

УДК 531.36:534.1

© 2001 г. А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов

ЯВЛЕНИЕ БУФЕРНОСТИ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Исследуются автоколебания слабо нелинейных систем с распределенными параметрами. С единых позиций метода возмущений Ляпунова–Пуанкаре конструктивно строятся предельные циклы и определяются условия существования и устойчивости "квазилинейных" автоколебательных режимов для двух классов механических объектов. А именно рассматривается модель поперечных колебаний вращающегося тонкого вала круглого сечения с учетом малых линейного внутреннего и нелинейного внешнего вязкого трения и плоская модель линейных колебаний струны, соединенной посередине с автоколебательным контуром (осциллятором) типа Ван-дер-Поля. В обеих моделях установлено "явление буферности", заключающееся в том, что системы могут иметь много устойчивых предельных циклов, зависящих от значения параметров (угловой скорости вращения вала или силы натяжения струны) и отвечающих различным модам колебаний распределенных систем.

В системе уравнений с частными производными имеет место явление буферности, если при подходящем выборе параметров этой системы можно гарантировать существование у нее любого фиксированного числа одностипных аттракторов – состояний равновесия, циклов (т.е. устойчивых периодических по времени решений), торов и т.д.

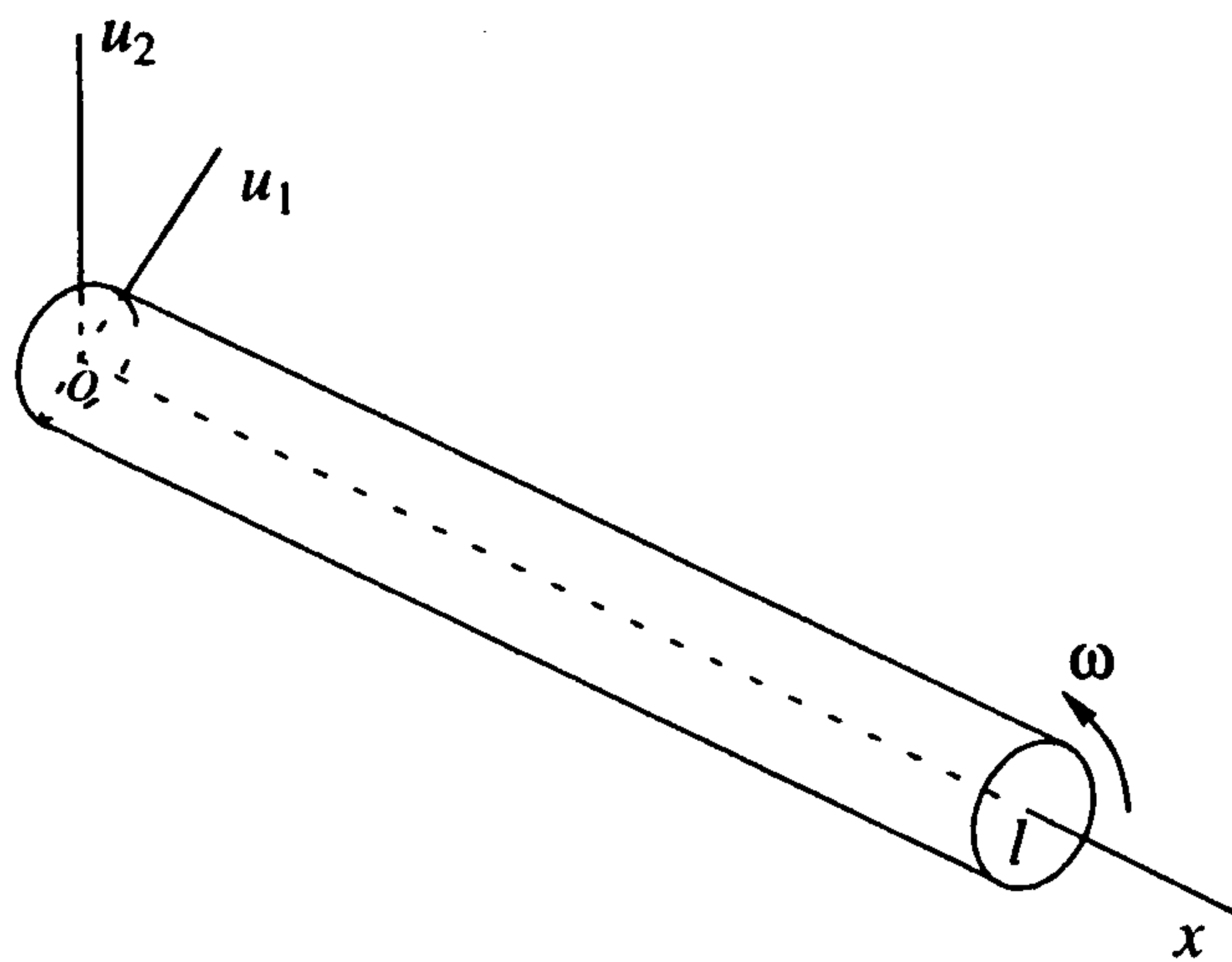
Выполненные к настоящему времени исследования позволяют утверждать, что это явление достаточно универсально и наблюдается в математических моделях из различных областей естествознания: экологии [1, 2], радиофизики [3–5] и т.д. В частности, наличие буферности в задачах радиофизики предвидел еще А.А. Витт [3] в начале 1930-х годов, а из результатов значительно более поздних работ [6–8] следует, что она характерна для широкого класса так называемых автогенераторов с отрезком длинной линии в цепи обратной связи.

Цель данной статьи – показать реализуемость феномена буферности в математических моделях механических систем с распределенными параметрами.

1. Буферность в задаче о поперечных колебаниях вращающегося вала. *Постановка задачи.* Рассмотрим механическую систему, представляющую собой гибкий вал постоянного сечения длины l , вращающийся с постоянной угловой скоростью ω . Для описания математической модели этой системы введем координаты, направляя ось x вдоль оси вала, а оси u_1, u_2 будем считать неподвижными и поместим их в плоскости, перпендикулярной оси вращения (фиг. 1). Пусть $u_1(t, x), u_2(t, x)$ – координаты смещения в момент времени t произвольной точки оси вала относительно равновесного положения $u_1 = u_2 = 0$. Тогда в предположении об упруговязком характере материала вала и в рамках гипотезы плоских сечений для функций $u_j(t, x)$ ($j = 1, 2$) приходим к системе уравнений [9]

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \omega \kappa_1 EJA_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\kappa_1 EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \kappa_2 u \right] = 0 \quad (1.1)$$

$$u = \text{col}(u_1, u_2), \quad A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$



Фиг. 1

Здесь EJ – жесткость сечения вала при изгибе, M – его масса, отнесенная к единице длины, κ_1, κ_2 – коэффициенты внутреннего и внешнего вязкого трения.

Будем считать концы вала шарнирно опертыми. Тогда систему (1.1) на отрезке $0 \leq x \leq l$ следует дополнить граничными условиями

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0 \quad (1.2)$$

Допустим, что коэффициенты M, EJ, κ_1 постоянны, а коэффициент внешнего трения κ_2 зависит от $r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ по закону [9]

$$\kappa_2 = \alpha_1 + \alpha_2 r^2, \quad \alpha_j = \text{const} > 0, \quad j = 1, 2 \quad (1.3)$$

(в силу симметрии задачи коэффициент κ_2 должен зависеть именно от r^2 , а равенство (1.3) – простейшая его аппроксимация в окрестности точки $r = 0$). В итоге, учитывая соотношения (1.3) и выполняя последовательно нормировки

$$x/l \rightarrow x, \quad t\sqrt{EJ/(Ml^4)} \rightarrow t, \quad l^2\sqrt{\alpha_2/(\kappa_1 EJ)}u \rightarrow u$$

получим вместо (1.1) уравнение (I – единичная матрица)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (I + \varepsilon \Omega A_0) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \varepsilon \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [au + (u, u)u] = 0 \quad (1.4)$$

где

$$\varepsilon = \kappa_1 \sqrt{EJ/(Ml^4)}, \quad \Omega = \omega l^2 \sqrt{M/(EJ)}, \quad a = \alpha_1 l^4 / (\kappa_1 EJ) \quad (1.5)$$

В качестве фазового пространства (пространства начальных условий $(u, \partial u/\partial t)$) краевой задачи (1.2), (1.4) возьмем $\dot{W}_2^4([0, 1]; \mathbb{R}^2) \times \dot{W}_2^2([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, где $\dot{W}_2^4, \dot{W}_2^2$ – замыкания в метрике W_2^4 и W_2^2 соответственно линейного пространства гладких вектор-функций, удовлетворяющих граничным условиям (1.2) (в силу сделанной выше нормировки считаем, что в (1.2) теперь $l = 1$).

