

УДК 531.36

© 2001 г. П.С. Красильников

ОБ ОБОБЩЕННОЙ СХЕМЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ИЗ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Описывается эвристическая схема построения ν -функций Ляпунова, обобщающая классический метод конструирования этих функций из первых интегралов исследуемых уравнений движения (либо из интегралов системы сравнения). Показано, что обобщенная схема наследует характерную особенность классического метода: функции Ляпунова конструируются в виде решений некоторого вполне интегрируемого уравнения (системы уравнений) в частных производных. Вид этого уравнения и его порядок однозначно определяется невырожденной многопараметрической функцией $V(x, \alpha) + \alpha_q$, $x \in R^n$, $\alpha \in R^{q-1}$ (α – вектор параметров), обобщающей классическую линейную интегральную связку. Описываются способы представления ν -функций, при этом традиционные методы (метод интегральных связок Четаева, конструирование функций Ляпунова в виде нелинейной функции интегралов) дополнены геометрическими построениями, при которых ν -функции ищутся в виде огибающих некоторых подсемейств функции $V(x, \alpha) + \alpha_q$. На основе обобщенной схемы получены новые, простые критерии асимптотической устойчивости нулевого решения в трансцендентной задаче об устойчивости системы с двумя степенями свободы в критическом случае двух пар чисто мнимых корней при резонансе 1 : 1 (случай простых элементарных делителей).

1. Классическая схема построения ν -функций. Известно, что для исследования задач устойчивости наиболее эффективен классический метод построения ν -функций из первых интегралов уравнений движения, восходящий к работам Лагранжа [1], Ляпунова [2] и Рауса [3, 4]. Простейшим является случай, когда известен положительно-определенный первый интеграл. Устойчивость системы следует из первой теоремы Ляпунова об устойчивости. В более сложной ситуации, требующей явного построения указанного интеграла, используют, как правило, метод интегральных связок Четаева, с которым тесно связана теорема Рауса – Ляпунова [3, 4], позволяющая эффективно конструировать ν -функции этого типа. С применением указанной процедуры была исследована устойчивость многих консервативных систем (например, [5–20]).

Была показана [21, 22] универсальность этого подхода в задаче о построении достаточных условий устойчивости равновесия в гамильтоновых системах и обратимых системах с аналитической правой частью: ν -функции прямого метода, удовлетворяющие первой теореме Ляпунова об устойчивости, являются знакоопределенными интегралами исследуемой системы.

Известно также, что для целого ряда неконсервативных задач ν -функции принадлежат пространству первых интегралов некоторой вспомогательной системы сравнения. Обычно в этом случае применяют "энергетический подход", когда интеграл энергии системы сравнения рассматривают в качестве функции Ляпунова. Устойчивость стационарных движений механических систем с диссипацией исследовалась с помощью интегральной связки консервативной системы сравнения [23–27] либо с помощью ее обобщенного интеграла энергии [28].

Неконсервативные задачи исследовались также на основе построения функциональных продолжений интегральной связки системы сравнения. Основой такой модификации классического метода послужило изучение гироскопических систем с полной диссипацией при помощи линейной интегральной связки, дополненной квадратичными членами [29, 30], а также при помощи связки из полной энергии и продолженных циклических интегралов¹. Этот прием применялся также [31, 32] при исследовании устойчивости гироскопа с сухим трением.

Формальная схема классического подхода такова. Предположим, рассматривается задача устойчивости тривиального решения $\mathbf{x} = 0$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений с достаточно гладкими правыми частями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (1.1)$$

Для построения искомых функций Ляпунова фиксируем систему сравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

Если уравнения (1.1) имеют гамильтонов вид или обратимы, то систему уравнений (1.2) следует отождествить с (1.1). Предположим, известны независимые интегралы уравнений (1.2): $F_1(\mathbf{x}), \dots, F_{m-1}(\mathbf{x})$, $m \leq n$. Согласно идее подхода, ν -функции принадлежат подмножеству

$$M = \{F(\mathbf{x}): F = B(F_1, \dots, F_{m-1}), \quad B \in C^r(R^{m-1}, R^1)\}$$

всего множества интегралов уравнений (1.2). Искомые функции Ляпунова ищутся на множестве M в следующем виде:

- 1) $\nu(\mathbf{x})$ – линейная функция интегралов $F_j(\mathbf{x})$;
- 2) $\nu(\mathbf{x})$ – нелинейная функция интегралов $F_j(\mathbf{x})$; обычно $\nu(\mathbf{x})$ берут в виде интегральной связки Четаева

$$\nu(\mathbf{x}) = \sum_j \lambda_j F_j + \sum_j \mu_j F_j^2, \quad \lambda_j, \mu_j = \text{const} \quad (1.3)$$

Эту эвристическую схему можно дополнить геометрическими построениями, не имеющими явного применения в прикладных задачах, но необходимыми для полноты описания классического подхода.

Известна связь множества M с уравнениями в частных производных [33]. Пусть $W(\mathbf{x}, \mathbf{C}) = C_1 F_1 + \dots + C_{m-1} F_{m-1}$, $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{m-1})$ – невырожденная интегральная связка. Тогда множество M совпадает со всем пространством гладких решений некоторой вполне интегрируемой системы уравнений в частных производных первого порядка

$$H_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0, \dots, H_{1+n-m}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0, \quad \mathbf{p} \in R^n, \quad p_j = \frac{\partial z}{\partial x_j} \quad (1.4)$$

для которой $W + C_m$ – полный интеграл Лагранжа. Это значит, что система уравнений $p_j = \partial W / \partial x_j$ ($j = 1, \dots, n$) однозначно разрешима относительно $m - 1$ величин C_j и принимает, после их исключения из оставшихся $n - m + 1$ уравнений, вид, равносильный (1.4). Зависимость H_j от $\mathbf{p}$ линейна, так как $W + C_m$ линейно зависит от C_j . В предельном случае $m = n$ (система сравнения (1.2) допускает полный набор интегралов) система (1.4) состоит из одного линейного уравнения

$$\sum_{j=1}^n X_{0j}(\mathbf{x}) p_j = 0 \quad (1.5)$$

¹ Матросов В.М. Некоторые вопросы устойчивости гироскопических систем: Дис... канд. техн. наук: 05.11.03. Казань, 1959. 102 с.

