

УДК 531.36:62–50

© 2001 г. Ю.Ф. Голубев

МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С СЕРВОСВЯЗЯМИ

Исследуются свойства механических систем, управляемых посредством наложения как голономных, так и неголономных, в общем случае нелинейных по скоростям сервосвязей. Анализируется понятие идеальных сервосвязей. Отмечаются особенности применения локальных вариационных принципов механики и следующих из них уравнений движения для систем с идеальными и неидеальными сервосвязями. Решена задача о движении точки с постоянным модулем скорости в поле силы тяжести при условии, что связь, обеспечивающая постоянство модуля скорости, реализуется как идеальным, так и неидеальным сервоуправлениями.

Понятие сервосвязей, по-видимому, впервые было введено в 1922 г. в диссертации Анри Бегена [1] для систем, управляемых сервоприводами. Будем считать, что сервосвязи, как и традиционные механические ограничения, задаются в виде соотношений между координатами и скоростями системы и служат математической формулировкой требований, предъявляемых как цель управления. Предполагается, что управление системой осуществляется сервомеханизмами, задача которых состоит в том, чтобы сервосвязи были реализованы. В отличие от традиционных пассивных связей, точное выполнение которых подразумевается в любой момент времени, сервосвязи могут иметь любую структуру соотношений между координатами и скоростями системы и не обязаны точно удовлетворяться. Достаточно лишь, чтобы управление сервоприводами реализовывало устойчивый переходный процесс, при котором сервосвязь была притягивающим множеством для фазовых траекторий системы. Такого эффекта можно добиться, решив соответствующую задачу синтеза управления рассогласованием сервосвязей.

Уравнения сервосвязей после решения указанной задачи синтеза становятся такими же, как и традиционные уравнения связей в механике, с тем отличием, что они могут выражаться произвольными зависимостями от координат и скоростей. Другое отличие состоит в том, что усилия, необходимые для реализации сервосвязей, должно обеспечивать специально построенное управление сервоприводами. С учетом сказанного задача исследования движения систем с сервосвязями приобретает черты, характерные для задач аналитической механики. Соответствующий арсенал методов нуждается лишь в некоторых уточнениях.

Нелинейные по скоростям дифференциальные связи изучались и ранее [2]. Вопрос о реализации такого рода связей [3] с помощью какого-либо пассивного механического устройства пока не имеет положительного ответа. В данной работе предполагаем наличие средств активного управления, реализующих ограничения, заданные в виде произвольной функции состояния системы. Механическую систему традиционно будем рассматривать в виде множества материальных точек, а под реакциями сервосвязей будем понимать дополнительные силы, прилагаемые к материальным точкам системы так, чтобы сервосвязи были реализованы.

Локальные принципы аналитической механики строятся на понятии идеальных связей, которое в свою очередь использует определение виртуального перемещения [4]. Было предложено [3] обобщение понятия виртуального перемещения на случай нелинейных дифференциальных связей, заданных в лагранжевых координатах, основанное на требовании непротиворечивости принципа Даламбера–Лагранжа и принципа Гаусса. Был представлен [5]¹

¹ См. также: Голубев Ю.Ф. Локальные вариационные принципы механики для систем с дифференциальными нелинейными связями: Препринт № 54. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша, 1999.

анализ структуры множества реакций нелинейных дифференциальных связей и обобщено понятие виртуальных перемещений для нелинейных связей, зависящих от радиус-векторов и скоростей отдельных точек системы. Подтверждена совместимость обобщенного понятия виртуальных перемещений с локальными вариационными принципами механики. В предлагаемой работе указанные разделы теории развиваются для систем с сервосвязями.

1. Переходный процесс. Ограничения на движение управляемой механической системы можно задавать посредством связей, понимаемых как соотношения либо между координатами, либо между координатами и скоростями точек системы, заданные в виде равенств или неравенств. В данной работе рассмотрим случай, когда ограничения заданы с помощью равенств. Понятно, что эти ограничения в какой-то момент времени (например, в начальный момент) могут не выполняться, и требуется так построить управление сервоприводами, чтобы вывести систему на требуемые ограничения и обеспечивать их выполнение в процессе дальнейшего движения. Предположим, что механическая система состоит из N материальных точек в пространстве E^3 , движения которых стеснены как геометрическими, так и дифференциальными двусторонними связями. Всякая геометрическая связь

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$$

где $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ – радиус-векторы точек, t – время, приводится к дифференциальной связи вида

$$\frac{df}{dt} = \sum_{v=1}^N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot \mathbf{v}_v + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

где обозначено $\dot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{v}_v$. Пусть эта операция выполнена над всеми геометрическими связями, так что полная совокупность традиционных механических и сервосвязей учитывается следующей системой независимых уравнений:

$$\Phi_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = 0, j = 1, \dots, m$$

Воздействие как со стороны сервоприводов, так и механических связей на v -ю материальную точку системы будем выражать реакцией связей $\mathbf{R}_v$.