Для доказательства локальной однозначной разрешимости отвечающей задаче (1.2), (1.4) смешанной задачи в указанном фазовом пространстве сначала положим

$$h_1 = Bu, \quad h_2 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad Bu = -\frac{d^2 u}{dx^2}$$

В результате в пространстве $E = \dot{W}_2^2([0, 1]; \mathbb{R}^2) \times \dot{W}_2^2([0, 1]; \mathbb{R}^2)$ получим систему

$$dh/dt = \mathcal{L}h + \varepsilon F(h) \quad (1.6)$$

где

$$h = \text{col}(h_1, h_2), \quad \mathcal{L} = \Lambda_0 B + \varepsilon \Lambda_1 B + \varepsilon \Lambda_2 B^2 + \varepsilon a \Lambda_2$$

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Omega A_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$$F(h) = \text{col}(0, -(B^{-1}h_1, B^{-1}h_1)h_2 - 2(h_2, B^{-1}h_1)B^{-1}h_1)$$

Следующий шаг доказательства связан с рассмотрением замкнутого линейного оператора $\mathcal{L}$ с плотной в E областью определения. Опираясь на метод Фурье по системе $\sin n\pi x$ ($n = 1, 2, \dots$), можно убедиться, что собственные значения оператора $\mathcal{L}$ – корни уравнений

$$\lambda^2 + \varepsilon(a + \pi^4 n^4)\lambda + \pi^4 n^4(1 - i\varepsilon\Omega) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

а также уравнений, получающихся из (1.8) в результате комплексного сопряжения. Заметим, что корни этих уравнений распадаются на две такие последовательности $\lambda_n^1, \bar{\lambda}_n^1$ и $\lambda_n^2, \bar{\lambda}_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$), что

$$\operatorname{Re} \lambda_n^1 \rightarrow -\infty, \quad \lambda_n^2 \rightarrow -(1 - i\varepsilon\Omega)/\varepsilon, \quad n \rightarrow \infty$$

А отсюда следует, что оператор $\mathcal{L}$ порождает в E аналитическую полугруппу $T(t)$, $t \geq 0$ линейных ограниченных операторов, сильно непрерывную в точке $t = 0$.

На заключительном этапе доказательства дополним систему (1.6) произвольным начальным условием $h|_{t=0} = h_0 \in E$ и перейдем с помощью полугруппы $T(t)$ от рассматриваемой начальной задачи к интегральному уравнению

$$h(t) = T(t)h_0 + \varepsilon \int_0^t T(t-\tau)F(h(\tau))d\tau \quad (1.9)$$

Учитывая, что оператор суперпозиции $F(*) : E \rightarrow E$ является гладким по Фреше, и применяя к уравнению (1.9) принцип сжимающих отображений в некотором шаре пространства $C([0, t_0]; E)$, где $t_0 > 0$ подходящим образом мало, получаем требуемый факт.

Обратим внимание, что при $t > 0$ построенные решения задачи (1.2), (1.4) бесконечно дифференцируемы по t , в чем можно убедиться, применяя к интегральному уравнению (1.9) стандартную технику "накачивания" гладкости (см., например, [10]). Гладкость же этих решений по переменной x не меняется, оставаясь такой, как и при $t = 0$.

Остановимся на вопросе об устойчивости нулевого положения равновесия задачи (1.2), (1.4). Анализ уравнений (1.8) показывает, что оно устойчиво при

$$\Omega < \min_{n \geq 1} \Omega_n, \quad \Omega_n = \omega_n + a/\omega_n, \quad \omega_n = n^2 \pi^2 \quad (1.10)$$

При увеличении же параметра Ω и при прохождении его через критические значения Ω_n , $n \geq 1$, каждый раз ровно один комплексный корень $\lambda = \lambda_n(\Omega, \varepsilon)$, $\lambda_n(\Omega_n, \varepsilon) \equiv i\omega_n$ уравнения (1.8) переходит из левой комплексной полуплоскости в правую и остается там при всех $\Omega > \Omega_n$.

Итак, возникает актуальная проблема существования и устойчивости периодических по t решений задачи (1.2), (1.4), бифурцирующих из нуля при увеличении угловой скорости вращения Ω и при прохождении ее через критические значения Ω_n , $n \geq 1$. Ниже исследование этой проблемы приводится в случае, когда $\varepsilon \ll 1$, а параметры Ω , a имеют порядок единицы.

Существование автомодельных циклов. Полагая $\xi = u_1 + iu_2$, перепишем краевую задачу (1.2), (1.4) в комплексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + (1 - i\varepsilon\Omega) \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \varepsilon \frac{\partial^5 \xi}{\partial t \partial x^4} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [a\xi + |\xi|^2 \xi] &= 0 \\ \xi|_{x=0} = \xi|_{x=1} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Big|_{x=1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

считая, что $\bar{\xi}$ удовлетворяет комплексно-сопряженной краевой задаче. Автомоделным циклом получившейся задачи назовем ее периодическое решение вида

$$\xi(t, x, \varepsilon) = \xi(x, \varepsilon) \exp(i\psi(\varepsilon)t) \quad (1.12)$$

Вопрос о существовании такого решения сводится к нахождению комплекснозначной амплитуды $\xi(x, \varepsilon)$ и вещественной постоянной ψ из нелинейной краевой задачи

$$(1 + i\varepsilon(\psi - \Omega)) \frac{d^4 \xi}{dx^4} - \psi^2 \xi + i\varepsilon\psi(a + |\xi|^2) \xi = 0 \quad (1.13)$$

$$\xi|_{x=0} = \xi|_{x=1} = \frac{d^2 \xi}{dx^2} \Big|_{x=0} = \frac{d^2 \xi}{dx^2} \Big|_{x=1} = 0$$

Заметим еще, что поскольку при $\varepsilon = 0$ задача (1.11) допускает тригонометрические решения

$$\xi = \exp(\pm i\omega_n t) \sin n\pi x, \quad n \geq 1$$

то при малых $\varepsilon > 0$ естественно искать циклы (1.12) с близкими к $\pm\omega_n$, $n \geq 1$, частотами ψ .

Остановимся сначала на алгоритме построения асимптотики автомоделных циклов (1.12). С этой целью фиксируем произвольно натуральное n и положим в (1.13)

$$\psi = \omega_n \sigma(\varepsilon), \quad \sigma(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \dots$$

$$\xi(x, \varepsilon) = \eta_0 \sin n\pi x + \varepsilon\xi_1(x) + \varepsilon^2\xi_2(x) + \dots \quad (1.14)$$

где η_0 , σ_1 , σ_2 и т.д. – неизвестные вещественные постоянные. Приравнивая далее коэффициенты при ε , приходим к краевой задаче

$$L\xi_1 = f_1(x), \quad \xi_1|_{x=0, x=1} = \frac{d^2 \xi_1}{dx^2} \Big|_{x=0, x=1} = 0 \quad (1.15)$$

где

$$L = \frac{d^4}{dx^4} - \omega_n^2, \quad f_1 = [(\Omega - \omega_n)\omega_n - a - \eta_0^2 \sin^2 n\pi x - 2i\omega_n\sigma_1] i\omega_n \eta_0 \sin n\pi x$$

Условие ее разрешимости, т.е. ортогональность в смысле $L_2(0, 1)$ функций $f_1(x)$ и $\sin n\pi x$, приводит в свою очередь к равенству

$$\omega_n(\Omega - \omega_n)\eta_0 - 2i\omega_n\sigma_1\eta_0 - 3\eta_0^3/4 = 0 \quad (1.16)$$

Предположим, что выполняется условие самовозбуждения автоколебаний на частоте ω_n , т.е. неравенство

$$\Omega > \omega_n \quad (1.17)$$

(см. (1.10)). Тогда из (1.16) находим

$$\sigma_1 = 0, \quad \eta_0 = \sqrt{4/3 \omega_n(\Omega - \omega_n)} \quad (1.18)$$

а затем из (1.15) определяем и функцию

$$\xi_1(x) = \frac{i\eta_0^3}{320\omega_n} \sin 3n\pi x + \eta_1 \sin n\pi x \quad (1.19)$$

где η_1 – произвольная вещественная постоянная.