Известно также [33], что любое решение $z(x)$ уравнений (1.4) можно получить из полного интеграла $W + C_m$ методом Лагранжа вариации произвольных постоянных C_j :

$$z(x) = C_1(x)F_1(x) + \dots + C_{m-1}(x)F_{m-1}(x) + C_m(x)$$

где вектор вариаций $(C(x), C_m(x))$ есть решение уравнения Пфаффа

$$\sum_{j=1}^{m-1} W'_{C_j} dC_j + dC_m = 0 \quad (1.6)$$

Геометрическая интерпретация этого метода известна [33, 34]. Пусть π – произвольная регулярная l -поверхность в пространстве существенных постоянных $C_1, \dots, C_m$ ($0 \leq l \leq m-1$), $(W + C_m)_\pi$ – ограничение семейства $(W + C_m)$ на эту поверхность. Любое решение $z(x)$ уравнений (1.4) является огибающей (по крайней мере, локально) некоторого l -параметрического семейства $(W + C_m)_\pi$ (если $l = 0$, то огибающая есть сама функция $(W + C_m)_\pi$). Отсюда следует, что пространство решений уравнений (1.4) (т.е. множество M) состоит из огибающих всевозможных семейств $(W + C_m)_\pi$, когда индекс π пробегает все множество регулярных l -поверхностей ($0 \leq l \leq m-1$), принадлежащих пространству произвольных постоянных C_j .

Введем дополнительные обозначения: M_l – подпространство огибающих всевозможных семейств $(W + C_m)_\pi$ когда индекс π пробегает все множество регулярных l -поверхностей, принадлежащих пространству произвольных постоянных. Очевидно,

$$M = \bigcup_{l=0}^{m-1} M_l$$

Наиболее просто устроено множество M_0 , так как оно состоит из функций вида $W(x, C) + C_m$, $(C, C_m) = \text{const}$. Остальные подпространства M_l заполнены огибающими. Более подробная информация о строении M в случае $n = m$ была дана ранее [35].

Итак, классическую схему можно дополнить. Функции Ляпунова представляют собой решения вполне интегрируемой системы (1.4), поэтому они имеют одно из следующих представлений:

$$3) u(x) = C_1(x)F_1(x) + \dots + C_{m-1}(x)F_{m-1}(x) + C_m(x)$$

где $(C_1(x), \dots, C_m(x))$ – вектор решения уравнения (1.6);

$$4) u(x) \text{ – огибающая некоторого } l\text{-параметрического семейства } (W + C_m)_\pi, \dim \pi = l.$$

Таким образом, классический способ построения функций Ляпунова из первых интегралов сводится к процедурам 1–4.

Отметим, что представление функций Ляпунова в виде огибающих некоторых семейств функций типично для задач устойчивости. Действительно, согласно методу Четаева, u -функции следует искать в виде (1.3). Если $\sum_j \mu_j^2 \neq 0$, то $u(x)$ не принадлежит

M_0 , поэтому $u(x)$ принадлежит подмножеству $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{m-1}$. Но это означает, что $u(x)$ – огибающая некоторого семейства $(W + C_m)_\pi$. К такому же выводу приходим и в случае, когда u представляют в виде произвольной нелинейной функции от известных интегралов.

2. Обобщенная эвристическая схема построения u -функций из первых интегралов.

Несмотря на эффективность классического подхода, область его применения ограничена, как правило, получением достаточных условий устойчивости равновесия консервативной системы (либо системы, близкой к консервативной). Дело в том, что большинство функций Ляпунова, удовлетворяющих теоремам об устойчивости неконсервативной системы (так же как u -функции в задаче о неустойчивости), не являются интегралами исследуемой системы, так же как и системы сравнения.

Опишем обобщенный эвристический метод построения функций Ляпунова, свободный, в значительной степени, от указанных недостатков. Идея этого подхода

состоит в том, что искомые функции Ляпунова принадлежат некоторому функциональному пространству, обобщающему множество M . Приведем описание этого пространства.

Пусть задана гладкая q -параметрическая функция $V(x, \alpha) + \alpha_q$, $q \geq m$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1})$ – вектор произвольных постоянных. Предположим, что эта функция удовлетворяет условию невырожденности

$$\text{rank } V_{x,\alpha} = \min(n, q-1) \quad (2.1)$$

в каждой точке некоторой области изменения векторов x и α .

Будем также считать, что полный интеграл уравнений (1.4), т.е. функция $W(x, C) + C_m$, является частным случаем функции $V(x, \alpha)$:

$$W(x, C) = (V + \alpha_q)|_{\lambda^{m-1}} \quad (2.2)$$

где $\lambda^{m-1} = (\alpha(C), \alpha_q(C))$ – регулярная параметризованная $(m-1)$ -поверхность в пространстве произвольных постоянных α_j .

