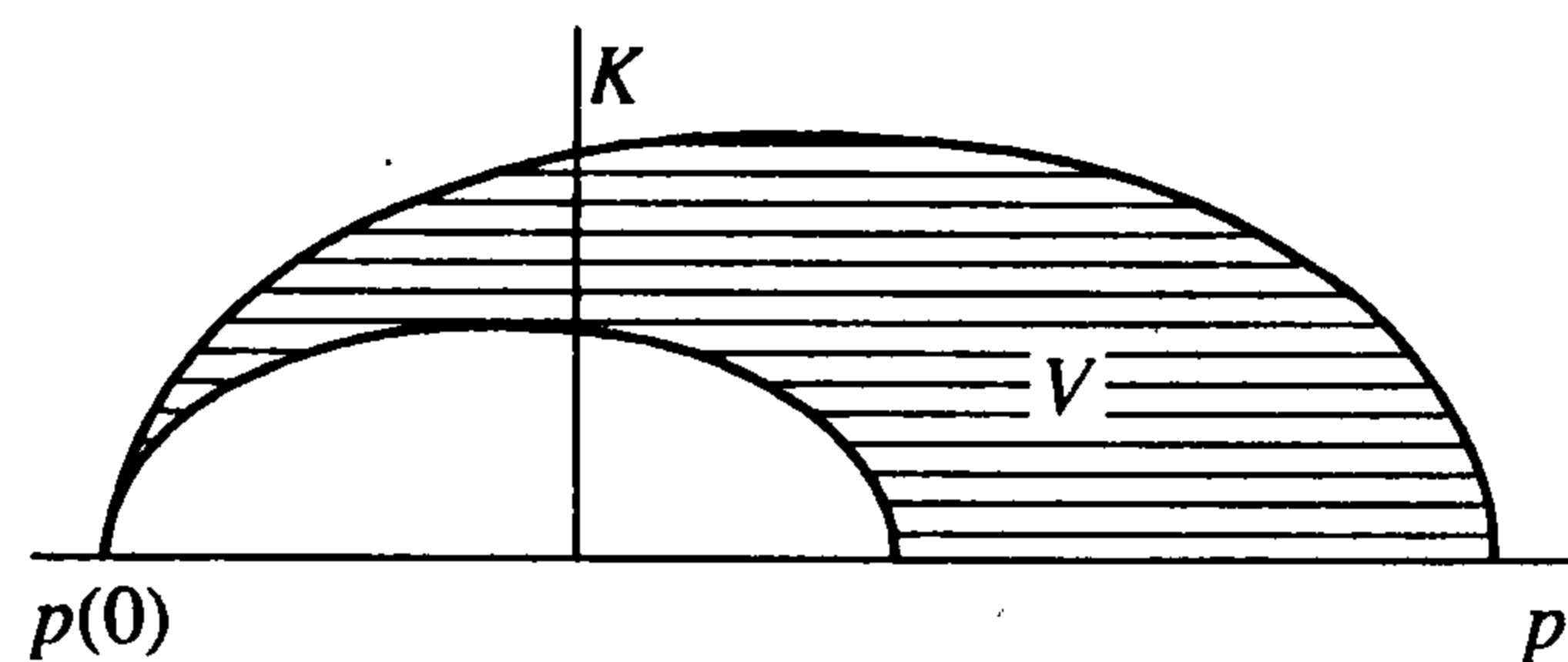
Функции (3.5), (3.6), вообще говоря, претерпевают разрыв в точке $t = T$. Если же $\alpha^* = \alpha^0(T)$ ($\alpha_* = \alpha_0(T)$), то функция (3.5) (функция (3.6)) в этой точке остается непрерывной.

Опишем теперь способ построения оптимального управления $\alpha^0(t)$, решающего задачу (3.2), и управления $\alpha_0(t)$, решающего задачу (3.3).

4. Способ решения задачи. Величина $\xi(\alpha)$ в правой части уравнения (2.4) положительна при любом значении межзвенного угла α . Поэтому направление изменения угла p (возрастание или убывание) зависит только от знака кинетического момента K . Направление изменения кинетического момента K в свою очередь зависит от знака момента гравитационных сил, описанного (в безразмерном виде) в правой части уравнения (1.3).

Пусть начальное состояние (3.1) таково, что при всех значениях $\alpha \in U$ момент гравитационных сил при $t = 0$ положителен. Тогда при любом управлении $\alpha(t) \in U$ величина K в начале движения становится положительной. Будем считать, что кинети-

ческий момент K остается положительным до некоторого момента времени θ , когда он снова обращается в нуль. Каждой траектории при управлении $\alpha(t) \in U$ отвечает свой момент θ . Угол p , как следует из уравнения (2.4), с ростом времени t от 0 до θ растет строго монотонно.



Фиг. 2

Рассмотрим на плоскости (p, K) множество V получающихся при всех $\alpha(t) \in U$ фазовых траекторий системы (1.3), (2.4), исходящих при $t = 0$ из начальной точки (3.1) и заканчивающихся в момент $t = \theta$ (свой на каждой траектории) на оси $K = 0$. Все множество V – интегральная воронка [8, 9] – располагается по условию в верхней полуплоскости ($K > 0$) фазовой плоскости (p, K) (фиг. 2). Производная $K' = dK/dp$ является непрерывной функцией угла α . Поэтому она достигает своего максимального и минимального на отрезке (1.1) значений при любых p и K . Очевидно, что на каждой фазовой траектории системы (1.3), (2.4)

$$\min K' \leq K' \leq \max K'$$

Допустим, что решение системы (1.3), (2.4), в каждой точке которого имеет место равенство

$$K' = \max K' \quad (4.1)$$

существует и отвечающее ему управление есть $\alpha(t) \in U$. Тогда соответствующая фазовая траектория принадлежит множеству V , и никакая другая траектория из V не может пересечь ее снизу вверх. Следовательно, траектория, на которой имеет место равенство (4.1), представляет собой верхнюю границу интегральной воронки V . Можно убедиться, что при движении по этой верхней граничной траектории достигается максимум величины p в конечный момент времени (когда кинетический момент K обращается в нуль). Следовательно, эта траектория является оптимальной для задачи (3.2).