Отметим, что описанный алгоритм может быть продолжен неограниченно: разрешимости аналогичных (1.15) линейных неоднородных краевых задач для $\xi_j(x)$, $j \geq 1$, добиваемся за счет поправки к частоте σ_j и слагаемого $\eta_{j-1} \sin n\pi x$, с точностью до которого определяется $\xi_{j-1}(x)$. При этом в отличие от уравнения разветвления (1.16) для η_{j-1} , σ_j , $j \geq 2$, получаются уже линейные неоднородные уравнения вида

$$-\frac{3}{2}\eta_0^2\eta_{j-1} - 2i\omega_n\eta_0\sigma_j = \varphi_j, \quad j \geq 2 \quad (1.20)$$

из которых эти постоянные находятся однозначно.

Строгий смысл изложенным построениям придает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть параметр Ω фиксирован и удовлетворяет условию (1.17). Тогда при всех достаточно малых ε краевая задача (1.11) имеет автомодельный цикл (1.12), амплитуда $\xi(x, \varepsilon)$ и частота $\psi(\varepsilon)$ которого аналитически зависят от своих переменных и удовлетворяют равенствам

$$\xi(x, 0) = \eta_0 \sin n\pi x; \quad \psi(\varepsilon) = \omega_n \sigma(\varepsilon), \quad \sigma(0) = 1, \quad \sigma'(0) = 0 \quad (1.21)$$

причем постоянная η_0 определена вторым равенством (1.18).

Доказательство. Поделим уравнение из (1.13) на $1 + i\varepsilon(\psi - \Omega)$, затем дополним его комплексно-сопряженным уравнением и подставим в получившуюся систему равенства

$$\begin{aligned} \xi &= \eta_0 \sin n\pi x + \varepsilon \xi_1(x) + \varepsilon^2 h_1, \quad \bar{\xi} = \eta_0 \sin n\pi x + \varepsilon \bar{\xi}_1(x) + \varepsilon^2 h_2 \\ \psi &= \omega_n(1 + \varepsilon^2 \delta) \end{aligned} \quad (1.22)$$

где постоянную δ и фигурирующую в определении $\xi_1(x)$ (см. (1.19)) постоянную η_1 считаем произвольными. В итоге получаем уравнение

$$\Pi h = G(x, h, \delta, \eta_1, \varepsilon) \quad (1.23)$$

где

$$h = \text{col}(h_1, h_2), \quad \Pi = \text{col}(L, L), \quad G(x, h, \delta, \eta_1, 0) = \text{col}(\Delta, \bar{\Delta}) \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \omega_n^2 [i(\Omega - \omega_n)\xi_1(x) + (2\delta - (\Omega - \omega_n)^2)\eta_0 \sin n\pi x] - \\ &- i\omega_n [a\xi_1(x) + (2\xi_1(x) + \bar{\xi}_1(x))\eta_0^2 \sin^2 n\pi x] + \\ &+ \omega_n(\Omega - \omega_n)(a + \eta_0^2 \sin^2 n\pi x)\eta_0 \sin n\pi x \end{aligned} \quad (1.25)$$

(оператор L тот же, что и в задаче (1.15)).

Видно, что в подпространстве $V_0 \subset \dot{W}_2^4 \times \dot{W}_2^4$ вектор-функций (с комплексными компонентами), ортогональных в смысле $L_2(0, 1) \times L_2(0, 1)$ вектор-функциям

$$e_1 \sin n\pi x, \quad e_2 \sin n\pi x; \quad e_1 = \text{col}(1, 0), \quad e_2 = \text{col}(0, 1) \quad (1.26)$$

оператор Π имеет ограниченный обратный. Поэтому, подправляя надлежащим образом неоднородность G и обращая Π , перейдем от уравнения (1.23) к интегральному уравнению в пространстве V_0

$$h = \Pi^{-1}(G - \gamma_1 e_1 \sin n\pi x - \gamma_2 e_2 \sin n\pi x) \quad (1.27)$$

где

$$\gamma_j = 2 \int_0^1 (G, e_j) \sin n\pi x dx, \quad j = 1, 2 \quad (1.28)$$

Заметим, что правая часть уравнения (1.27) порождает в V_0 нелинейный оператор F , аналитически зависящий как от h , так и от параметров δ , η_1 , ε . Кроме того, из соотношений (1.24), (1.25) следует, что оператор F преобразует в себя некоторый шар пространства V_0 , не зависящего от ε радиуса с центром в нуле, и является в этом шаре сжимающим (с константой сжатия порядка ε). Тем самым в силу принципа сжимающих отображений (соответствующий вариант которого см., например, в [11]) из (1.27) однозначно определяется аналитически зависящая от ε , δ , η_1 (в метрике V_0) вектор-функция

$$h_0 = \text{col}(h_1^0(x, \delta, \eta_1, \varepsilon), h_2^0(x, \delta, \eta_1, \varepsilon)) \quad (1.29)$$

Кроме того, из структуры уравнений (1.23) и (1.27) следует, что

$$h_2^0 = \bar{h}_1^0 \quad (1.30)$$

Заключительный этап доказательства связан с определением произвольных вещественных постоянных δ и η_1 из условий равенства нулю фигурирующих в (1.27) поправок к неоднородности G . Подставляя в равенство (1.28) вектор-функцию (1.29), получим аналитические по совокупности переменных комплексозначные функции $\gamma_j(\delta, \eta_1, \varepsilon)$ ($j = 1, 2$), причем из структуры G и из равенства (1.30) следует, что $\gamma_2 = \bar{\gamma}_1$. Поэтому условия $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ эквивалентны требованию

$$\gamma_1(\delta, \eta_1, \varepsilon) = 0 \quad (1.31)$$

Для анализа уравнения (1.31) снова привлечем соотношения (1.24) и (1.25), откуда следует, что при $\varepsilon = 0$ оно переходит в аналогичное (1.20) уравнение

$$-\frac{3}{2}\eta_0^2\eta_1 - 2i\omega_n\eta_0\delta = ia\eta_0(\Omega - \omega_n)$$