Введем обозначения: π – регулярная l -поверхность в пространстве произвольных постоянных α, α_q , проходящая через фиксированную точку (α_0, α_{q0}) , $K_l^{(x_0, \alpha_0, \alpha_{q0})}[V]$ – множество огибающих (в окрестности x_0) всевозможных семейств $(V + \alpha_q)|_{\pi}$, когда π пробегает все множество регулярных l -поверхностей, проходящих через точку (α_0, α_{q0}) .

Определение [36]. Пространство

$$T[V] = \bigcup_{l=0}^{\min(q-1, n-1)} T_l[V], \quad T_l[V] = \bigcup_{(x_0, \alpha_0, \alpha_{q0})} K_l^{(x_0, \alpha_0, \alpha_{q0})}[V] \quad (2.3)$$

будем называть функциональным расширением пространства решений уравнений (1.4), а $S = q - n$ – степень пространства $T[V]$.

Очевидно, $M \subseteq T[V]$.

Из этого определения следует, что $T[V]$ состоит из огибающих всевозможных подсемейств функции $V + \alpha_q$, как и пространство M , допускающее $W(x, C) + C_m$ в качестве порождающей функции. В классическом случае ($m - n \leq S \leq 0$) определение множества $T[V]$ дословно повторяет геометрическое описание пространства решений вполне интегрируемой системы уравнений в частных производных первого порядка, для которой функция $V(x, \alpha) + \alpha_0$ – ее полный интеграл [33]. Отсюда следует, что в классическом случае $T[V]$ совпадает со всем множеством решений некоторой системы уравнений типа (1.4), при этом число уравнений, входящих в систему, равно $n - q + 1$.

Рассмотрим неклассический случай $S > 0$. Условие (2.2) гарантирует "структурную согласованность" M и $T[V]$ [36]: $M \subseteq T[V]$, при этом $M_l \subset T_l[V]$ ($l = 0, \dots, n-1$). Отметим, что из всех подпространств $T_l[V]$ наиболее просто устроено $T_0[V]$, так как оно состоит из функций вида $V(x, \alpha) + \alpha_q$, $(\alpha, \alpha_q) = \text{const}$.

В теории таких пространств важен вопрос о связи их с дифференциальными уравнениями. Здесь существенно доказательство теорем, устанавливающих связь пространства $T[V]$ с множеством особых решений линейного уравнения Пфаффа, ассоциированного с функцией V и ковариантного относительно изменения степени S , а также формулировка теорем, устанавливающих связь пространства $T[V]$ со всем множеством решений интегрируемого уравнения в частных производных (УЧП) высокого порядка, нековариантного относительно S .

Рассмотрим уравнение Пфаффа, ассоциированное с V ,

$$\sum_{j=1}^{q-1} V'_{\alpha_j}(x, \alpha) d\alpha_j + d\alpha_q = 0 \quad (q > n) \quad (2.4)$$

Вектор решения $(\alpha(x), \alpha_q(x))$ уравнения (2.4) назовем особым, если

$$\text{rank } \partial(\alpha, \alpha_q) / \partial x < n \quad (2.5)$$

Теорема 1 [37]. Функция $z(x)$ принадлежит пространству $T[V]$ тогда и только тогда, когда существует особое решение $(\alpha(x), \alpha_q(x))$ уравнения (2.4), удовлетворяющее условию

$$z(x) = V(x, \alpha(x)) + \alpha_q(x) \quad (2.6)$$

В классическом варианте ($m - n \leq S \leq 0$) теорема 1 известна как теорема, обосновывающая метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для системы УЧП первого порядка. Условие (2.5) в этом случае выполняется всегда, так как дифференциалы $d\alpha_j(x)$ линейно зависимы в силу уравнения (2.4).

Получим, учитывая (2.4), (2.6), альтернативные формы записи условия вырождения (2.5), не зависящие от вектора $(\alpha(x), \alpha_q(x))$ и его производных по x . Пусть $S = 1$. Условие (2.5) имеет вид

$$\det \alpha_x = 0 \quad (2.7)$$

так как дифференциал $d\alpha_q$ линейно зависит в силу (2.4) от дифференциалов $d\alpha_j$ ($j = 1, \dots, n$).

Продифференцируем равенство (2.6) по x , получим, учитывая (2.4),

$$z_x = V_x(x, \alpha(x)) \quad (2.8)$$

Продифференцируем по x равенство (2.8):

$$(z - V)_{xx} = V_{\alpha x} \cdot \alpha_x, \quad \det V_{\alpha x} \neq 0.$$

Здесь производные вычисляются по явно входящим переменным. Отсюда следует, что α_x и $(z - V)_{xx}$ – эквивалентные матрицы. Поэтому условие (2.7) в совокупности с (2.8) принимает вид

$$\det(z(x) - V(x, \alpha))_{xx} = 0, \quad z_x = V_x(x, \alpha) \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) – n -мерный аналог уравнения Монжа – Ампера. В частном случае $n = 2$ это уравнение является классическим уравнением Монжа – Ампера:

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + \varphi, \quad r = z_{x_1 x_1}, \quad s = z_{x_1 x_2}, \quad t = z_{x_2 x_2} \quad (2.10)$$

коэффициенты которого a, b, c, φ – функции x_1, x_2, z и частных производных z_{x_1}, z_{x_2} . В рассматриваемом случае эти коэффициенты удовлетворяют дополнительному условию

$$c(dx_1)^2 - 2b dx_1 dx_2 + a(dx_2)^2 \equiv d^2 V(x, \alpha(x, z_x)), \quad \varphi = b^2 - ac \quad (2.11)$$

поэтому уравнение (2.10) имеет параболический тип.