Задача восстановления нарушенных связей может быть сформулирована как задача построения метода регулирования, при котором в силу уравнений движения реализуются зависимости²

$$\Phi_j = \tilde{\Phi}_j(t), \quad f_j = \tilde{f}_j(t), \quad j = 1, \dots, m$$

обладающие следующими свойствами.

1°. Если в некоторый момент времени t_0 оказалось $\Phi_j(t_0) = 0$, а в случае геометрической связи еще и $f_j(t_0) = 0$, то при $t > t_0$ должно быть $\tilde{\Phi}_j(t) \equiv 0$, $\tilde{f}_j(t) \equiv 0$, что аналогично действию обычных механических связей.

2°. В случае нарушения сервосвязей осуществляется либо достаточно быстрое асимптотическое устранение рассогласования с заданными связями, либо устранение рассогласования на конечном, достаточно малом интервале времени переходного процесса (кусочно-терминальное регулирование).

В частности, в соответствии с принципом работы сервомеханизмов можно потребовать, чтобы производные связей по времени в силу уравнений движения подчинялись следующим уравнениям:

$$\frac{d\Phi_j}{dt} = \Upsilon_j = \begin{cases} -k_j \Phi_j - \omega_j^2 f_j, & \text{если } \Phi_j = df_j / dt \\ -k_j \Phi_j, & \text{если } \nexists f_j, \quad j = 1, \dots, m \end{cases}$$

² Голубев Ю.Ф. Динамика систем с сервосвязями: Препринт № 19. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша, 2000.

где $k_j > 0$, ω_j^2 – постоянные коэффициенты усиления, определяющие скорость и качество переходного процесса, f_j – левая часть уравнения геометрической связи в том случае, если $\Phi_j = df_j/dt$. Указанный способ построения переходного процесса наиболее часто используется в приложениях [6].

Другой вариант переходного процесса возникает, если потребовать, чтобы он происходил за минимальное время. Укажем сначала синтез оптимального управления для случая геометрической servosвязи

$$y_1 = f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t), \quad y_2 = \sum_{v=1}^N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot \mathbf{v}_v + \frac{\partial f}{\partial t}$$

На плоскости (y_1, y_2) область отрицательных значений Υ расположена выше линии переключения [7]:

$$\tilde{y}_1 = -|y_2| y_2 / 2, \quad -\infty < y_2 < +\infty$$

а область положительных значений – ниже этой линии. Рецепт оптимального управления прост. Пусть точка, отражающая текущее состояние системы, имеет координаты (y_1, y_2) . Из уравнения линии переключения можно найти соответствующее значение $\tilde{y}_1$. Управление в точке (y_1, y_2) имеет вид

$$\Upsilon = \bar{\Upsilon} \cdot \begin{cases} +1 & y_1 < \tilde{y}_1(y_2) \\ -\text{sign } y_2, & y_1 = \tilde{y}_1(y_2) \\ -1, & y_1 > \tilde{y}_1(y_2) \end{cases}$$

где $\bar{\Upsilon}$ – максимально допустимое значение функции Υ . Приведенная формула определяет оптимальное управление для всей фазовой плоскости.

Если задана дифференциальная servosвязь, то тогда

$$y = \Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t)$$

и решение задачи быстродействия дается законом

$$\Upsilon = \bar{\Upsilon} \cdot \begin{cases} -\text{sign } y, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Действительно, управление, принимающее предельное по абсолютной величине значение со знаком, противоположным знаку y , обеспечивает максимально возможный темп убывания функции $y(t)$.

Возможны и другие методы построения переходного процесса. Например, можно, взяв какое-нибудь параметрическое семейство управляющих функций $\Upsilon_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$), назначить независимые параметры семейства так, чтобы краевые условия переходного процесса выполнялись при фиксированном времени его протекания [8].

2. Реализация связей. С учетом сказанного в предыдущем разделе уравнения servosвязей будем выражать в дальнейшем формулами

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \tilde{f}(t)$$

для геометрических связей и

$$\Phi_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = \tilde{\Phi}_j(t), \quad j = 1, \dots, m$$

для дифференциальных связей, считая функции $\tilde{f}(t)$, $\tilde{\Phi}(t)$ определенными тем или иным способом регулирования (разд. 1).

Необходимым и достаточным условием того, что отклонение системы от связей подчиняется указанным законам в каждый момент времени в силу уравнений дви-

жения отдельных материальных точек, служит существование реакций, удовлетворяющих следующей системе линейных уравнений:

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_v} \cdot \frac{\mathbf{R}_v}{m_v} = b_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad m \leq 3N \quad (2.1)$$

где

$$b_j = - \sum_{v=1}^N \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_v} \cdot \frac{\mathbf{F}_v}{m_v} - \sum_{v=1}^N \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot \mathbf{v}_v - \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + \Upsilon_j, \quad j = 1, \dots, m$$

$\mathbf{F}_v$ – активные силы, отличные от усилий, развиваемых сервоприводами. Свободные члены b_j ($j = 1, \dots, m$) от неизвестных реакций связей не зависят. При $m \leq 3N$ решение этой системы неоднозначно.