Нижняя граница интегральной воронки V представляет собой траекторию (если таковая существует) системы (1.3), (2.4), в каждой точке которой производная K' принимает минимальное по переменной α значение

$$K' = \min K' \quad (4.2)$$

При движении по этой траектории достигается минимум угла p в момент, когда кинетический момент K обращается в нуль, и она является оптимальной для задачи (3.3).

5. Синтез оптимального управления. Из рассмотрения выражения (4.1) и уравнений (1.3), (2.4) заключаем, что оптимальное управление α^0 , решающее задачу (3.2), определяется формулой

$$\alpha^0 = \arg \max K' = \arg \max [\Phi(\varphi, \alpha)\xi(\alpha)] \quad (5.1)$$

Оптимальное управление α_0 , решающее задачу (3.3), определяется выражением (см. формулу (4.2))

$$\alpha_0 = \arg \min K' = \arg \min [\Phi(\varphi, \alpha)\xi(\alpha)] \quad (5.2)$$

Прежде чем искать экстремумы, в формулы (5.1), (5.2) вместо угла φ нужно подставить его выражение (2.5) через p и α . Формулы (5.1), (5.2) решают задачу синтеза оптимального управления. Они определяют величины α^0 и α_0 в виде функций от приведенного угла p

$$\alpha^0 = \alpha^0(p), \quad \alpha_0 = \alpha_0(p) \quad (5.3)$$

От кинетического момента K величины α^0 и α_0 , очевидно, не зависят.

В то время как в задаче оптимального управления качелями экстремумы соответствующей производной найдены аналитически [5], в настоящей работе их удастся находить лишь численно.

Отметим несколько свойств управления $\alpha^0 = \alpha^0(p)$ (5.1) и соответствующей ему траектории.

1°. Если траектория системы (1.3), (2.4) при управлении (5.1) попадает на ось $K = 0$ при $T > 0$, то она решает, очевидно, задачу (3.2) и в том случае, когда не вся интегральная воронка принадлежит верхней полуплоскости фазовой плоскости.

2°. Пусть $(\tilde{p}, \tilde{K})$ – произвольная точка, принадлежащая траектории системы (1.3), (2.4), (5.1). Тогда в точке пересечения любой другой траектории с прямой $p = \tilde{p}$ значение $K \leq \tilde{K}$.

3°. Пусть при некотором начальном состоянии (3.1) на траектории системы (1.3), (2.4), (5.1) кинетический момент K нигде не обращается в нуль (маятник, не останавливаясь, все время вращается в одну сторону). Тогда значение K , достигаемое на этой траектории при каждом заданном значении p , является максимально возможным.

Рассмотрим случай, когда в начальном состоянии $p(0) > 0$, $K(0) = 0$. Если при этих условиях интегральная воронка располагается целиком в нижней полуплоскости фазовой плоскости, то при помощи таких же рассуждений, как в разд. 4, можно показать, что и в этом случае оптимальное управление, решающее задачу раскачивания, удовлетворяет условию (4.1), а решающее задачу торможения, – условию (4.2). Однако, поскольку траектории лежат теперь в полуплоскости $K < 0$, условию (4.1) отвечает управление (5.2), а условию (4.2) – управление (5.1). Другими словами, управления (5.3) меняются местами: управление $\alpha_0 = \alpha_0(p)$ становится раскачивающим, а управление $\alpha^0 = \alpha^0(p)$ – тормозящим.

Таким образом, переключаясь с одного управления (5.3) на другое, можно раскачивать или тормозить двузвенник при его колебаниях как справа налево, так и слева направо. Рассмотрим некоторое количество l полуциклов, на каждом из которых используется оптимальное "раскачивающее" управление. Допустим, что на каждом из них интегральная воронка располагается целиком в одной соответствующей полуплоскости и $\alpha_{\min} \leq 0 \leq \alpha_{\max}$. Тогда можно показать, что величина $|p|$ принимает максимально возможное после l полуциклов значение. Для того чтобы максимизировать после l полуциклов величину $|\varphi|$, нужно в последний момент времени – в конце последнего полуцикла – положить $\alpha = \alpha^*$ или $\alpha = \alpha_*$. Полагать $\alpha = \alpha^*$ или $\alpha = \alpha_*$ в конце каждого полуцикла смысла не имеет. В процессе раскачиваний маятник может, однако, перейти в непрерывное вращение в одну сторону, подобное вращению гимнаста, выполняющего упражнение "солнце".

6. Численные исследования. Описываемые здесь численные исследования проводились при следующих "антропоморфных" значениях параметров [10, 11]:

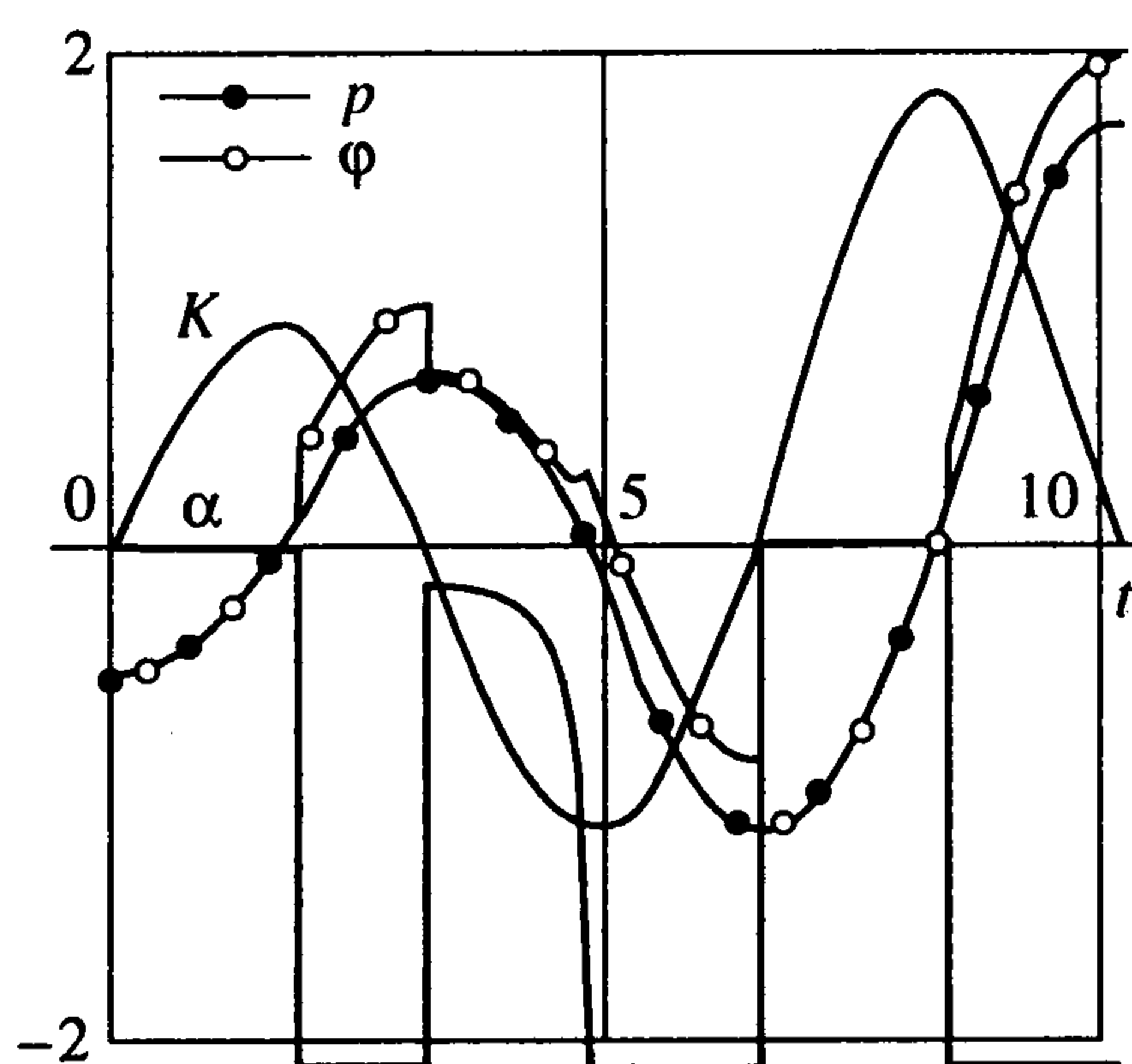
$$\begin{aligned} m_1^* &= 38,4 \text{ кг}, \quad l_1^* = 1,19 \text{ м}, \quad r_1^* = 0,77 \text{ м}, \quad I_1^* = 28,72 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \\ m_2^* &= 26 \text{ кг}, \quad l_2^* = 1 \text{ м}, \quad r_2^* = 0,415 \text{ м}, \quad I_2^* = 6,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Эти параметры вычислены в предположении, что первым (верхним) звеном является абсолютно твердое тело, состоящее из массивного корпуса человека (гимнаста) и распрямленных рук. Нижним звеном считаются ноги.

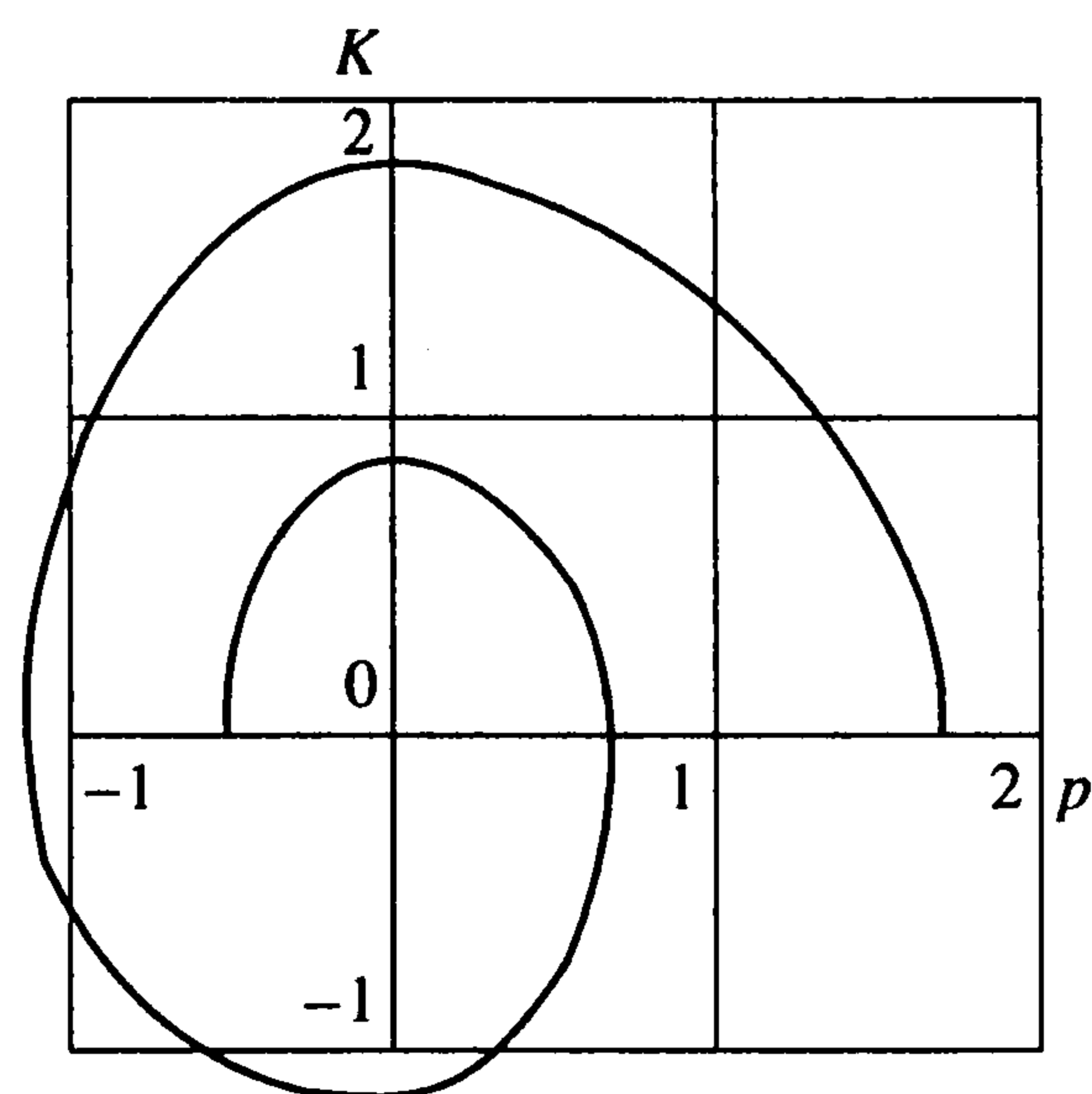
Положим $\alpha_{\min} = -2\pi/3$, $\alpha_{\max} = 0$. При таких предельных значениях управляющего параметра α моделируется ситуация, когда гимнаст не может выгибаться назад и не может "сложиться" полностью – до полного складывания остается 60° . Таким образом, при численных исследованиях считаем, что