Для каждой функции $z(x) \in T[V]$ будем исключать из рассмотрения те значения x , для которых наблюдается падение ранга матрицы $(z - V)_{xx}$. С точностью до указанной оговорки справедлива

Теорема 2 [37]. Пространство $T[V]$ степени $S = 1$ совпадает со всем множеством гладких решений $z(x)$ уравнения типа Монжа – Ампера (2.9).

Рассмотрим случай $S = 2$. Альтернативная форма записи (2.5) имеет вид

$$F(x, z(x), z_x, z_{xx}, z_{xxx}) = 0 \quad (2.12)$$

Теорема 3². Пространство $T[V]$ степени $S = 2$ совпадает со всем множеством гладких решений $z(x)$ некоторого уравнения третьего порядка (2.12).

² Красильников П.С. Функциональные расширения в задачах устойчивости: Дис. ...д-ра физ.-мат. наук: 01.02.01. М., 1996. 254 с.

Случай $S \geq 3$ не изучен.

Заметим [37], что увеличение степени S на единицу приводит к расширению пространства $T[V]$ таким образом, что оно становится вырожденным подмножеством своего расширения. Эта процедура индуцирует включение уравнения, отвечающее пространству $T[V]$, в число промежуточных интегралов уравнения, соответствующего расширенному пространству. Так, уравнение (1.5) является промежуточным интегралом уравнения (2.9), уравнение (2.9) – промежуточный интеграл уравнения (2.12) и т.д.

Итак, в соответствии с эвристическим требованием обобщенного подхода искомые функции Ляпунова являются элементами пространства $T[V]$, т.е. интегралами некоторого интегрируемого УЧП (либо системы УЧП, если $S < 0$).

В классических случаях ($m - n \leq S \leq 0$) эти пространства функционально замкнуты, если функция $V(x, \alpha)$ линейно зависит от α_j ; для любого набора функций $\{G_1, \dots, G_k\} \subset T[V]$ и любой гладкой функции $B(x_1, \dots, x_k)$ имеем $B(G_1, \dots, G_k) \in T[V]$.

Однако если $S > 0$, то пространство $T[V]$ уже не является функционально замкнутым, так как оно описывается нелинейным УЧП. Однако справедлива лемма, устанавливающая факт "частичной функциональной замкнутости" этих пространств.

Лемма. Пусть $V(x, \alpha) + \alpha_q(V(x, \alpha) = \alpha_1 U_1(x) + \dots + \alpha_{q-1} U_{q-1}(x), q > n)$ – невырожденное семейство функций, зависящее линейно от постоянных α_j , $\{G_1, \dots, G_k\} (k \leq n - 1)$ – произвольный набор независимых функций из подпространства $T_0[V]$. Тогда для любой гладкой функции $B(y_1, \dots, y_k)$ имеем

$$B(G_1, \dots, G_k) \in T[V]$$

Доказательство. Из условий леммы вытекает, что функция G_j представима в виде

$$G_j = \alpha_1^{(j)} U_1 + \dots + \alpha_{q-1}^{(j)} U_{q-1} + \alpha_q^{(j)}$$

где $\alpha_i^{(j)}$ – фиксированные значения произвольных постоянных α_i . Рассмотрим невырожденную функцию $W^* + C_{k+1}$, где

$$W^* = \sum_{j=1}^k C_j G_j = \sum_{i=1}^{q-1} U_i \left(\sum_{j=1}^k C_j \alpha_i^{(j)} \right) + \sum_{j=1}^k C_j \alpha_q^{(j)}, \quad C_j = \text{const} \quad (2.13)$$

Из формулы (2.13) следует, что $W^* + C_{k+1}$ – частный случай функции $V(x, \alpha) + \alpha_q$, поэтому $T[W^*] \subset T[V]$. Пространство $T[W^*]$ функционально замкнуто, так как $W^* + C_{k+1}$ – полный интеграл линейного однородного УЧП типа (1.5), если $k = n - 1$, либо полный интеграл системы линейных уравнений типа (1.4), когда $k < n - 1$. Учитывая, что семейство $\{G_1, \dots, G_k\}$ принадлежит подмножеству $T_0\{W^*\} \subset T[W^*]$, имеем $B(G_1, \dots, G_k) \in T[W^*] \subset T[V]$.

В случае $k = n$ утверждение леммы теряет силу: функция $B(G_1, \dots, G_n)$ не принадлежит, вообще говоря, пространству $T[V]$.

Эта лемма существенно упрощает процедуру поиска ν -функций на пространстве $T[V]$. Так, например, построение знакоопределенной функции можно проводить с помощью метода интегральных связей Четаева, подразумевая под интегралами $G_1, \dots, G_k$ решения уравнений с частными производными. Остается в силе теорема Г.К. Пожарицкого о критериях знакоопределенности $B(G_1, \dots, G_k)$ [38] и результаты исследований $B(G_1, \dots, G_k)$ на основе гессиана этой функции [39].