Выберем в пространстве E^3 декартов ортонормированный репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Чтобы в E^3 задать положения всех материальных точек системы (задать ее конфигурацию), достаточно назначить $3N$ скалярных координат системы в конфигурационном пространстве.

Следуя предложенному ранее подходу [5] (см. также работы, цитированные в сносках) для выявления структуры множества решений системы уравнений (2.1), определим в пространстве конфигураций следующие векторы:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{3N}), \quad \boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_{3N}), \quad \mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{j,3N}) \quad (2.2)$$

с компонентами

$$x_i = \frac{\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{e}_k}{\sqrt{m_v}}, \quad \delta_i = \sqrt{m_v} \delta \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{e}_k, \quad a_{ji} = \frac{1}{\sqrt{m_v}} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_v} \cdot \mathbf{e}_k$$

$$i = k + 3(v-1), \quad k = 1, 2, 3, \quad v = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, m$$

и евклидово скалярное произведение

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3N} a_{ji} x_i$$

Система уравнений (2.1) относительно неизвестного вектора $\mathbf{x}$ запишется следующим образом:

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) = b_j, \quad j = 1, \dots, m$$

В силу независимости исходной совокупности связей матрица этой системы имеет ранг, равный m .

Решение $\mathbf{x}$ можно искать в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{a}_k + \mathbf{x}_\tau$$

где вектор $\mathbf{x}_\tau$ ортогонален всем векторам $\mathbf{a}_j$. Постоянные λ_k определяются однозначно, так как матрица системы уравнений для λ_k есть матрица Грама совокупности линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Вектор $\mathbf{x}_\tau$ из уравнений системы связей определить невозможно, и при произвольном его выборе уравнения связей не нарушаются в процессе движения материальной системы.

Определение 1. Нормальным пространством системы дифференциальных связей назовем множество $\mathcal{R}$ наборов $\{\mathbf{R}_v, v = 1, \dots, N\}$ векторов реакций таких, что соответствующий каждому набору $3N$ мерный вектор $\mathbf{x}$ принадлежит линейной оболочке $\text{lin}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$.

Определение 2. Пространством $\mathcal{T}$ виртуальных перемещений назовем множество наборов $\{\delta \mathbf{r}_v, v = 1, \dots, N\}$ векторов перемещений, удовлетворяющих системе уравнений

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_v} \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

Пространство $\mathcal{T}$ имеет размерность $3N - m$. Набор $\{\delta \mathbf{r}_v, v = 1, \dots, N\}$ векторов, удовлетворяющих этой системе однородных линейных уравнений, есть *виртуальное перемещение* системы материальных точек.

Вектор δ виртуального перемещения $\{\delta \mathbf{r}_v, v = 1, \dots, N\}$ в обозначении (2.2) ортогонален всем векторам $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$:

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_v} \cdot \delta \mathbf{r}_v = (\mathbf{a}_j, \delta) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

Условие того, что действительное перемещение системы материальных точек $\{d\mathbf{r}_v = \mathbf{v}_v dt, v = 1, \dots, N\}$ принадлежит пространству виртуальных перемещений $\mathcal{T}$, записывается в виде

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_v} \cdot \mathbf{v}_v = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

Была доказана (см. работу, цитированную в сноске 1) следующая

Теорема 1. Набор реакций $\{\mathbf{R}_v, v = 1, \dots, N\}$ принадлежит нормальному пространству $\mathcal{R}$ системы дифференциальных связей тогда и только тогда, когда для любого $\{\delta \mathbf{r}_v, v = 1, \dots, N\} \in \mathcal{T}$ выполнено условие

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{R}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_v, v = 1, \dots, N\} \in \mathcal{T} \quad (2.3)$$

Определение 3. Связи (механические и сервосвязи), наложенные на систему N материальных точек, называются *идеальными*, если для них выполнено условие (2.3).

Другими словами, для идеальных связей и только для них реакции принадлежат нормальному пространству $\mathcal{R}$.

Чтобы найти реакции идеальных связей, можно воспользоваться методом множителей Лагранжа:

$$\mathbf{R}_v = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_v}$$

В сумме правой части каждое слагаемое, очевидно, можно интерпретировать как реакцию j -й связи, действующую на v -ю материальную точку.

Определение 4. Управление сервоприводами, обеспечивающее реакции идеальных сервосвязей, назовем *идеальным сервоуправлением*.

Понятие идеального сервоуправления означает только обеспечение принадлежности реакций нормальному пространству и не подразумевает отсутствия затрат энергии сервоприводов.

Требование идеальности сервосвязей может оказаться несовместимым с конструкцией применяемых в конкретной задаче сервоприводов. Но это не всегда означает, что такими приводами заданные связи вообще нельзя реализовать. Просто требование $\mathbf{x}_t = 0$ иногда оказывается слишком сильным.