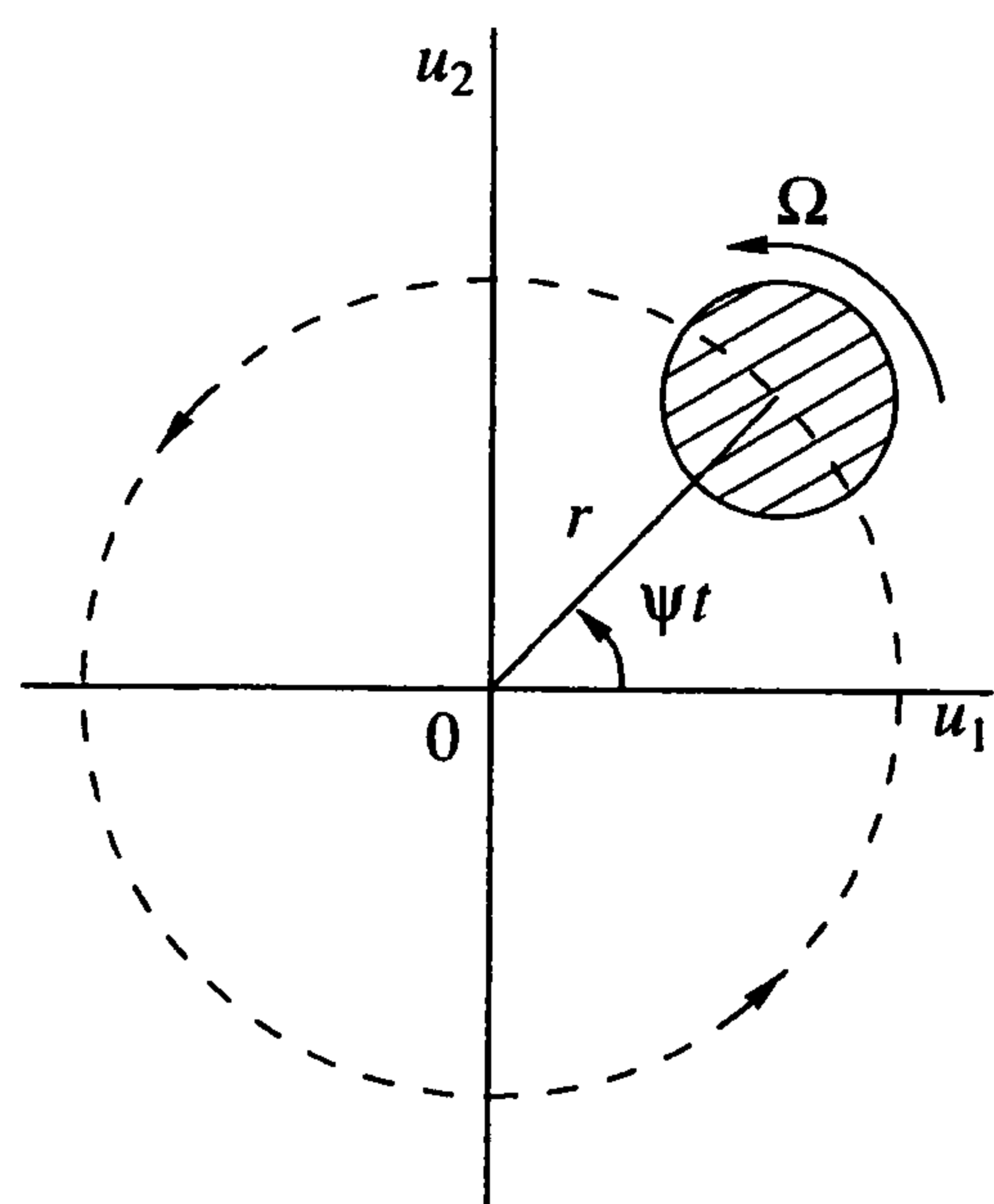
имеющее, очевидно, единственное решение

$$\eta_1 = 0, \quad \delta = \delta_*; \quad \delta_* = a(\omega_n - \Omega)/(2\omega_n)$$

А отсюда в свою очередь заключаем, что в точке $\varepsilon = \eta_1 = 0$, $\delta = \delta_*$ к уравнению (1.31) применима теорема о неявной функции. Тем самым из условия (1.31) однозначно определяются аналитические в окрестности $\varepsilon = 0$ функции

$$\eta_1 = \eta_1(\varepsilon), \quad \delta = \delta(\varepsilon): \eta_1(0) = 0, \quad \delta(0) = \delta_* \quad (1.32)$$

И наконец, подставляя выражения (1.29), (1.32) в систему (1.22), получаем иско-мый автомодельный цикл задачи (1.11).



Фиг. 2

Периодические решения вида (1.12) допускают наглядную механическую интерпретацию. Фиксируем произвольно значение $x_0 \in (0, 1)$ и рассмотрим точку оси вала, лежащую в сечении $x = x_0$. Из решения (1.12) следует, что эта точка совершает в плоскости $x = x_0$ движение вокруг своего равновесного состояния $u_1 = u_2 = 0$ по окружности радиуса $r = |\xi(x_0, \varepsilon)|$ с постоянной угловой скоростью $\psi(\varepsilon)$ (фиг. 2). Такое движение называют *установившейся асинхронной прецессией* [9]. Термин "асинхронная" в данном случае означает, что угловая скорость Ω вращения вала вокруг своей оси в силу условия (1.17) отличается от угловой скорости $\psi(\varepsilon)$, $\psi(0) = \omega_n$, прецессионного движения.

Отметим, что задача (1.11) заведомо не имеет авто-модельных циклов (1.12) с частотами $\psi(\varepsilon)$, $\psi(0) = -\omega_n$. С механической точки зрения это очевидно, так как

вращение вала вокруг своей оси и прецессия не могут быть разнонаправленными. Математически это также ясно: заменяя ω_n на $-\omega_n$ в (1.14), для определения амплитуды η_0 приходим к уравнению $\eta_0^2 = -4\omega_n(\Omega + \Omega_n)/3$, не имеющему вещественных решений.

Устойчивость автомодельных циклов. Для исследования устойчивости цикла (1.12), (1.21) с произвольно фиксированным номером n рассмотрим краевую задачу

$$\lambda^2 v + \lambda \Pi_1 v + \Pi_2 v = 0, \quad v|_{x=0} = v|_{x=1} = \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=0} = \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=1} = 0 \quad (1.33)$$

где

$$v = \text{col}(v_1, v_2), \quad \Pi_1 v = 2i\psi(\varepsilon)Q_0 v + \varepsilon \frac{d^4 v}{dx^4} + \varepsilon[Q_1(x, \varepsilon) + aI]v$$

$$\Pi_2 v = [I + i\varepsilon(\psi(\varepsilon) - \Omega)Q_0] \frac{d^4 v}{dx^4} - \psi^2(\varepsilon)v + i\varepsilon\psi(\varepsilon)Q_0[Q_1(x, \varepsilon) + aI]v$$

$$Q_0 = \text{diag}\{1, -1\}, \quad Q_1 = \begin{Bmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{Bmatrix}, \quad p = 2|\xi(x, \varepsilon)|^2, \quad q = \xi^2(x, \varepsilon)$$

Подчеркнем, что спектральная задача (1.33) получается из уравнения (1.11) и комплексно-сопряженного к нему после замен

$$\xi \exp(-i\psi(\varepsilon)t) \rightarrow \xi, \quad \bar{\xi} \exp(i\psi(\varepsilon)t) \rightarrow \bar{\xi}$$

переводящих цикл (1.12) в состояние равновесия $(\xi(x, \varepsilon), \bar{\xi}(x, \varepsilon))$, и последующей линеаризации на этом состоянии равновесия. Отметим также, что в силу своего происхождения задача (1.33) всегда имеет нулевое собственное значение (СЗ), которому отвечает собственная функция (СФ) $\text{col}(i\xi, -i\bar{\xi})$. И наконец, обратим внимание, что если задача (1.33) имеет СЗ λ_0 с СФ $\text{col}(v_1^0, v_2^0)$, то она будет иметь и СЗ $\bar{\lambda}_0$ с СФ $\text{col}(\bar{v}_2^0, \bar{v}_1^0)$.

При $\varepsilon = 0$ спектр задачи (1.33) состоит из группы СЗ $i(\omega_m - \omega_n), i(\omega_m + \omega_n)$, $m \geq 1$ с СФ $e_1 \sin m\pi x$ и $e_2 \sin m\pi x$ соответственно (векторы e_1, e_2 те же, что и в (1.26)) и из комплексно-сопряженных СЗ. Поэтому исследование устойчивости цикла (1.12), (1.21) связано в первую очередь с построением асимптотики по ε указанных СЗ.

Алгоритм построения асимптотики изложим сначала в случае нечетного n . Для этого при $m \neq n$, $m = 1, 2, \dots$, подставим в (1.33) выражения

$$v = e_j \sin m\pi x + \varepsilon h_m^j(x) + \dots, \quad \lambda = i(\omega_m + (-1)^j \omega_n) + \varepsilon \mu_m^j + \dots, \quad j = 1, 2 \quad (1.34)$$

В результате после приравнивания коэффициентов при ε получим краевые задачи

$$L_j h_m^j = \varphi_j(x), \quad h_m^j|_{x=0, x=1} = \frac{d^2 h_m^j}{dx^2} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad j = 1, 2 \quad (1.35)$$

где

$$L_j = \frac{d^4}{dx^4} - H_j, \quad H_1 = \text{diag}\{\omega_m^2, (\omega_m - 2\omega_n)^2\}, \quad H_2 = \text{diag}\{(\omega_m + 2\omega_n)^2, \omega_m^2\}$$

$$\varphi_j = -i\omega_m[2\mu_m^j + \omega_m(\Omega_m + (-1)^j \Omega)]e_j \sin m\pi x - \\ -i[(\omega_m + (-1)^j \omega_n)Q_1(x, 0) + \omega_n Q_0 Q_1(x, 0)]e_j \sin m\pi x$$

Требуя в неоднородностях $\varphi_j(x)$ обращения в нуль коэффициентов при $e_j \sin m\pi x$, находим

$$\mu_m^j = \frac{1}{2}[\omega_m((-1)^{j-1}\Omega - \Omega_m) - \frac{4}{3}\omega_n(\Omega - \Omega_n)], \quad j = 1, 2 \quad (1.36)$$

а затем из задачи (1.35) определяем и функции h_m^j в виде линейной комбинации гармоник $\sin m\pi x$, $\sin(m \pm 2n)\pi x$ с векторными коэффициентами. Подчеркнем, что последнее возможно в силу неравенств

$$\omega_m^2 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2 \neq 0, \quad \omega_{m \pm 2n}^2 - (\omega_m + 2\omega_n)^2 \neq 0, \quad \omega_{m \pm 2n}^2 - (\omega_m - 2\omega_n)^2 \neq 0$$

вытекающих из предполагаемой нечетности n и условия $m \neq n$.