$$-2\pi/3 \leq \alpha \leq 0 \quad (6.2)$$

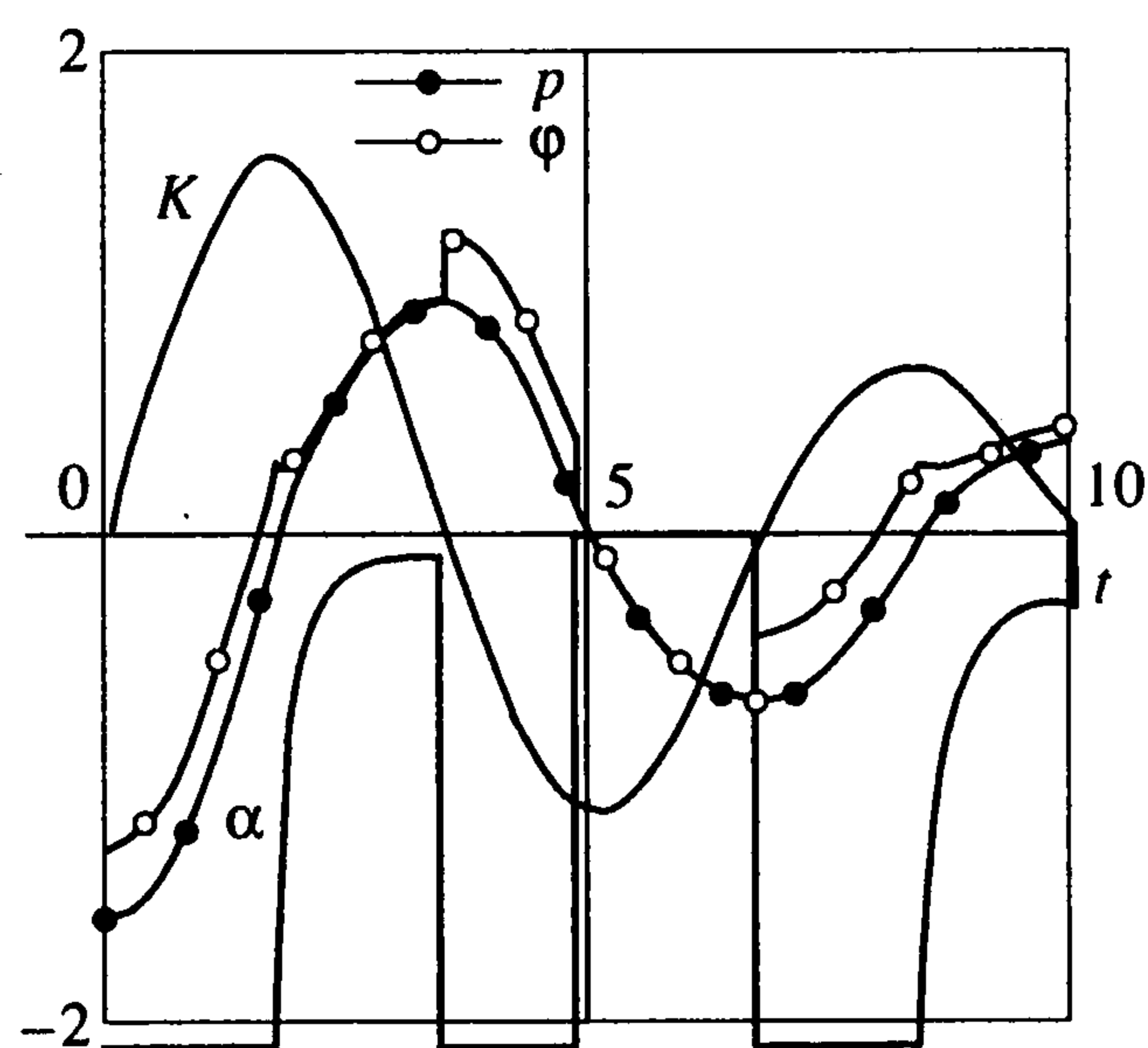
Вычисления показывают, что при значениях параметров (6.1) функция (2.2) дости-