Итак, пусть $V(x, \alpha) + \alpha_q(V(x, \alpha) = \alpha_1 U_1(x) + \dots + \alpha_{q-1} U_{q-1}(x), q > m)$ – невырожденное семейство функций, зависящее линейно от постоянных α_j , частным случаем которого является линейная интегральная связка $W + C_m$, $W = C_1 F_1 + \dots + C_{m-1} F_{m-1}$ системы сравнения (1.2); $T[V]$ – функциональное расширение степени $S = q - n$ множества

$$M = \{F(x): F = B(F_1, \dots, F_{m-1}), B \in C^r(R^{m-1}, R^1)\}$$

Обобщенная схема построения ν -функций из первых интегралов такова. Искомые функции Ляпунова ищутся на множестве $T[V]$ в одном из следующих видов:

1) $\nu(x)$ – линейная функция интегралов $U_j(x)$ ($j = 1, \dots, q-1$);

2) $\nu(x)$ – нелинейная функция независимых интегралов $U_j(x)$ ($j = 1, \dots, k, k \leq n-1$);

функцию $\nu(x)$ можно строить в виде интегральной связки Четаева

$$\nu = \sum_{j=1}^k \lambda_j U_j + \sum_{j=1}^k \mu_j U_j^2, \quad \lambda_j, \mu_j = \text{const}$$

3) $\nu(x)$ – элемент пространства $T[V]$, имеющий наиболее общее представление

$$\nu(x) = \alpha_1(x)U_1(x) + \dots + \alpha_{q-1}(x)U_{q-1}(x) + \alpha_q(x) \quad (2.14)$$

(($\alpha_1(x), \dots, \alpha_q(x)$) – вектор решения уравнения (2.4), удовлетворяющий условию вырождения (2.5));

4) $\nu(x)$ – огибающая некоторого l -параметрического семейства $(V + \alpha_q)_\pi$, где $\pi = (\alpha(C_1, \dots, C_l), \alpha_q(C_1, \dots, C_l))$ – регулярная l -поверхность в пространстве произвольных постоянных α, α_q .

Как показано выше, обобщенная схема сохраняет всю специфику классического подхода, дополняя ее за счет выхода на множество решений уравнений высокого порядка.

Одно из отличий обобщенной схемы от классического подхода состоит в следующем. Построение искомых функций в виде нелинейной функции интегралов $U_j(x)$ не исчерпывает всего множества $T[V]$, что приводит к необходимости использовать в прикладных задачах процедуры 3, 4 описанной схемы. Наиболее общий вид функции $\nu(x)$ как элемента пространства $T[V]$ представлен формулой (2.14).

В диссертации автора (цитируемой в сноске) показано, что большинство решенных задач теории устойчивости, в которых ν -функции строились в явном виде, удовлетворяют обобщенной схеме.

3. О новых критериях асимптотической устойчивости при резонансе 1:1. Рассмотрим задачу устойчивости автономной системы вида

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^4 \quad (3.1)$$

Здесь $X(x)$ – гладкое векторное поле, при этом матрица $(\partial X / \partial x)_0$ имеет чисто мнимые собственные значения λ_1, λ_2 , удовлетворяющие условию $\lambda_1 = \lambda_2$. Считаем также, что λ_1 имеет простые элементарные делители.

Была доказана [40] алгебраическая неразрешимость этой задачи: поверхность S , отделяющая область асимптотической устойчивости от неустойчивости в пространстве параметров, трансцендентна. Показано [41], что алгебраическая неразрешимость не имеет тотального характера: построены алгебраические куски этой поверхности.

Получим новые, более простые критерии асимптотической устойчивости. Комплексная нормальная форма уравнений третьего приближения имеет вид

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + A_{11} z_1^2 \bar{z}_1 + A_{12} z_1 z_2 \bar{z}_2 + A_{13} z_1 \bar{z}_1 z_2 + A_{21} z_1^2 \bar{z}_2 + A_{31} z_2^2 \bar{z}_2 + A_{41} z_2^2 \bar{z}_1 \quad (3.2)$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_1 z_2 + A_{21} z_1 \bar{z}_1 z_2 + A_{22} z_2^2 \bar{z}_2 + A_{51} z_1^2 \bar{z}_1 + A_{61} z_1 z_2 \bar{z}_2 + A_{71} z_1^2 \bar{z}_2 + A_{81} \bar{z}_1 z_2^2$$

где

$$z_1 = x_1 + ix_2, \quad z_2 = x_3 + ix_4, \quad A_{lm} = a_{lm} + ib_{lm}, \quad A_m = a_m + ib_m$$

В полярных координатах r_j, θ_j , связанных с переменными $z_j, \bar{z}_j$ по формулам

$$z_j = \sqrt{r_j} \exp(i\theta_j), \quad \bar{z}_j = \sqrt{r_j} \exp(-i\theta_j)$$

уравнения (3.2) имеют вид $(\theta = (\theta_1 - \theta_2) - \text{резонансный угол})$

$$\dot{r}_j = R_j(r_1, r_2, \theta), \quad \dot{\theta} = \Omega(r_1, r_2, \theta) \quad j = 1, 2 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R_1 &= a_{11} r_1^2 + a_{12} r_1 r_2 + r_1 \sqrt{r_1 r_2} [(a_1 + a_2) \cos \theta + (b_2 - b_1) \sin \theta] + \\ &+ r_2 \sqrt{r_1 r_2} (a_3 \cos \theta - b_3 \sin \theta) + r_1 r_2 (a_4 \cos 2\theta - b_4 \sin 2\theta) \\ \frac{1}{2} R_2 &= a_{21} r_1 r_2 + a_{22} r_2^2 + r_2 \sqrt{r_1 r_2} [(a_6 + a_8) \cos \theta + (b_6 - b_8) \sin \theta] + \\ &+ r_1 \sqrt{r_1 r_2} (a_5 \cos \theta + b_5 \sin \theta) + r_1 r_2 (a_7 \cos 2\theta + b_7 \sin 2\theta) \\ \Omega &= (b_{21} - b_{11} + b_7 \cos 2\theta - a_7 \sin 2\theta) r_1 + (b_{22} - b_{12} - a_4 \sin 2\theta - b_4 \cos 2\theta) r_2 + \\ &+ [(b_6 + b_8 - b_2 - b_1) \cos \theta + (a_8 - a_6 + a_2 - a_1) \sin \theta] \sqrt{r_1 r_2} + (b_5 \cos \theta - a_5 \sin \theta) r_1^{3/2} r_2^{-1/2} - \\ &- (a_3 \sin \theta + b_3 \cos \theta) r_2^{3/2} r_1^{-1/2} \end{aligned}$$