При $m = n$, $j = 2$ формулы (1.34) сохраняются, причем в этом случае описанные действия приводят к равенству

$$\mu_n^2 = -\omega_n(3\Omega - \Omega_n)/2 \quad (1.37)$$

В случае $m = n$, $j = 1$ в первом приближении, т.е. при $\varepsilon = 0$, имеем дело с нулевым СЗ, которое двукратно: ему отвечают две линейно независимые СФ $e_k \sin n\pi x$, $k = 1, 2$. Поэтому здесь вместо (1.33) рассмотрим матричную краевую задачу

$$V\Lambda^2 + \Pi_1 V\Lambda + \Pi_2 V = 0, \quad V|_{x=0, x=1} = \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x=0, x=1} = 0 \quad (1.38)$$

где V , Λ – квадратные матрицы, а операторы Π_1 и Π_2 применяются к каждому столбцу матрицы в отдельности: например, если $V = [\nu_1(x), \nu_2(x)]$, то $\Pi_2 V = [\Pi_2 \nu_1, \Pi_2 \nu_2]$. Полагая, далее, в задаче (1.38)

$$\Lambda = \varepsilon \Lambda_1 + \dots, \quad V = V_1(x) + \varepsilon V_2(x) + \dots$$

$$V_1 = [e_1 \sin n\pi x, e_2 \sin n\pi x] \quad (1.39)$$

и действуя описанным выше образом, для столбцов V_2 получим аналогичные (1.35) линейные неоднородные краевые задачи, а элементы постоянной матрицы Λ_1 определяем из условий их разрешимости. Опуская несложные вычисления, приведем окончательный результат:

$$\Lambda_1 = -\frac{\omega_n}{2}(\Omega - \Omega_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.40)$$

Заметим, что одно собственное значение матрицы (1.40) нулевое (так как (1.33) – линеаризация на цикле), а другое отрицательное.

Предположим теперь, что n четное: $n = 2m_0$. Очевидно, что при $m \neq m_0, 3m_0$, а также в случаях $m = m_0, j = 1$ и $m = 3m_0, j = 2$ все указанные выше построения остаются в силе. Новый момент возникает, только если $m = 3m_0, j = 1$ или $m = m_0, j = 2$. Действительно, тогда при $\varepsilon = 0$ имеем дело с двукратным СЗ $\lambda = 5i\omega_{m_0}$, которому отвечают линейно независимые СФ $e_1 \sin 3m_0\pi x$, $e_2 \sin m_0\pi x$. Поэтому для получения асимптотики данных собственных значений подставим в (1.38) аналогичные (1.39) квадратные матрицы

$$\Lambda = 5i\omega_{m_0} I + \varepsilon \Lambda_1 + \dots, \quad V = V_1(x) + \varepsilon V_2(x) + \dots \quad (1.41)$$

$$V_1 = [e_1 \sin 3m_0\pi x, e_2 \sin m_0\pi x], \quad V_2 = [\nu_{21}(x), \nu_{22}(x)]$$

$$\Lambda_1 = \|\lambda_{jk}\|, \quad j, k = 1, 2$$

и приравняем коэффициенты при ε . В результате приходим к краевым задачам

$$L_0 v_{2j} = \varphi_j(x), \quad v_{2j}|_{x=0, x=1} = \frac{d^2 v_{2j}}{dx^2} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad j = 1, 2$$

где

$$L_0 = \frac{d^4}{dx^4} - \text{diag}\{\omega_{3m_0}^2, \omega_{m_0}^2\}$$

$$\varphi_1 = -i(2\omega_{3m_0}\lambda_{11}e_1 \sin 3m_0\pi x + 2\omega_{m_0}\lambda_{21}e_2 \sin m_0\pi x) +$$

$$+i\omega_{3m_0}^2(\Omega - \Omega_{3m_0})e_1 \sin 3m_0\pi x - i\omega_{m_0}(5I + 4Q_0)Q_1(x, 0)e_1 \sin 3m_0\pi x$$

$$\varphi_2 = -i(2\omega_{3m_0}\lambda_{12}e_1 \sin 3m_0\pi x + 2\omega_{m_0}\lambda_{22}e_2 \sin m_0\pi x) -$$

$$-i\omega_{m_0}^2(\Omega + \Omega_{m_0})e_2 \sin m_0\pi x - i\omega_{m_0}(5I + 4Q_0)Q_1(x, 0)e_2 \sin m_0\pi x$$

Анализ этих задач стандартен: сначала, приравнявая в неоднородностях φ_j ($j = 1, 2$) к нулю коэффициенты при $e_1 \sin 3m_0\pi x$, $e_2 \sin m_0\pi x$, находим элементы Λ_1 , а затем определяем и функции v_{2j} ($j = 1, 2$). Проведя соответствующие вычисления, убеждаемся, что

$$\lambda_{11} = \mu_{3m_0}^1, \quad \lambda_{22} = \mu_{m_0}^2, \quad \lambda_{21} = \lambda_{12} = -\omega_{2m_0}(\Omega - \Omega_{2m_0})/6 \quad (1.42)$$

(определение μ_m^j см. в (1.36), (1.37)).

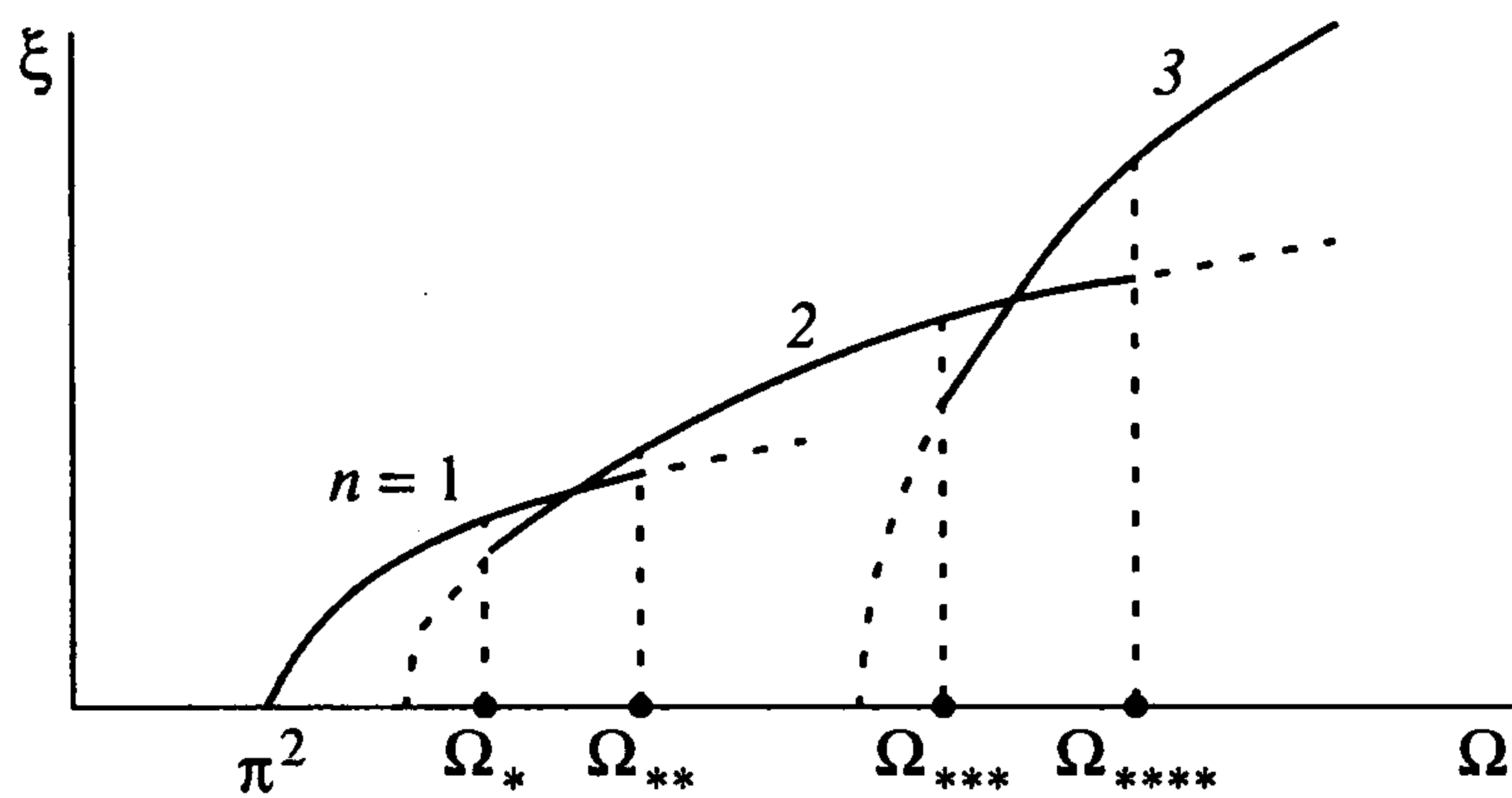
Итак, за устойчивость цикла (1.12), (1.21) в случае нечетного n отвечают знаки фигурирующих в (1.36) чисел μ_m^1 при $m \geq 1$, $m \neq n$ (числа μ_m^2 в силу их отрицательности из рассмотрения можно исключить). В случае же $n = 2m_0$ устойчивость этого цикла определяется по знакам чисел μ_m^1 при $m \neq 3m_0, 2m_0$ и по знакам СЗ матрицы с элементами (1.42). Предположим, что все указанные числа отличны от нуля и количество положительных среди них равно m_* . Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Цикл (1.12), (1.21) краевой задачи (1.11) экспоненциально орбитально устойчив при $m_* = 0$ и дихотомичен при $m_* > 0$ с размерностью неустойчивого многообразия, равной $2m_* + 1$.