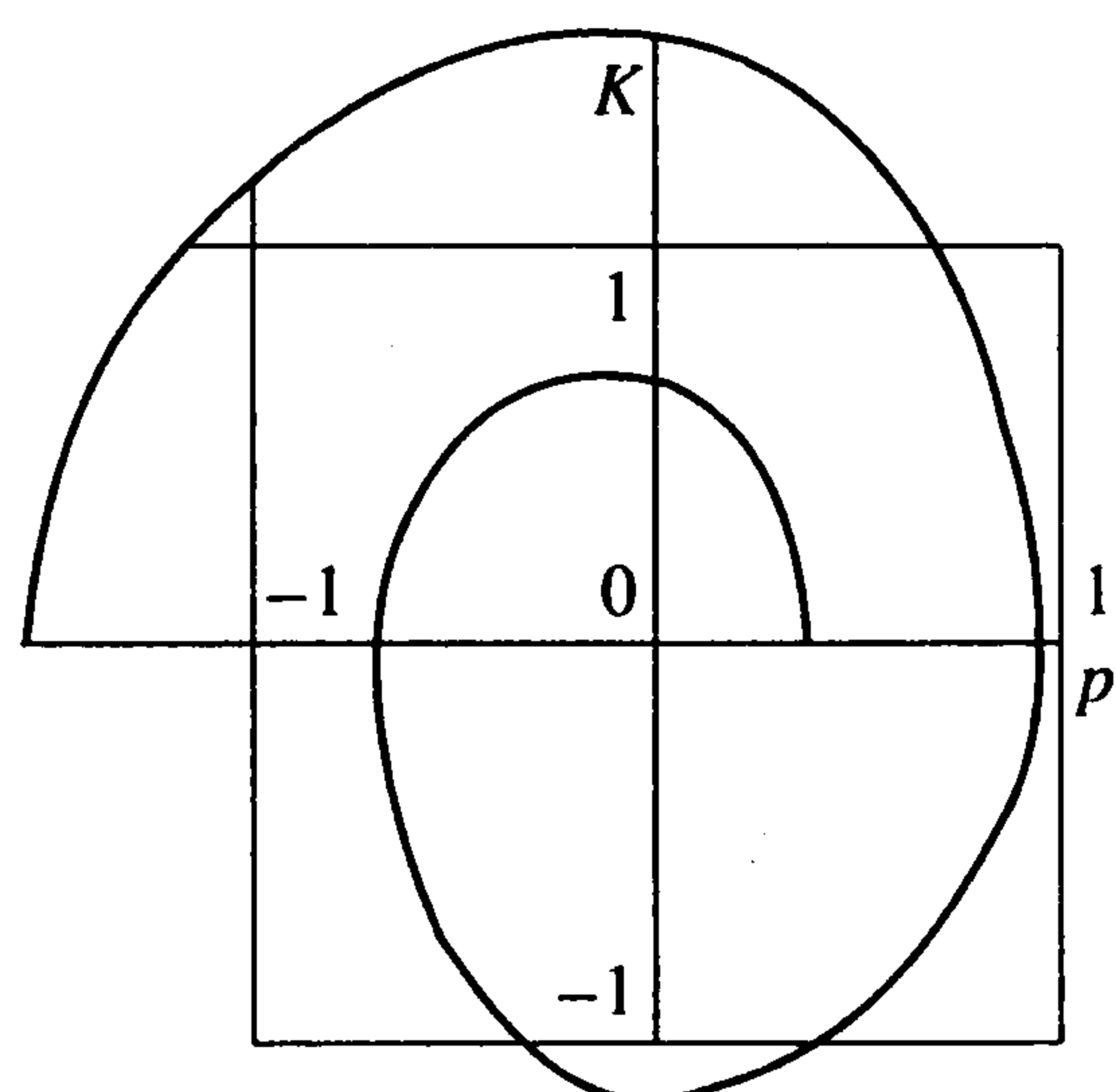
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

гает максимума и минимума на концах отрезка (6.2):