Для построения искомой функции Ляпунова воспользуемся обобщенной схемой. Выберем в качестве уравнений сравнения модельную систему

$$\dot{r}_1 = \frac{\partial H}{\partial \theta_1}, \quad \dot{r}_2 = \frac{\partial H}{\partial \theta_2}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial r_1} - \frac{\partial H}{\partial r_2} \quad (3.4)$$

исследованную ранее [42] и являющуюся частным случаем уравнений (3.3). Здесь

$$\begin{aligned} H &= \lambda_1 (r_1 + r_2) + \frac{1}{2} (b + b_{21} - b_{11}) r_1^2 + b r_1 r_2 + \frac{1}{2} (b - b_{22} + b_{12}) r_2^2 - 2(b_5 r_1 + b_3 r_2) \sqrt{r_1 r_2} \cos \theta + \\ &+ 2(a_5 r_1 - a_3 r_2) \sqrt{r_1 r_2} \sin \theta - (b_4 \cos 2\theta + a_4 \sin 2\theta) r_1 r_2 \end{aligned}$$

есть нормальная форма функции Гамильтона при кратном резонансе. Уравнения (3.4) интегрируются: интегральная связка $W + C_3$, где

$$W = C_1 (H - \lambda_1 (r_1 + r_2)) + C_2 (r_1 + r_2)^2, \quad C_j = \text{const}$$

является полным интегралом Лагранжа линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка, отвечающего системе (3.4). Следовательно, пространство первых интегралов уравнений (3.4) имеет следующий вид:

$$T[W] = T_0[W] \cup T_1[W] \cup T_2[W].$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} V &= \alpha_1 r_1^2 + 2\alpha_2 r_1 r_2 + \alpha_3 r_2^2 + 2r_1 \sqrt{r_1 r_2} (\alpha_4 \cos \theta + \alpha_5 \sin \theta) + 2r_2 \sqrt{r_1 r_2} (\alpha_6 \cos \theta + \alpha_7 \sin \theta) + \\ &+ 2r_1 r_2 (\alpha_8 \cos 2\theta + \alpha_9 \sin 2\theta) \end{aligned} \quad (3.5)$$

частный случай которой – функция W . Здесь α_j – существенные постоянные. Пространство $T[V]$ есть расширение (степени $S = 7$) всего множества $T[W]$:

$$T[V] = T_0[V] \cup T_1[V] \cup T_2[V], \quad T_j[W] \subset T_j[V]$$

Будем вести поиск вспомогательных функций на подпространстве $T_2[V]$, заполненном огибающими всевозможных двух параметрических семейств $(V + \alpha_{10})_\pi$, $\dim \pi = 2$. Для этого рассмотрим двумерную поверхность π , принадлежащую пространству произвольных постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ функции $(V + \alpha_{10})$,

$$\alpha_j = \gamma_{j1} v_1 + \gamma_{j2} v_2, \quad j = 1, \dots, 9; \quad \alpha_{10} = (v_1^2 + v_2^2) / 2$$

Здесь v_1, v_2 – локальные координаты этой поверхности, γ_{ij} – параметры. Видно, что

огнибающая семейства $(V + \alpha_{10})_\pi$ есть

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 [\gamma_{1k} r_1^2 + 2\gamma_{2k} r_1 r_2 + \gamma_{3k} r_2^2 + 2r_1 \sqrt{r_1 r_2} (\gamma_{4k} \cos \theta + \gamma_{5k} \sin \theta) + \\ + 2r_2 \sqrt{r_1 r_2} (\gamma_{6k} \cos \theta + \gamma_{7k} \sin \theta) + 2r_1 r_2 (\gamma_{8k} \cos 2\theta + \gamma_{9k} \sin 2\theta)]^2$$

Вычислим производную от V вдоль векторного поля уравнений (3.3). Получим

$$\dot{V} = r_2^5 [\kappa_0 + \sum_{m=1}^5 (\kappa_{m1} \cos m\theta + \kappa_{m2} \sin m\theta)] \\ \kappa_0 = G_5 k^5 + G_4 k^4 + G_3 k^3 + G_2 k^2 + G_1 k + G_0 \\ \kappa_{1j} = \sqrt{k} (B_{4j} k^4 + B_{3j} k^3 + B_{2j} k^2 + B_{1j} k + B_{0j}) \\ \kappa_{2j} = k (D_{3j} k^3 + D_{2j} k^2 + D_{1j} k + D_{0j}), \quad \kappa_{3j} = \sqrt{k} (L_{3j} k^3 + L_{2j} k^2 + L_{1j} k) \\ \kappa_{4j} = k^2 (M_{1j} k + M_{0j}), \quad \kappa_{5j} = N_j k^{5/2}; \quad j = 1, 2$$

Здесь $k = r_1/r_2$ – переменная величина, коэффициенты $G_j, B_{ij}, D_{ij}, L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}$ квадратично зависят от величины γ_{ij} и линейно от параметров задачи. Так, например,

$$G_5 = 2 \sum_{j=1}^2 \gamma_{1j} [2a_{11} \gamma_{1j} + a_5 \gamma_{4j} + b_5 \gamma_{5j}], \quad G_0 = 2 \sum_{j=1}^2 \gamma_{3j} [2a_{22} \gamma_{3j} + a_3 \gamma_{5j} - b_3 \gamma_{7j}]$$

Выражения для остальных коэффициентов опускаем. Постоянные γ_{ij} выберем так, чтобы обратились в нуль коэффициенты при нечетных степенях тригонометрических функций:

$$B_{ij} = L_{3j} = L_{2j} = L_{1j} = N_j = 0, \quad j = 1, 2; \quad i = 0, \dots, 4$$

Получим алгебраическую систему, состоящую из восемнадцати нелинейных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^9 R_{ij}^m \gamma_{ik} \gamma_{jk} = 0, \quad m = 1, \dots, 18 \quad (3.6)$$

Коэффициенты R_{ij}^m – линейные функции параметров a_{ij}, b_{ij}, a_j, b_j . Число неизвестных величин γ_{ik} равно 18. Выражения для R_{ij}^m опускаем в силу их громоздкости.