Полное множество решений задачи получается, если добавлять ненулевые составляющие реакций, для которых соответствующий вектор $\mathbf{x}_t$ ортогонален всем векторам $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Указанный набор добавочных реакций обозначим $\{\mathbf{R}_v^t, v = 1, \dots, N\}$.

Чтобы дополнить необходимым образом множество решений, можно взять подходящий вектор $\bar{\delta} \perp \text{lin}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ и принять $\mathbf{x}_\tau = \beta \bar{\delta}$ или

$$\mathbf{R}_v^\tau = \beta m_v \bar{\delta} \mathbf{r}_v, \quad v = 1, \dots, N$$

где $\{\bar{\delta} \mathbf{r}_v, v = 1, \dots, N\} \in \mathcal{T}$ представляет собой подходящее виртуальное перемещение системы, а β – размерный скалярный коэффициент, зависящий, вообще говоря, от параметров состояния системы и времени.

3. Уравнения движения. Было показано (см. работу, цитированную в сноске 2), что при связях, удовлетворяющих обобщенному условию идеальности (определение 3) и условию идеального сервоуправления (определение 4), сохраняют справедливость принцип виртуальных перемещений, принцип Даламбера – Лагранжа, принцип Гаусса. Для неидеальных сервосвязей принцип Даламбера – Лагранжа, очевидно, можно представить в виде

$$\sum_{v=1}^N (m_v \mathbf{w}_v - \mathbf{F}_v - \beta m_v \bar{\delta} \mathbf{r}_v) \delta \mathbf{r}_v = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_v, v = 1, \dots, N\} \in \mathcal{T}$$

где $\mathbf{w}_v$ – действительные ускорения точек системы.

Понятие квазикоординат для сервосвязей практически совпадает с введенным ранее (см. работу, цитированную в сноске 1) понятием квазикоординат для нелинейных дифференциальных связей. Учтем, что механическая система может быть подвержена действию как обычных механических связей, так и сервосвязей. Как было установлено в разд. 2, разница между уравнениями этих типов связей лишь в том, равны тождественно нулю или нет соответствующие правые части $\tilde{f}(t)$ для геометрических связей и $\tilde{\Phi}(t)$ для дифференциальных связей.

Пусть в пространстве R^3 конфигурация системы N материальных точек с учетом всех геометрических связей (механических и сервосвязей) однозначно определена координатами

$$q_1, \dots, q_n, \quad n \leq 3N$$

так что радиус-векторы всех материальных точек системы выражаются функциями

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(q_1, \dots, q_n, t), \quad v = 1, \dots, N$$

Предположим, что на систему наложены дифференциальные связи

$$\Phi_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = \tilde{\Phi}(t), \quad j = 1, \dots, m \leq n.$$

Учтем, что

$$\mathbf{v}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t}$$

и подставим эти выражения в уравнения связей. Тогда связи примут вид

$$\phi_j(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

Будем считать, что ранг матрицы Якоби

$$\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)}$$

равен m . Это означает, что система связей выделяет в пространстве скоростей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ поверхность размерности $n - m$. Представим ее в параметрической форме

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \dots, q_n, \pi_1, \dots, \pi_{n-m}), \quad i = 1, \dots, n$$

таким образом, что при произвольном задании скалярных параметров $\dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_{n-m}$, называемых квазискоростями, уравнения дифференциальных связей автоматически удовлетворяются.

При желании зависимости $\dot{\pi}_k(t)$ можно рассматривать как производные от квази-координат $\pi_k(t)$.

Ответ на вопрос о том, в каком случае квазикоординаты могут служить полноправными координатами системы материальных точек, был дан ранее (см. работу, цитированную в сноске 1).

Возьмем стандартное определение частной производной от координаты q_i по квази-координате π_k

$$\frac{\partial q_i}{\partial \pi_k} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k}$$

Аналогично для произвольной функции $f(q_1, \dots, q_n, t)$ получим

$$\frac{\partial f}{\partial \pi_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \pi_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k}$$

Пространство виртуальных перемещений при использовании квазикоординат в случае сервосвязей определяется так же, как и ранее,

$$\delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \delta q_i = \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k} \delta \pi_k = \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial q_i}{\partial \pi_k} \delta \pi_k$$

Пусть координатам $q_1, \dots, q_n$ отвечают обобщенные силы $Q_1, \dots, Q_n$. Скалярная величина

$$Q_k^* = \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial q_i}{\partial \pi_k}$$

есть обобщенная сила, работающая на изменении квазикоординаты π_k .

Понятие идеальных сервосвязей позволяет отделить задачу исследования динамических свойств системы от задачи определения усилий, создаваемых сервоприводами, и получить уравнения движения, в которые реакции идеальных сервосвязей не входят. Для нелинейных идеальных дифференциальных сервосвязей можно применять полученные ранее (см. работу, цитированную в сноске 1) обобщенные уравнения Воронца. Здесь выполним дальнейшее обобщение уравнений Воронца для случая неидеальных сервосвязей.