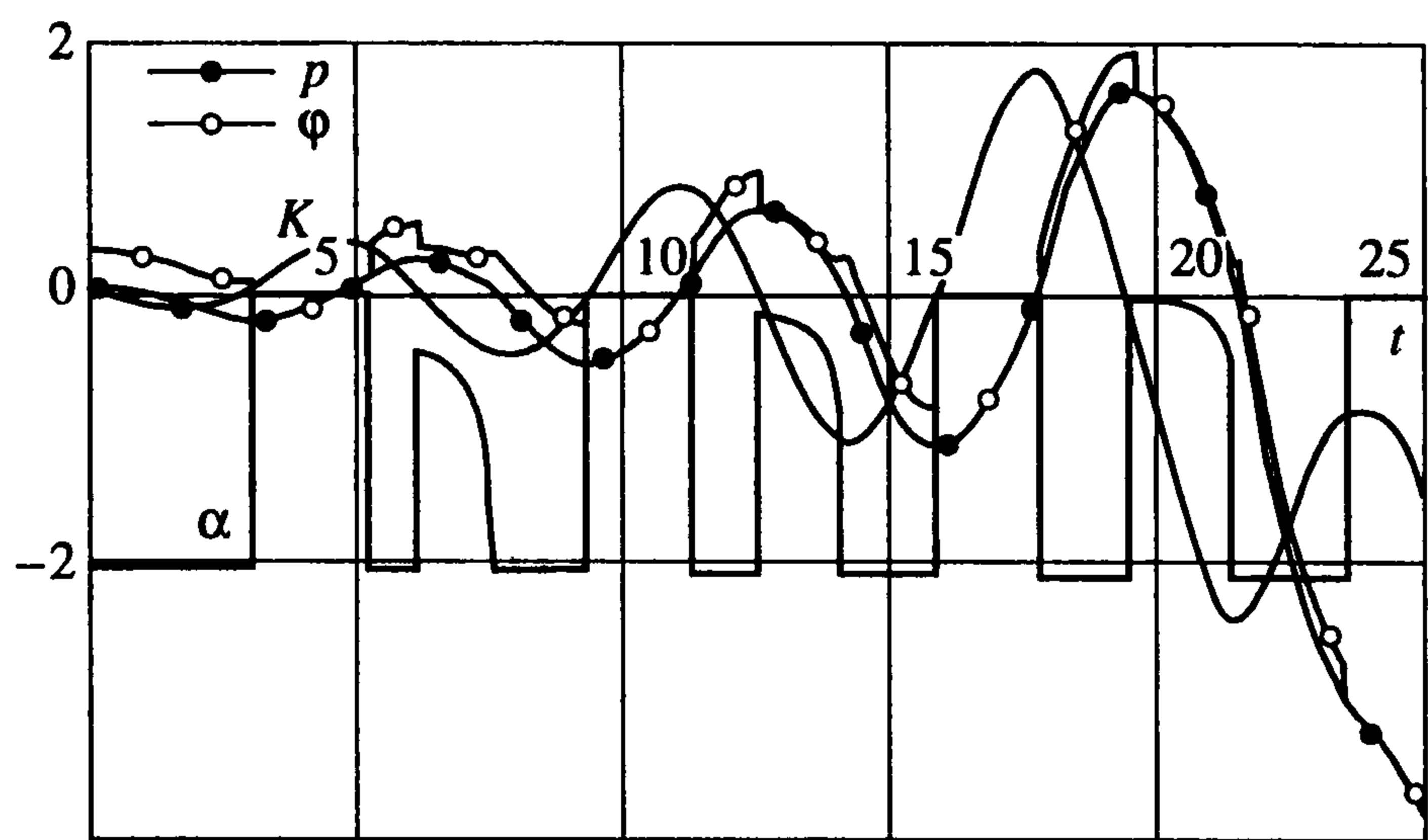
$$\alpha^* = \alpha_{\min} = -2\pi/3, \quad \alpha_* = \alpha_{\max} = 0$$

Составлены программы для решения уравнений (1.3), (2.4) с управлением (5.1) и (5.2). Графики, полученные при помощи этих программ при значениях (6.1) параметров, показаны на фиг. 3–8.

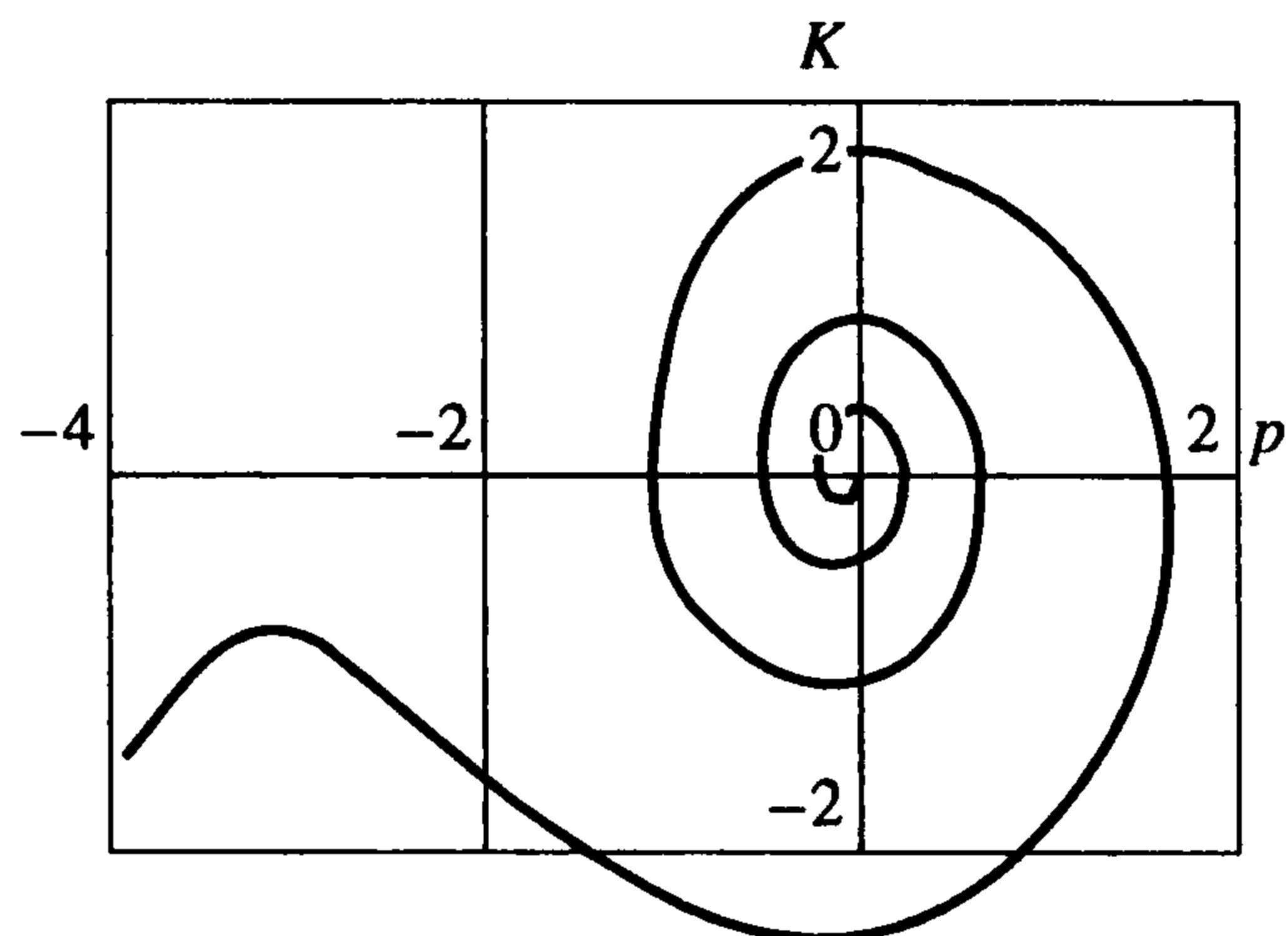
На фиг. 3 показано оптимальное управление $\alpha(t)$, решающее задачу оптимального раскачивания двузвенника за три полуцикла, и соответствующие ему функции $p(t)$, $K(t)$, $\phi(t)$. Показанное решение построено при начальных условиях