Покажем, что система (3.6) имеет нетривиальные решения относительно γ_{ik} . Для этого преобразуем уравнения (3.6) к виду, когда существование нетривиального семейства решений следует из теоремы о неявных функциях.

Уравнения (3.6) линейно зависят от параметров задачи, поэтому их можно записать в виде

$$DA = 0 \quad (3.7)$$

$$A = (a_{11}, a_{12}, a_1 + a_2, b_2 - b_1, a_3, b_3, a_4, b_4, a_{21}, a_{22}, a_5, b_5, a_6 + a_8,$$

$$b_6 - b_8, a_7, b_7, b_{21} - b_{11}, b_{22} - b_{12}, b_6 + b_8 - b_2 - b_4, a_2 - a_1 - a_6 + a_8)^T$$

Здесь D – матрица (18×20) , элементы которой d_{ij} – квадратичные функции γ_{ik} , A – вектор коэффициентов системы (3.3).

Вычисления показывают, что матрица D невырождена, так как в левом верхнем углу расположен минор 18-го порядка, отличный от нуля. Отсюда следует, что система разрешима относительно первых 18-ти элементов вектора A , причем зависимость этих элементов от 18-ти параметров γ_{ik} функции V также невырождена.

Особенность такого представления уравнений (3.6) – инверсия задачи: величины γ_{ik} выбираются произвольно, параметры системы (3.3) определяются как решения уравнений (3.7).

Отсюда следует, на основании теоремы о неявных функциях, что зависимость элементов матрицы A от параметров γ_{ik} локально разрешима относительно γ_{ik} всюду в пространстве параметров системы (за исключением некоторых многообразий нулевой меры).

Пусть γ_{ik}^* – нетривиальное решение системы уравнений (3.6), зависящее от параметров уравнений (3.3). Рассмотрим функцию Ляпунова V^* , представляющую собой ограничение V на это решение. Производная от V^* имеет вид

$$\dot{V}^* = r_2^5 [\kappa_0^*(k) + \sum_{m=2,4} (\kappa_{m1}^* \cos m\theta + \kappa_{m2}^* \sin m\theta)] \quad (3.8)$$

Преобразуем тригонометрический полином, входящий в правую часть выражения (3.8) при помощи подстановки $y = \operatorname{tg}(\theta/2)$. Будем иметь

$$\dot{V}^* = r_2^2 \Lambda(y) (1 + y^2)^{-2} \quad (3.9)$$

$$\Lambda(y) = L_4 y^4 + L_3 y^3 + L_2 y^2 + L_1 y + L_0$$

$$L_4 = \kappa_0^* - \kappa_{21}^* + \kappa_{41}^*, \quad L_3 = 2(\kappa_{22}^* - 2\kappa_{42}^*), \quad L_2 = 2(\kappa_0^* - 3\kappa_{41}^*)$$

$$L_1 = 2(\kappa_{22}^* + 2\kappa_{42}^*), \quad L_0 = \kappa_0^* + \kappa_{21}^* + \kappa_{41}^*$$

В особом случае $\theta = \pi$, отвечающем вырождению введенной замены переменных, функцию $\dot{V}^*$ можно вычислить по формуле

$$\dot{V}^* = r_2^2 L_4 \quad (3.10)$$

Она равна нулю, если $L_4 = 0$, но тогда один из корней многочлена $\Lambda(y)$ "удаляется" на бесконечность. Из выражений (3.9), (3.10) следует, что функция $\dot{V}^*$ знакоопределена в области

$$r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0, \quad 0 \leq \theta < \pi \quad (3.11)$$

тогда и только тогда, когда при любом $k > 0$ полином $\Lambda(y)$ не имеет вещественных корней, включая и бесконечно удаленную точку (на плоскостях $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ функция $\dot{V}^*$ отлична от нуля, если считать $G_0^* \neq 0$, $G_5^* \neq 0$).

Из выражения для функции V^* следует, что она всюду отрицательно знакоопределена, за исключением вырожденных случаев знакопостоянства (аналитическое описание этих вырождений дано ранее [43]). В дальнейшем будем исключать из рассмотрения этот случай.