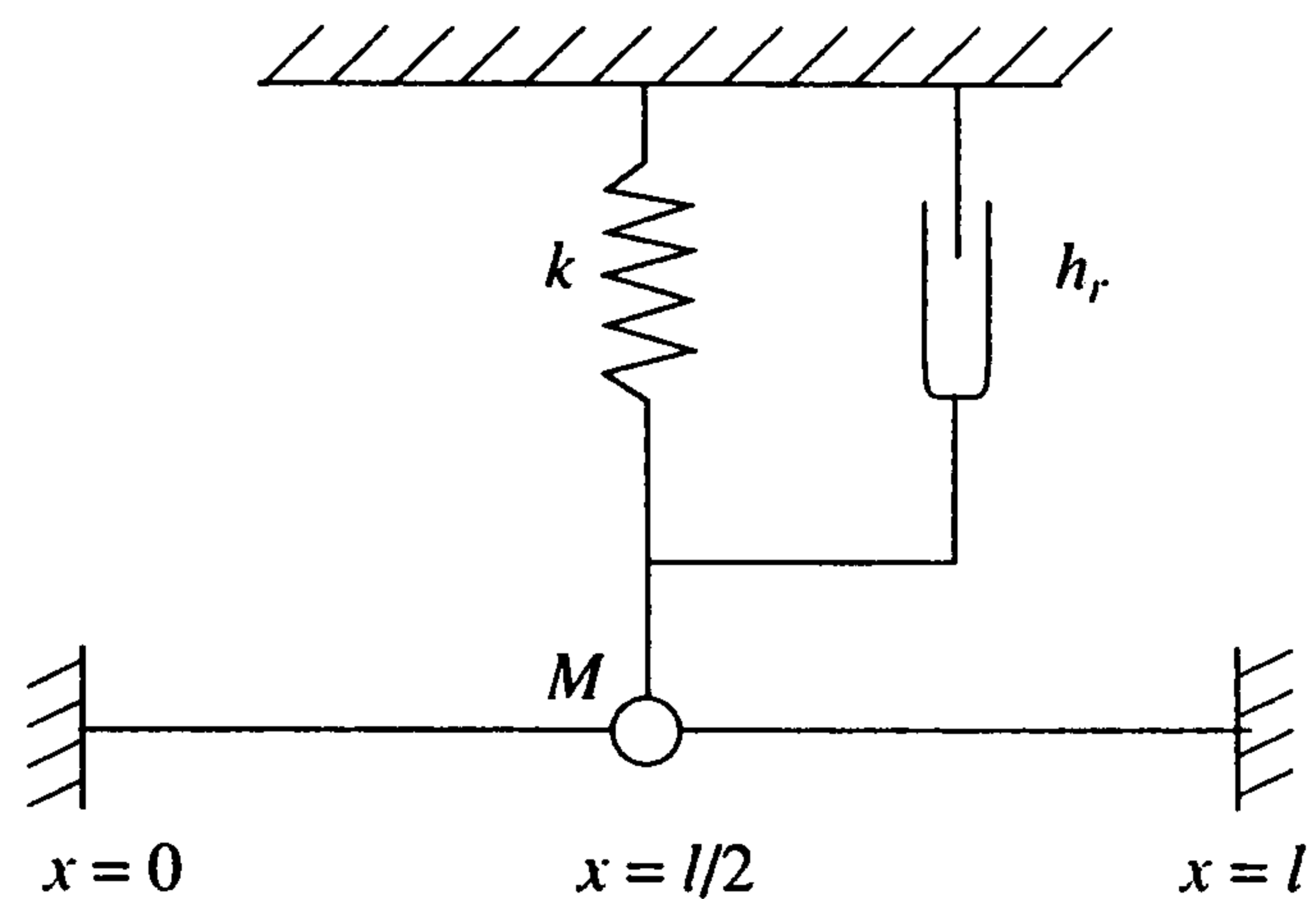
Доказательство. Обозначим через $\lambda_m^j(\varepsilon)$ ($j = 1, 2$) СЗ задачи (1.33), обращающиеся при $\varepsilon = 0$ в $i(\omega_m + (-1)^j\omega_n)$. Заметим, что обоснование асимптотических равенств (1.34) при любом фиксированном m , а также равенств (1.39), (1.41) без затруднений проходит по той же схеме, что и анализ в нелинейной задаче (1.13). Следует, однако, подчеркнуть, что эти равенства заведомо не являются равномерно пригодными при всех m . Поэтому для выявления асимптотического поведения $\lambda_m^j(\varepsilon)$ ($j = 1, 2$) при $m \rightarrow \infty$ обратимся к вспомогательной краевой задаче, получающейся из (1.33) при отбрасывании несущественных в данной ситуации слагаемых, содержащих $Q_1(x, \varepsilon)$. Спектр же последней – корни уравнений, получающихся из (1.8) при замене n на m и λ на $\lambda + i\psi(\varepsilon)$. А отсюда в свою очередь заключаем, что, во-первых,

$$\lambda_m^1(\varepsilon) \rightarrow -[1 + i\varepsilon(\psi(\varepsilon) - \Omega)]/\varepsilon, \quad \text{Re } \lambda_m^2(\varepsilon) \rightarrow -\infty, \quad m \rightarrow \infty$$

во-вторых, найдется такое не зависящее от ε достаточно большое натуральное N , что $\text{Re } \lambda_m^j(\varepsilon) < 0$ ($j = 1, 2$) при всех $m \geq N$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Итак, за устойчивость цикла (1.12), (1.21) отвечает лишь конечное число СЗ $\lambda_m^j(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, m \leq N$). Поэтому она определяется знаками чисел μ_m^1 , а также собственных значений матрицы (1.42) – в случае четного n .

Выводы. Анализ условий устойчивости цикла (1.12), (1.21) с фиксированным номером n проведем в наиболее благоприятном для возбуждения автоколебаний случае $a = 0$, поскольку все получающиеся при этом выводы сохраняются и при $a > 0$. Согласно изложенному выше, при $a = 0$ и при нечетном n эти условия имеют вид

$$P(\sigma, m^2/n^2) < 0, \quad m = 1, 2, \dots, m \neq n \quad (1.43)$$

$$P(\sigma, y) = \sigma y - y^2 - 4(\sigma - 1)/3, \quad \sigma = \Omega/\omega_n > 1$$

Если же $n = 2m_0$, то выполнения условий (1.43) надо требовать при $m \neq 2m_0, 3m_0$ и, кроме того, добавляется еще условие, означающее выполнение условия Гурвица для матрицы (1.42):

$$R(\sigma) \equiv \left(\frac{11}{12} \sigma - \frac{179}{48} \right) \left(-\frac{19}{12} \sigma + \frac{61}{48} \right) - \frac{1}{9} (\sigma - 1)^2 > 0 \quad (1.44)$$

Исследование условий (1.43), (1.44) показывает, что при $n = 1, 2, 3$ диапазоны устойчивости циклов (1.12), (1.21) задаются соответственно неравенствами

$$\pi^2 < \Omega < 11\pi^2/2, \quad 61\pi^2/13 < \Omega < 4\pi^2\sigma_*, \quad 23\pi^2/2 < \Omega < 37\pi^2 \quad (1.45)$$

где $\sigma_* = 3.681\dots$ – наибольший корень уравнения $R(\sigma) = 0$. Из (1.45), в частности, следует, что устойчивые циклы (1.12), (1.21) с номерами $n = 1, 2$ сосуществуют на интервале (Ω_*, Ω_{**}) , а устойчивые циклы с номерами $n = 2, 3$ – на интервале $(\Omega_{***}, \Omega_{****})$, где

$$\Omega_* = 46.31\dots, \quad \Omega_{**} = 54.28\dots, \quad \Omega_{***} = 113.50\dots, \quad \Omega_{****} = 145.32\dots \quad (1.46)$$

(фиг. 3; участки амплитудных кривых $\xi = \sqrt{4\omega_n(\Omega - \omega_n)/3}$ ($n = 1, 2, 3$), соответствующие устойчивым циклам, изображены сплошной линией).