$$p(0) = -\pi/6, \quad K(0) = 0$$

(так как $\alpha(+0) = 0$, то и $\phi(+0) = -\pi/6$). Управление $\alpha = \alpha^0(t)$, когда $K > 0$, и $\alpha = \alpha_0(t)$, когда $K < 0$. На первом и третьем полуциклах (при движениях маятника слева направо) оптимальное управление $\alpha = \alpha^0(t)$, оно принимает только граничные значения и претерпевает разрывы примерно тогда, когда кинетический момент достигает локального максимума или минимума. Управление $\alpha(t)$ претерпевает разрыв, конечно, и при переходе кинетического момента через нуль. На втором полуцикле (при движении маятника справа налево) оптимальное управление $\alpha = \alpha_0(t)$, оно не всегда принимает свои граничные значения и изменяется непрерывно. Различия в характере управления при движениях маятника в одну сторону и в другую связаны, в частности, с тем, что ограничения, наложенные на управление, несимметричны. На участках движения, где $\alpha(t) = 0$, имеет место равенство $p(t) = \phi(t)$, что согласуется с равенст-



Фиг. 7



Фиг. 8

вом (2.5). На других участках угол p отличается от угла φ , но "близок" к нему. Угол φ совершает скачки в моменты разрыва управления $\alpha(t)$. Время окончания третьего полуцикла $t = \theta = 10,21$ (время безразмерное). Оптимальное управление в конце третьего полуцикла $\alpha(\theta) = \alpha^* = -2\pi/3$, поэтому угол $\varphi(\theta) = 1,975$ является максимально возможным после трех полуциклов ($p(\theta) = 1,698$). На фиг. 4 траектория оптимального раскачивания маятника в течение трех полуциклов изображена на фазовой плоскости (p, K) .

На фиг. 5 показано оптимальное управление $\alpha(t)$, решающее задачу оптимального торможения двузвенника за три полуцикла, и соответствующие ему функции $p(t)$, $K(t)$, $\varphi(t)$. Решение получено при начальных условиях

$$p(0) = -\pi/2, \quad K(0) = 0$$

и ограничениях (6.2). Оптимальное управление $\alpha = \alpha_0(t)$, когда $K > 0$, и $\alpha = \alpha^0(t)$, когда $K < 0$. Как следует из рассмотрения фиг. 5,

$$\alpha(+0) = \alpha^* = -2\pi/3, \quad \varphi(+0) = p(0) + F(\alpha^*) = -\pi/2 + 0,2767 = -1,294$$

Управление $\alpha = \alpha_0(t)$ на первом и третьем полуциклах (при движениях маятника слева направо), на некоторых промежутках времени оно изменяется непрерывно, не всегда принимая свои граничные значения. На втором полуцикле (при движении маятника справа налево) оптимальное управление $\alpha = \alpha^0(t)$, оно принимает только граничные значения и претерпевает разрывы примерно тогда, когда кинетический момент достигает локального максимума или минимума. Управление $\alpha(t)$ претерпевает разрыв и при обращении кинетического момента в нуль. В то время, когда $\alpha(t) = 0$, имеет место равенство $p(t) = \varphi(t)$, в другое время углы p и φ не равны друг другу, но "близки".

Время окончания третьего полуцикла $t = \theta = 10,06$. Управление в конце третьего полуцикла $\alpha(\theta - 0) = -0,2827$ и не равно α_* , поскольку $\alpha_* = 0$. При этом угол $\varphi(\theta - 0) = 0,4315$ не является минимально возможным. Если же в момент времени $t = \theta$ управляющий угол α изменяется скачком до значения $\alpha = \alpha_* = 0$, то угол φ скачком уменьшается. При этом он принимает минимально возможное после трех полуциклов значение $\varphi(\theta) = p(\theta) = 0,3763$. На фиг. 5 видны эти скачки по углам α и φ в последний момент времени $t = \theta = 10,06$. На фиг. 6 изображена траектория оптимального торможения на фазовой плоскости (p, K) .

На фиг. 7 показаны функции $\alpha(t)$, $p(t)$, $K(t)$, $\varphi(t)$, отвечающие процессу раскачивания маятника при начальных условиях

$$p(0) = 0, \quad K(0) = 0$$

Если $\alpha(0) = 0$, то и $\varphi(0) = 0$, при этом оба звена маятника в начальный момент времени опущены вертикально вниз и покоятся. В момент $t = +0$ угол α скачком принимает значение $\alpha^* = -2\pi/3$, одновременно с ним в соответствии с формулой (2.5) скачкообразно меняется угол φ , принимая свое максимальное значение 0,2767 (см. фиг. 7). Затем двухзвенник раскачивается, совершая несколько колебаний в одну и другую сторону при оптимальном управлении $\alpha = \alpha^0(t)$, если $K > 0$ и $\alpha = \alpha_0(t)$, если $K < 0$. После нескольких таких раскачиваний маятник переходит в безостановочное вращение подобно гимнасту, выполняющему упражнение "солнце". При этом вращении $K < 0$ и $\alpha = \alpha_0(t)$. На фиг. 8 описанное выше движение изображено на фазовой плоскости (p, K) .