Теорема. Пусть $G_0^* \neq 0$, $G_5^* \neq 0$ и при этом вещественное алгебраическое уравнение $\Lambda(y) = 0$ не имеет вещественных корней при любом $k > 0$, включая бесконечно удаленную точку. Тогда равновесие полной системы асимптотически устойчиво, если

$$\{\kappa_0^* - \kappa_{21}^* + \kappa_{41}^*\} > 0 \quad (3.12)$$

и неустойчиво в противном случае.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция $\dot{V}^*$ знакоопределена в области (3.11) (члены более высокого порядка малости, отброшенные при выводе уравнений (3.2), не влияют на знак $\dot{V}^*$, так как функция V^* и правые части уравнений (3.2) – однородные полиномы по z_j , $\bar{z}_j$). Из формулы (3.9) следует, что

$$\operatorname{sign} \dot{V}^* = \operatorname{sign} L_4 = \operatorname{sign}(\kappa_0^* - \kappa_{21}^* + \kappa_{41}^*)$$

Рассмотрим случай, когда неравенство (3.12) выполнено. Так как функция V^* отрицательно определена, то $V^*\dot{V}^* < 0$, поэтому V^* удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Если в условии (3.12) знак неравенства противоположный, то знаки функций V^* и $\dot{V}^*$ совпадают в окрестности $r_1 = r_2 = 0$. Поэтому положение равновесия неустойчиво в силу теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Итак, в области $\dot{V}^* > 0$ критерии асимптотической устойчивости алгебраичны. Следовательно, трансцендентная поверхность раздела S , отделяющая область асимптотической устойчивости от неустойчивости в пространстве параметров, алгебраична в этой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lagrange J.-L. Méchanique analitique.* Paris: Desaint, 1788. 512 p.
2. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892. 250 с.
3. *Routh E.J.* A treatise on the stability of a given state of motion. L.: McMilland, 1877. 108 p.
4. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. L.: McMilland, 1884. 343 p.
5. *Иртегов В.Д.* К вопросу об устойчивости стационарных движений твердого тела в потенциальном силовом поле // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 939–942.
6. *Каранетян А.В.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 504–511.
7. *Ковалев Ю.М.* Об устойчивости постоянных винтовых движений в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 2. С. 282–285.
8. *Морозов В.М., Рубановский В.Н., Румянцев В.В., Самсонов В.А.* О бифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 3. С. 387–399.
9. *Осепашвили В.З., Суликашвили Р.С.* Об устойчивости и бифуркации стационарных движений тяжелого гиростата // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 572–575.
10. *Пожарицкий Г.К.* Об устойчивости перманентных вращений твердого тела с закрепленной точкой, находящегося в ньютоновском центральном поле сил // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 792–793.
11. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 4. С. 616–627.
12. *Рубановский В.Н.* Об относительном равновесии спутника-гиростата в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 494–503.
13. *Рубановский В.Н.* Об устойчивости вертикального вращения твердого тела, подвешенного на стержне // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 916–922.
14. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
15. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 922–933.
16. *Румянцев В.В.* Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С.В. Ковалевской // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 4. С. 457–458.
17. *Румянцев В.В.* Об устойчивости эллипсоидов Маклорена вращающейся жидкости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 494–504.
18. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения гиростатов // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 9–16.
19. *Степанов С.Я.* О множестве стационарных движений спутника-гиростата в центральном ньютоновском поле сил и их устойчивости // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 4. С. 737–744.
20. *Анапольский Л.Ю., Иртегов В.Д., Матросов В.М.* Способы построения функций Ляпунова // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1975. Т. 2. С. 53–112.
21. *Тхай В.Н.* Устойчивость автономных и периодических гамильтоновых систем // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1985. С. 122–151.

22. Демин В.Г., Косенко И.И., Красильников П.С., Фурта С.Д. Избранные задачи небесной механики. Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 1999. 211 с.
23. Колесников Н.Н. Об устойчивости свободного твердого тела с полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 606–612.
24. Крементуло В.В. Одна задача об устойчивости шарового гироскопа // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1005–1011.
25. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
26. Румянцев В.В. Об устойчивости движения гироскопов некоторого вида // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 778–784.
27. Румянцев В.В. К задаче об устойчивости вращений тяжелого гироскопа на горизонтальной плоскости с трением // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 263–272.
28. Мухаметзянов И.А. Построение одного семейства функции Ляпунова // Вестн. РУДН. Сер. Прикл. математика и информатика. 1995. № 1. С. 9–12.
29. Румянцев В.В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. I // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 3. С. 374–378.
30. Румянцев В.В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. II // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 4. С. 499–503.
31. Крементуло В.В. Исследование устойчивости гироскопа с учетом сухого трения на оси внутреннего карданова кольца (кожуха) // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 968–970.
32. Крементуло В.В. Устойчивость гироскопа, имеющего вертикальную ось внешнего кольца, при учете сухого трения в осях подвеса // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 3. С. 568–571.
33. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 359 с.
34. Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 354 с.
35. Красильников П.С. Об одной теореме Лагранжа – Имшенецкого // Изв. вузов. Математика. 1998. № 4. С. 34–39.
36. Красильников П.С. Обобщенные пространства ростков гладких решений уравнений 1-го порядка и их связь с прямым методом Ляпунова // Изв. вузов. Математика. 1990. № 5. С. 47–53.
37. Krasil'nikov P.S. Functional extensions of a solution germ space of first order differential equation and their applications // Nonlinear Analysis. Theory, Method and Applicat. 1997. V. 28. № 2. P. 359–375.
38. Пожарицкий Г.К. О построении функций Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 145–154.
39. Rouche N., Habets P., Lalou M. Stability theory by Liapunov's direct method. Berlin, etc.: Springer, 1977. = Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
40. Хазин Л.Г., Шноль Э.Э. Простейшие случаи алгебраической неразрешимости в задачах об асимптотической устойчивости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 6. С. 1309–1311.
41. Красильников П.С. Об алгебраических критериях асимптотической устойчивости при резонансе 1:1 // ПММ. 1993. Т. 57. № 4. С. 5–11.
42. Куницын А.Л., Маркеев А.П. Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1979. Т. 4. С. 58–139.
43. Krasil'nikov P.S. Algebraic criteria for asymptotic stability at 1:1 resonance in the case of sign-constant Lyapunov function // Facta Universitatis. 1999. V. 2. № 9. P. 847–855.