Приведем дифференциальные связи к виду

$$\dot{q}_{p+v} = \Phi_{p+v}(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p), \quad p = n-m, \quad v = 1, \dots, m$$

и составим функции

$$T^* = T^*(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p, t) \quad \Phi_{p+v}^*(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p, t)$$

Функция T^* получается из кинетической энергии системы T заменой скоростей $\dot{q}_{p+v}$ ($v = 1, \dots, m$) их выражениями через дифференциальные связи, а функции Φ_{p+v}^* совпадают по форме с соответствующими функциями Φ_{p+v} . Однако производные функций T^* и Φ_{p+v}^* берутся с учетом правила дифференцирования по квазикоординате:

$$\frac{\partial q_{p+v}}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{q}_{p+v}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \Phi_{p+v}}{\partial \dot{q}_k}, \quad v = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, p$$

Частные производные от функций T , Φ_{p+v} будем по-прежнему вычислять так, как будто все их аргументы независимы. Тогда аналогично сказанному ранее (см. работу,

цитированную в сноске 1) с учетом составляющих реакций, не удовлетворяющих условию идеальности, получаем следующую теорему.

Теорема 2. Координаты q_i определяют движение механической системы, стесненное дифференциальными связями, тогда и только тогда, когда они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} = Q_i^* + Q_i^r + \tilde{Q}_i, \quad i = 1, \dots, p = n - m$$

где

$$Q_i^* = Q_i + \sum_{v=1}^m Q_{p+v} \frac{\partial \phi_{p+v}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{v=1}^m Q_{p+v} \frac{\partial q_{p+v}}{\partial q_i}$$

$$Q_i^r = \bar{Q}_i + \sum_{v=1}^m \bar{Q}_{p+v} \frac{\partial q_{p+v}}{\partial q_i}, \quad \bar{Q}_j = \beta \sum_{v=1}^N m_v \bar{\delta} \mathbf{r}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\tilde{Q}_i = \sum_{v=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+v}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_{p+v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \phi_{p+v}^*}{\partial q_i} \right]$$

и предполагается, что необходимый набор реакций $\{\mathbf{R}_v, v = 1, \dots, N\}$ реализуем в каждый момент времени.

Замечание 1. Система уравнений теоремы 2 справедлива при любых наложенных на систему связях. Но она не полна. Чтобы эту систему замкнуть, достаточно добавить к ней уравнения дифференциальных связей (кинематические уравнения) и выбрать надлежащим образом виртуальное перемещение системы $\{\bar{\delta} \mathbf{r}_v, v = 1, \dots, N\}$.

Замечание 2. Слагаемые $\tilde{Q}_i$ обусловлены воздействием дифференциальных связей. В общем случае они могут содержать вторые производные от обобщенных координат, и потому их не всегда можно трактовать как обобщенные силы. Вместе с тем оператор, содержащийся в квадратных скобках выражений для $\tilde{Q}_i$, в случае линейных дифференциальных связей не содержит вторых производных от координат, и тогда $\tilde{Q}_i$ могут интерпретироваться как некоторые обобщенные силы, возникающие вследствие действия неголономных связей [9].

Найдем сумму

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \tilde{Q}_i \dot{q}_i &= \sum_{v=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+v}} \left[\sum_{i=1}^p \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_{p+v}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - \sum_{i=1}^p \frac{\partial \phi_{p+v}^*}{\partial q_i} \dot{q}_i \right] = \\ &= \sum_{v=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+v}} \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial \phi_{p+v}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \sum_{i=1}^p \frac{\partial \phi_{p+v}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \sum_{i=1}^p \frac{\partial \phi_{p+v}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\mu=1}^m \sum_{i=1}^p \frac{\partial \phi_{p+v}}{\partial q_{p+\mu}} \frac{\partial \phi_{p+\mu}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] = \sum_{v=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+v}} \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial \phi_{p+v}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \phi_{p+v} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial \phi_{p+v}}{\partial q_{p+\mu}} \left(\phi_{p+\mu} - \sum_{i=1}^p \frac{\partial \phi_{p+\mu}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial \phi_{p+v}}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

Лемма 1. Если дифференциальные связи допускают принадлежность действительных перемещений множеству виртуальных, то справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^p \tilde{Q}_i \dot{q}_i = \sum_{v=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+v}} \frac{\partial \phi_{p+v}}{\partial t}$$

Доказательство. Принадлежность действительных перемещений множеству виртуальных означает, что

$$\dot{q}_{p+v} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi_{p+v}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \rightarrow \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi_{p+v}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \varphi_{p+v}, \quad v = 1, \dots, m$$

Следствие 1. Если дифференциальные связи стационарны и допускают принадлежность действительных перемещений множеству виртуальных, то

$$\sum_{i=1}^p \tilde{Q}_i \dot{q}_i = 0$$

4. Движение точки с постоянным модулем скорости. Представим себе робота, которому требуется окрасить вертикальную стену с помощью краскораспылителя. Окраска стены должна быть равномерной, из-за чего требуется движение руки робота такое, чтобы краскораспылитель двигался со скоростью, постоянной по величине. Другая практическая задача, приводящая к требованию постоянства скорости схвата манипулятора, возникает при шлифовке поверхностей [6].