Итак, в наиболее интересном случае $a = 0$ устойчивые периодические решения задачи (1.11) зависят от параметра Ω следующим образом. При небольших угловых скоростях вращения, а именно при $\Omega < \pi^2$, устойчиво ее нулевое положение равновесия (прецессия отсутствует). С увеличением скорости Ω при прохождении ее через первое критическое значение π^2 из нуля бифурцирует устойчивый цикл (1.12), (1.21) с номером $n = 1$, который сохраняет устойчивость на первом интервале (1.45) и становится неустойчивым при $\Omega > 11\pi^2/2$.

В случае циклов (1.12), (1.21) при $n \geq 2$ ситуация несколько иная. Каждый такой цикл бифурцирует из неустойчивого нулевого положения равновесия при прохождении Ω через критическое значение ω_n и сначала сам, естественно, является неустойчи-

вым. Однако при дальнейшем увеличении Ω он становится устойчивым и заведомо остается таковым на интервале

$$4\omega_n/3 < \Omega < 4\omega_n \text{ в случае нечетного } n \quad (1.47)$$

$$4\omega_n/3 < \Omega < \sigma_* \omega_n \text{ в случае четного } n \quad (1.48)$$

Действительно, интервалу (1.47) соответствуют значения $\sigma \in (4/3, 4)$, при которых для любого $y \geq 0$ справедливо неравенство $P(\sigma, y) < 0$. Тем самым все условия устойчивости (1.43) на этом интервале выполняются автоматически. В случае же четного n происходит сужение интервала устойчивости (ср. условия (1.47) и (1.48)) за счет того, что $R(\sigma) > 0$ при $1 \leq \sigma < \sigma_*$ и $R(\sigma) < 0$ при $\sigma > \sigma_*$.

Добавим еще, что реальные диапазоны устойчивости циклов (1.12), (1.21) обладают следующими свойствами. Во-первых, они несколько шире, чем интервалы (1.47), (1.48) (ср., например, второй и третий интервалы (1.45) с интервалами (1.48) при $n = 2$ и (1.47) при $n = 3$). Во-вторых, указанные диапазоны заведомо конечны, так как $P(\sigma, m^2/n^2) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$ и при любом фиксированном $m > 2n/\sqrt{3}$. В-третьих, любые два соседних диапазона с номерами n и $n + 1$ пересекаются: при $n \leq 2$ это проверяется непосредственно (см. фиг. 3), а при $n \geq 3$ является следствием того, что пересекаются соответствующие интервалы (1.47) и (1.48). И наконец, в-четвертых, при увеличении Ω неравенства (1.47), (1.48) начинают одновременно выполняться для все большего числа номеров n , а значит, при $\Omega \rightarrow \infty$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ количество сосуществующих устойчивых циклов (1.12), (1.21) задачи (1.11) неограниченно растет, т.е. реализуется *феномен буферности*.

В заключение отметим, что поскольку при увеличении Ω устойчивыми становятся циклы (1.12), (1.21) со все более высокими номерами n , а циклы с младшими номерами, наоборот, теряют устойчивость, то здесь уместно говорить о *высокомодовой буферности*. Подчеркнем также, что в принципе увеличения числа устойчивых циклов можно добиться только за счет увеличения длины вала l (при фиксированных прочих параметрах и при достаточно малом a), так как в этом случае одновременно увеличивается Ω и уменьшается ε (см. (1.5)). Однако в наиболее реалистичном диапазоне параметров (см. (1.46)) имеется один или максимум два устойчивых цикла.

2. Буферность в задаче о взаимодействии струны с осциллятором. *Постановка задачи и описание результата.* Рассмотрим автоколебательную систему (фиг. 4), состоящую из однородной струны длины l с закрепленными концами, к центру которой подключен генератор механических колебаний. Будем считать, что возбуждаемая струна характеризуется плотностью ρ , натяжением T и плотностью сил трения h , а генератор представлен в виде резонатора, состоящего из массы M , пружины с упругостью k и нелинейного элемента трения h_r . Обозначим через u_1 и u_2 смещения участков струны слева и справа от точки $l/2$, а через v – смещение массы M от положения равновесия. Тогда уравнения колебаний струны и генератора записываются в виде [12]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + h \frac{\partial u_j}{\partial t} &= T \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad j = 1, 2 \\ u_1|_{x=0} &= u_2|_{x=l} = 0, \quad u_1|_{x=l/2} = u_2|_{x=l/2} = v(t) \\ M \frac{d^2 v}{dt^2} + h_r \frac{dv}{dt} + kv &= T \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=l/2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Предположим, что $h_r(v) = \lambda(v^2 - 1)$, $\lambda > 0$, т.е. рассмотрим ван-дер-полевскую характеристику. Тогда, полагая в силу симметрии

$$u_1(t, x) = u_2(t, l - x) = u(t, x), \quad 0 \leq x \leq l/2$$

и выполняя подходящие нормировки переменных t, x , от задачи (2.1) переходим к следующей краевой задаче на отрезке $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{x=0} &= 0, \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \alpha (u^2 - 1) \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \right]_{x=1} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Всюду ниже будем считать, что $0 < \varepsilon \ll 1$, а параметры $\alpha, \beta, \gamma > 0$ и имеют порядок единицы.

В качестве фазового пространства краевой задачи (2.2) возьмем

$$\left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \in \dot{W}_2^2(0, 1) \times \dot{W}_2^1(0, 1)$$

где $\dot{W}_2^m$ ($m = 1, 2$) – соболевские пространства функций, удовлетворяющих первому граничному условию из (2.2). Отметим, что однозначная разрешимость отвечающей (2.2) смешанной задачи с начальными условиями из указанного фазового пространства устанавливается стандартно: линейное уравнение из (2.2) интегрируется по характеристикам, а результат подставляется в граничные условия (см., например, [6]).

Будем интересоваться вопросами о существовании и устойчивости циклов задачи (2.2), бифурцирующих из нуля при увеличении параметра α . Обратим внимание, что при $\varepsilon = 0$ спектр устойчивости ее нулевого состояния равновесия состоит из чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_n$ ($n = 1, 2, \dots$), где ω_n , $n \geq 1$, – занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения

$$P(\omega) \equiv (\beta - \omega^2) \sin \omega + \gamma \omega \cos \omega = 0 \quad (2.3)$$

и этим собственным значениям отвечают решения Ляпунова – Флоке

$$u = \exp(\pm i\omega_n t) \sin \omega_n x \quad (2.4)$$

Таким образом, речь пойдет о периодических по t решениях задачи (2.2) с близкими к ω_n частотами; алгоритм построения асимптотики таких решений приводится ниже.