7. Перемещение двухзвенника из нижнего в верхнее положение. Допустим, что значение $\alpha = 0$ лежит внутри интервала (1.1). При этом $\alpha_{\min} < 0$, $\alpha_{\max} > 0$. Используя оптимальное управление для раскачиваний двухзвенного маятника, построим управление, с помощью которого он переводится из нижнего устойчивого положения равновесия

$$\varphi = 0, \quad \alpha = 0 \quad (p = 0), \quad K = 0 \quad (7.1)$$

когда оба звена опущены вертикально вниз, в верхнее неустойчивое

$$\varphi = \pm\pi, \quad \alpha = 0 \quad (p = \pm\pi), \quad K = 0 \quad (7.2)$$

когда оба звена подняты вертикально вверх.

Осуществить перевод маятника из положения (7.1) в положение (7.2) за конечное время можно, например, следующим образом. Обозначим через W потенциальную энергию двухзвенника при $p = -\pi$, $\alpha = \alpha_{\min}$ ($\varphi = -\pi + F(\alpha_{\min})$), $K = 0$. Начиная из состояния (7.1), будем раскачивать маятник, как это показано на фиг. 7 и 8, используя поочередно управление $\alpha_0(t)$ и $\alpha^0(t)$. В процессе раскачиваний в каждый текущий момент времени t вычисляем, какова была бы полная энергия – кинетическая плюс потенциальная – двухзвенника, если положить в этот момент времени t управляющий угол α равным $\alpha_{\min}$ и оставить его таким. Маятник в "замороженном" при $\alpha = \alpha_{\min}$ состоянии вращается под влиянием только силы тяжести, как однозвенник. Полная энергия этого однозвенника, которая сохраняется при движении, складывается из потенциальной и кинетической. Последняя пропорциональна квадрату кинетического момента K однозвенника. Поскольку при скачкообразном изменении в момент времени t угла α кинетический момент K системы сохраняется, то полную энергию этого однозвенника вычислить легко. Численные исследования показывают, что эта вычисляемая полная энергия однозвенника с течением времени t неограниченно возрастает, что естественно, поскольку какие-либо силы демпфирования в системе отсутствуют. Как только эта вычисляемая энергия становится равной W , полагаем $\alpha = \alpha_{\min}$. Пусть затем "замороженный" при $\alpha = \alpha_{\min}$ маятник (однозвенник) вращается до тех пор, пока его кинетический момент K не обратится в нуль или, точнее говоря, пока приведенный угол p не станет равным $-\pi$. Это равенство достигается за конечное время. Меняя в этот момент времени скачком угол α со значения $\alpha_{\min}$ на нуль, получаем в

соответствии с формулой (2.5) $\varphi = -\pi$. Кинетический момент K при этом скачке остается равным нулю. Таким образом, маятник приводится в желаемое верхнее неустойчивое положение равновесия за конечное время. Описанный выше алгоритм управления перемещением двузвенника из нижнего положения равновесия в верхнее реализован программно.

Подобным же образом двузвенник может быть приведен в верхнее положение равновесия с $\varphi = +\pi$ при использовании вместо $\alpha = \alpha_{\min}$ управления $\alpha = \alpha_{\max}$.

Вопрос о стабилизации верхнего неустойчивого положения равновесия может быть решен, например, при помощи линейной обратной связи вида $\alpha = c_1 p + c_2 K$ с постоянными коэффициентами c_1, c_2 .

8. Заключение. Используя предлагаемый в настоящей работе подход к изучению задачи оптимального управления колебаниями двузвенного маятника, удастся решить задачу синтеза оптимального управления. При численном исследовании того или иного движения маятника нет необходимости решать краевую задачу, которая возникает, например, при использовании принципа максимума Понтрягина. При использовании формул (5.1) и (5.2), описывающих обратную связь, нужно решать лишь задачу Коши, в то время как для решения краевой задачи нужно организовать итерационный процесс. Поэтому формулы (5.1), (5.2) позволяют легко строить численное решение при любых начальных условиях и значениях параметров маятника. Программы, составленные для решения уравнений (1.3), (2.4) с управлением (5.1) и (5.2), позволяют осуществлять анимацию.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01-01224).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Magnus K. Schwingungen. Stuttgart: Teubner, 1976. = Магнус К. Колебания. М.: Мир, 1982. 303 с.
3. Чечурин С.Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 219 с.
4. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
5. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Оптимальное управление раскачиванием и торможением качелей // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 92–101.
6. Nakawaki D., Joo S., Miyazaki F. Dynamic modeling approach to gymnastic coaching // Proc. 1998 IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation. Leuven, Belgium, 1998. P. 1069–1076.
7. Stojic R., Chevallereau C. On walking with point foot-ground contacts // Proc. 2nd Intern. Conf. on Climbing and Waling Robots (CLAWAR 99) / Eds G.S. Virk et al., Portsmouth: Prof. Engng Publ., 1999. P. 463–471.
8. Султанов И.А. Исследование процессов управления, описываемых уравнениями с недоопределенными функциональными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1980. № 10. С. 30–41.
9. Бутковский А.Г. Фазовые портреты управляемых динамических систем. М.: Наука, 1985. 136 с.
10. Воронов А.В., Лавровский Э.К. Определение масс-инерционных характеристик нижней конечности человека // Физиология человека. 1998. Т. 24. № 2. С. 91–101.
11. Зациорский В.М., Аруин А.С., Селуянов В.Н. Биомеханика двигательного аппарата человека. М.: Физкультура и спорт, 1981. 143 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.IX.2000