Рассмотрим предельно упрощенную механическую систему (см. работу, цитированную в сноске 2), в которой материальная точка массы m (схват манипулятора) может двигаться в вертикальной плоскости и имеет две степени подвижности. Одна степень изменяет расстояние ρ от точки m до заданной фиксированной точки O , расположенной в той же плоскости, а другая обеспечивает изменение угла между вертикалью и отрезком, соединяющим точку m с точкой O . Сервоприводы обеспечивают движение по каждой из степеней подвижности. Массой руки манипулятора вместе с сервоприводами будем пренебрегать. Требуется построить движение, при котором под действием силы тяжести и сервоприводов сохраняется величина скорости точки. Заметим, что движение точки с постоянной скоростью в центральном поле рассматривалось ранее [2].

Воспользуемся предложенной теорией. Составим выражения для кинетической энергии и силовой функции

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2), \quad U = mgr \cos \varphi$$

где g – ускорение силы тяжести, φ – полярный угол между направлением силы тяжести и лучом из точки O в точку m . Сервосвязь имеет вид

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 - v_0^2 = \tilde{\Phi}(t)$$

В предположении, что сервоприводы обеспечивают идеальное управление, уравнения Лагранжа с множителем λ принимают вид

$$\ddot{\rho} = \rho \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi + \lambda \dot{\rho}, \quad \rho^2 \ddot{\varphi} = -2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} - g \rho \sin \varphi + \lambda \rho^2 \dot{\varphi}$$

Чтобы найти множитель λ , продифференцируем уравнение связи и подставим вместо вторых производных координат их выражения из уравнений движения. Получим

$$\lambda = \frac{\dot{\rho} - 2g(\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi)}{2(v_0^2 + \tilde{\Phi})}$$

Таким образом, идеальное управление может быть реализовано, если потребовать, чтобы сервопривод, обеспечивающий поступательную степень подвижности ρ , создавал усилие $u_\rho = \dot{\rho} \lambda$ на единицу переносимой массы, а сервопривод, обеспечивающий вращательную степень подвижности φ , создавал момент силы $u_\varphi = \rho^2 \dot{\varphi} \lambda$ на единицу

переносимой массы. Движение с таким управлением будет подчиняться обобщенному уравнению теоремы 2, если в нем принять $Q_i^* = 0$. Успех его исследования существенно зависит от выбора системы координат.

Возьмем декартовы координаты

$$y = \rho \sin \varphi, \quad z = -\rho \cos \varphi$$

Уравнение дифференциальной связи можно представить в виде

$$\dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2 + \tilde{\Phi}, \quad \text{или} \quad \dot{z} = \pm \sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi} - \dot{y}^2}$$

Здесь положительное значение $\dot{z}$ отвечает движению руки манипулятора вверх, а отрицательное значение – в противоположном направлении.

Рассмотрим случай $\dot{z} > 0$. Тогда

$$\dot{z} = \varphi^* = \sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t) - \dot{y}^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}} = -\frac{\dot{y}}{\sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t) - \dot{y}^2}}$$

Функции T^* и U^* принимают вид

$$T^* = \frac{m}{2}[v_0^2 + \tilde{\Phi}(t)], \quad U^* = -mgz$$

Функция T^* ни от скоростей, ни от координат не зависит.

Найдем выражения для Q_y^* и $\tilde{Q}_y$.

$$Q_y^* = \frac{\partial U^*}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = -mg \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}} = mg \frac{\dot{y}}{\sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t) - \dot{y}^2}}$$

$$\tilde{Q}_y = -m\dot{z} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t) - \dot{y}^2}} \right)$$

Следовательно, получается система уравнений, которая не содержит реакций идеальных сервосвязей:

$$\dot{z} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{z}} \right) = g \frac{\dot{y}}{\dot{z}}, \quad \dot{z} = \sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t) - \dot{y}^2} \quad (4.1)$$

Эта система имеет очевидное решение

$$y \equiv y_0, \quad z = \int_{t_0}^t \sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t)} dt + z_0$$

означающее, что схват проходит через начальное положение (y_0, z_0) и движется вертикально вверх со скоростью, близкой к предписанной.

Рассмотрим случай $\dot{z} < 0$:

$$\dot{z} = \varphi^* = -\sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t) - \dot{y}^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t) - \dot{y}^2}}$$

Динамическое уравнение движения принимает тот же вид (4.1), который был получен для положительных значений $\dot{z}$. В случае $\dot{z} < 0$ имеем очевидное решение

$$y \equiv y_0, \quad z = -\int_{t_0}^t \sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t)} dt + z_0$$

означающее, что схват проходит через начальное положение (y_0, z_0) и движется вертикально вниз со скоростью, близкой к предписанной.

Найдем решения, для которых $\dot{y} \neq 0$. Введем переменную

$$z' = \begin{cases} \sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t) - \dot{y}^2} / \dot{y}, & \dot{z} \geq 0 \\ -\sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t) - \dot{y}^2} / \dot{y}, & \dot{z} < 0 \end{cases}$$

равную тангенсу угла наклона касательной к траектории. Тогда

$$\dot{y}^2 = \frac{1}{1+z'^2} (v_0^2 + \tilde{\Phi}(t)), \quad \dot{z}^2 = \frac{z'^2}{1+z'^2} (v_0^2 + \tilde{\Phi}(t))$$

и ни при каком конечном значении z' величина $\dot{y}$ не обращается в нуль. Для определенности возьмем $\dot{y} > 0$.

Относительно переменной z' в случае как положительных, так и отрицательных ее значений получается одно и то же уравнение

$$\frac{dz'}{\sqrt{1+z'^2}} = -\frac{gdt}{\sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t)}}$$

Обозначим

$$\eta = \eta(t) = c \exp \left(-\int_{t_0}^t \frac{gdt}{\sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t)}} \right) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$$

где постоянная $c = z'(t_0) + \sqrt{1 + [z'(t_0)]^2}$. Решение дифференциального уравнения относительно z' можно представить в виде

$$z' + \sqrt{1+z'^2} = \eta, \quad z' = -(1 - \eta^2)/(2\eta)$$

Следовательно, $z' \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Можно показать, что

$$c > 1, \quad \text{если } z'(t_0) > 0$$

$$c = 1, \quad \text{если } z'(t_0) = 0$$

$$0 < c < 1, \quad \text{если } z'(t_0) < 0$$

Таким образом, если, например, $z'(t_0) > 0$, то схват манипулятора сначала движется вверх, достигает точки максимума, а затем устремляется вниз с постоянной по величине скоростью. Если $z'(t_0) < 0$, то траектория схвата не имеет восходящего участка. Аналогичная картина движения получается для случая $\dot{y} < 0$.

Пусть по-прежнему $\dot{y} > 0$ (случай $\dot{y} < 0$ исследуется аналогично). Рассмотрим зависимость $y(t)$ при $\dot{y} > 0$. Ее можно получить, интегрируя уравнение

$$\dot{y} = \frac{2\eta}{1+\eta^2} \sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t)}$$

Видим, что, поскольку $\eta > 0$, правая часть этого уравнения положительна. Оценим ее. Очевидно, что

$$\dot{y} \leq 2\eta \sqrt{v_0^2 + \tilde{\Phi}(t)} \leq 2\eta \sqrt{v_0^2 + |\tilde{\Phi}(t)|} \leq a \exp(-\kappa[t - t_0])$$

$$a = 2c \sqrt{v_0^2 + |\tilde{\Phi}(t_0)|}, \quad \kappa = \frac{g}{\sqrt{v_0^2 - |\tilde{\Phi}(t_0)|}}$$

Интегрируя, получим

$$y - y_0 \leq \frac{a}{\kappa} \{1 - \exp(-\kappa[t - t_0])\} < \frac{a}{\kappa}$$

Следовательно, переменная y стремится к некоторому предельному значению $\tilde{y}$, которое определяется начальными условиями. Вместе с тем в соответствии с правилом выбора знаков имеем

$$\dot{z} = -\frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} \sqrt{\nu_0^2 + \tilde{\Phi}(t)}$$

и при достаточно больших значениях t вертикальная скорость отрицательна, а ее величина близка к ν_0 . При этом траектория движения стремится к вертикальной асимптоте $y = \tilde{y}$.

Предположим теперь, что степень подвижности по координате φ свободна, и только степень подвижности по координате ρ обслуживается сервоприводом. Тогда, очевидно, идеальную сервосвязь реализовать невозможно, но это не означает, что вообще нельзя подобрать управление, реализующее сервосвязь (не обязательно идеальную). Чтобы решить задачу, следует взять реакцию связи в виде

$$\mathbf{R} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{R}^\tau, \quad \mathbf{R}^\tau \cdot \mathbf{v} = 0$$

Второе равенство обеспечивает ортогональность вектора $\mathbf{R}^\tau$ нормальному пространству системы. Множитель λ , как и прежде, находится из условия выполнения связи, а вектор $\mathbf{R}^\tau$ — из условия, что реакция $\mathbf{R}$ коллинеарна радиус-вектору $\mathbf{r}$:

$$\lambda = m \frac{g\dot{z} + \Upsilon}{\nu_0^2 + \tilde{\Phi}}, \quad \mathbf{R}^\tau = \lambda \left(\frac{\nu^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{r} - \mathbf{v} \right), \quad \mathbf{R} = m \frac{g\dot{z} + \Upsilon}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{r}$$

Сила $\mathbf{R}$, развиваемая исполнительным устройством сервопривода, сможет обеспечить постоянную скорость, если величина $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})$ не слишком мала. Отметим, что этой особенности не было в случае идеального сервоуправления.

Рассмотрим установившееся движение, когда $\tilde{\Phi}(t) = \Upsilon = 0$. В декартовых координатах $y = \rho \sin \varphi$, $z = -\rho \cos \varphi$ уравнения движения примут вид

$$\ddot{y} = 2g\dot{z}y \left[\frac{d(\rho^2)}{dt} \right]^{-1}, \quad \ddot{z} = -g + 2g\dot{z}z \left[\frac{d(\rho^2)}{dt} \right]^{-1}, \quad \rho^2 = y^2 + z^2$$

Эту систему уравнений можно представить также в форме

$$\frac{\ddot{y}}{y} = \frac{\ddot{z} + g}{z} = 2g\dot{z} \left[\frac{d(\rho^2)}{dt} \right]^{-1}$$

Она, как и следовало ожидать, допускает движение вдоль вертикальной прямой $y \equiv 0$ при $\dot{z} = \pm \nu_0$.

Найдем решение, для которого траектория представляет собой окружность радиуса R :

$$\left(z + \frac{g}{\omega^2} \right)^2 = y^2 = R^2 \Rightarrow \rho^2 = R^2 - \frac{g^2}{\omega^4} - \frac{2g}{\omega^2} z \Rightarrow \frac{d(\rho^2)}{dt} = -\frac{2g}{\omega^2} \dot{z}$$

Тогда система уравнений движения принимает вид

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \ddot{z} + \omega^2 z = -g$$

Напишем искомое решение

$$y = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad z = b \cos \omega t - a \sin \omega t - \frac{g}{\omega^2}, \quad a^2 + b^2 = R^2$$

Вектор скорости имеет компоненты

$$\dot{y} = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t, \quad \dot{z} = -b\omega \sin \omega t - a\omega \cos \omega t$$

так что движение происходит с постоянной скоростью $v_0 = \omega R$.

При фиксированной скорости v_0 в зависимости от величины радиуса R траектории в виде окружностей образуют семейство. Каждая окружность имеет центр в точке с координатами

$$y_c = 0, \quad z_c = -gR^2 / v_0^2$$

и пересекает ось Oz в двух точках: верхней с ординатой z_m и нижней с ординатой z_m

$$z_m = R - \frac{gR^2}{v_0^2}, \quad z_m = -\left(R + \frac{gR^2}{v_0^2}\right)$$

Функция $z_m(R)$ имеет максимум $\bar{z}_m$ при $R = v_0^2 / (2g)$:

$$\bar{z}_m = \max_R z_m(R) = \frac{v_0^2}{4g}$$

При увеличении R от нуля до значения $v_0^2 / (2g)$ каждая последующая окружность содержит внутри себя предыдущую. При увеличении R от $v_0^2 / (2g)$ до бесконечности окружности пересекаются, а координата z_m монотонно убывает. Проекция фазовой области построенных решений на координатное пространство представляет собой сумму верхнего полукруга, имеющего радиус $r = v_0^2 / (2g)$ и центр в точке $(0, -v_0^2 / (4g))$, и области, определенной соотношениями

$$z = -\frac{gR^2}{v_0^2}, \quad -R \leq y \leq R \quad \text{при} \quad R \geq \frac{v_0^2}{2g}$$

Полученное семейство решений показывает, что способ реализации сервосвязи существенно влияет на характер движения. Так, движение точки с постоянной скоростью в поле силы тяжести может происходить по окружности, если связь реализуется только за счет радиальной силы, и не может иметь траектории в виде окружности, если применяется идеальное управление сервоприводами.

5. Заключение. Основные результаты работы состоят в следующем.

1°. Дано обобщение понятия виртуальных перемещений для систем материальных точек, стесненных сервосвязями.

2°. Дано аналитическое представление реакций сервосвязей в зависимости от структуры виртуальных перемещений.

3°. Развито понятие квазикоординат для нелинейных дифференциальных сервосвязей. Представлено обобщение уравнений Воронца на случай нелинейных по скоростям дифференциальных сервосвязей.

4°. Решены две задачи о движении тяжелой точки при условии сохранения величины ее скорости. Одна задача решена в предположении, что дифференциальная связь реализуется за счет идеального сервоуправления, а другая – в предположении, что сервоуправление осуществляется только в радиальном направлении. Показано, что траектория точки существенно зависит от выбранного способа сервоуправления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00065, 98-01-00805) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (1.6-329, А0097).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appell P.* Traite de mécanique rationnelle. Т. 2. Dynamique des systèmes. Mécanique analytique. Paris: Gauthier-Villars, 1953. = *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Добронравов В.В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высш. шк., 1970. 270 с.
3. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
4. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.
5. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Принцип Сулова – Журлена как следствие уравнений динамики. Сб. науч.-метод. статей по теорет. механике. М.: Высш. шк., 1982. Вып. 12. С. 72–79.
6. *Накано Э.* Введение в робототехнику. М.: Мир, 1988. 336 с.
7. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
8. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г.* Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. М.: Наука, 1975. 399 с.
9. *Румянцев В.В.* О принципе Гамильтона для неголономных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 387–399.

Москва

Поступила в редакцию
9.VI.2000