Следуя описанной ранее [3] методике и учитывая существование при $\varepsilon = 0$ у задачи (2.2) периодических решений (2.4), фиксируем произвольно номер n и подставим в (2.2) ряды

$$u = u_0(\tau, x) + \varepsilon u_1(\tau, x) + \varepsilon^2 u_2(\tau, x) + \dots, \quad \tau = (1 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots)t \quad (2.5)$$

$$u_0(\tau, x) = \xi [\exp(i\omega_n \tau) + \exp(-i\omega_n \tau)] \sin \omega_n x \quad (2.6)$$

где ξ, δ_k , $k \geq 1$, – подлежащие определению вещественные постоянные, а функции u_k , $k \geq 1$, – нечетные тригонометрические полиномы переменной $\omega_n \tau$ степени не выше $2k + 1$. Приравнивая затем коэффициенты при ε , для определения u_1 получим краевую задачу

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_1 = -2\delta_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - \frac{\partial u_0}{\partial \tau}, \quad u_1|_{x=0} = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \beta u_1 + \gamma \frac{\partial u_1}{\partial x} \right]_{x=1} = -2\delta_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} + \left[\alpha(1 - u_0^2) \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right]_{x=1}$$

Ее решение ищем в том же виде, что и соответствующие неоднородности, т.е. в виде

$$u = A(x) \exp(i\omega_n \tau) + \bar{A}(x) \exp(-i\omega_n \tau) + B(x) \exp(3i\omega_n \tau) + \bar{B}(x) \exp(-3i\omega_n \tau)$$

На этом пути для коэффициентов A, B приходим к задачам

$$A'' + \omega_n^2 A = \omega_n \xi (i - 2\delta_1 \omega_n) \sin \omega_n x$$

$$A(0) = 0, \quad (\beta - \omega_n^2)A(1) + \gamma A'(1) = [2\delta_1 \omega_n + i\alpha(1 - \xi^2 \sin^2 \omega_n)] \xi \omega_n \sin \omega_n$$

$$B'' + 9\omega_n^2 B = 0$$

$$B(0) = 0, \quad (\beta - 9\omega_n^2)B(1) + \gamma B'(1) = -i\omega_n \alpha \xi^3 \sin^3 \omega_n$$

Их анализ приводит в свою очередь к равенствам

$$\xi^2 = (\alpha - \alpha_n)/(\alpha \sin^2 \omega_n), \quad A(x) = -(\xi/2)ix \cos \omega_n x + \eta \sin \omega_n x$$

$$\delta_1 = 0, \quad B(x) = -i\omega_n \alpha \xi^3 \sin^3 \omega_n \sin 3\omega_n x / P(3\omega_n) \quad (2.7)$$

Здесь

$$\alpha_n = (\omega_n^2 - \beta)^2 / (2\gamma\omega_n^2) - (\omega_n^2 - \beta) / (2\omega_n^2) + \gamma / 2$$

η – произвольная вещественная постоянная; функция $P(\omega)$ та же, что и в (2.3).

Предположим, что выполнены условия

$$\alpha > \alpha_n, \quad P(3\omega_n) \neq 0 \quad (2.8)$$

Тогда из первого равенства (2.7) находим ξ и, следовательно, функция $u_1(\tau, x)$ полностью определяется. В принципе этой информации достаточно для доказательства существования и исследования устойчивости цикла задачи (2.2) с нулевым приближением (2.6). Однако при необходимости описанный алгоритм можно продолжать: на шаге с номером $m, m \geq 1$, разрешимости краевой задачи для коэффициента функции u_m при первой гармонике добиваемся за счет слагаемого вида $\eta \sin \omega_n x$, с точностью до которого определяется аналогичный коэффициент в u_{m-1} (см. (2.7)), и очередной поправки к частоте δ_m . Разрешимость же краевых задач для остальных коэффициентов функции u_m обеспечивают неравенства

$$P(k\omega_n) \neq 0, \quad k = 3, \dots, 2m + 1$$

характеризующие некоторую общность положения.

Введем в рассмотрение числа

$$R_{n,m} = 2\alpha_n - \alpha_m - \alpha, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Теорема 3. Пусть при некотором натуральном n выполняются условия (2.8) и неравенства

$$P(\omega_m \pm 2\omega_n) \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots, m \neq n; \quad \sin 2\omega_n \neq 0 \quad (2.10)$$

Пусть, далее, отличны от нуля все числа (2.9) и количество положительных среди них равно m_0 . Тогда найдется такое $\varepsilon_n > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_n$ краевая задача (2.2) имеет периодическое решение с асимптотикой (2.5)–(2.7), экспоненциально орбитально устойчивое при $m_0 = 0$ и дихотомичное при $m_0 > 0$ с размерностью неустойчивого многообразия $2m_0 + 1$.

Алгоритм исследования устойчивости. Оригинальная часть доказательства теоремы 3 состоит в применении описанного ранее [13] алгоритма исследования устойчивости к краевой задаче

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad h|_{x=0} = 0 \quad (2.11)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial \tau^2} + \varepsilon \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} [(u_0^2(\tau, x) - 1)h] + \beta h \right\} \Big|_{x=1} = -\gamma \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=1}$$

получающейся при линеаризации задачи (2.2) на построенном выше приближенном периодическом решении и отбрасывании слагаемых порядка ε^2 и выше.

Суть данного алгоритма в следующем. При $m \neq n$ положим в (2.11)

$$h = [\exp(i\omega_m \tau) \sin \omega_m x + \varepsilon h_m(\tau, x)] \exp(\varepsilon \mu_m \tau)$$

и приравняем коэффициенты при ε . В результате для h_m получим линейную неоднородную краевую задачу, а неизвестную постоянную μ_m определим из условия ее разрешимости в классе тригонометрических многочленов переменных $\omega_n \tau$, $\omega_m \tau$. На этом пути получим

$$\mu_m = R_{n,m} / (2\alpha_m), \quad h_m = C_m^0(x) \exp(i\omega_m \tau) + C_m^+(x) \exp[i(\omega_m + 2\omega_n)\tau] + \\ + C_m^-(x) \exp[i(\omega_m - 2\omega_n)\tau]$$

$$C_m^0 = -(i/2)(2\mu_m + 1)x \cos \omega_m x$$

$$C_m^\pm(x) = -\alpha \xi^2 i(\omega_m \pm 2\omega_n) \sin^2 \omega_n \sin(\omega_m \pm 2\omega_n)x / P(\omega_m \pm 2\omega_n)$$

Обратим внимание, что знаменатели в формулах для $C_m^\pm$ отличны от нуля в силу условий (2.10). Отметим также, что поскольку

$$|P(\omega_m \pm 2\omega_n)|/\omega_m^2 \rightarrow |\sin 2\omega_n|, \quad m \rightarrow \infty$$

то становится понятной и роль неравенства $\sin 2\omega_n \neq 0$ (см. (2.10)).

При $m = n$, т.е. на собственной частоте автоколебаний, способ действий несколько отличается от предыдущего. В этом случае, полагая в (2.11)

$$h = [V_0(\tau, x) + \varepsilon V_1(\tau, x)] \exp(\varepsilon D \tau), \quad D = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ \bar{d}_2 & \bar{d}_1 \end{vmatrix}$$

$$V_j = [v_{j,n}(\tau, x), \bar{v}_{j,n}(\tau, x)], \quad j = 0, 1, \quad v_{0,n} = \exp(i\omega_n \tau) \sin \omega_n x$$

и действуя указанным выше образом, убеждаемся, что

$$d_1 = d_2 = (\alpha_n - \alpha)/(2\alpha_n)$$

Из структуры матрицы D и из явного вида чисел μ_m вытекает, что формальные свойства устойчивости задачи (2.11) совпадают с теми, о которых говорится в теореме. Их строгое обоснование, а также доказательство существования у задачи (2.2) цикла с построенной асимптотикой базируются на описанных в статьях [14, 15] методах, получивших свое дальнейшее развитие в монографии [6].

Заключение. Из утверждений теоремы 3 вытекает, что при $\alpha > \alpha_n$ из нулевого положения равновесия задачи (2.2) бифурцирует цикл с близкой к ω_n частотой, который, подрастая по амплитуде, становится устойчивым при дальнейшем увеличении параметра α , а именно при

$$\alpha > 2\alpha_n - \min_{m \geq 1} \alpha_m \quad (2.12)$$

Таким образом, при подходящем увеличении α , уменьшении ε и при некоторой общности положения относительно параметров β , γ можно гарантировать существование у задачи (2.2) любого наперед заданного конечного числа устойчивых циклов, т.е. наблюдается явление *буферности*.

Отметим еще одну характерную для данной задачи тенденцию: при уменьшении γ и при фиксированных прочих параметрах явление буферности разрушается. Точнее говоря, в этом случае у задачи (2.2) остается единственный устойчивый цикл с частотой, близкой к частоте осциллятора. Действительно, пусть сначала $\gamma = 0$. Тогда за-

дача (2.2) эквивалентна краевой задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = v(t) \quad (2.13)$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \varepsilon \alpha(v^2 - 1) \frac{dv}{dt} + \beta v = 0 \quad (2.14)$$

Но (2.14) – это классическое уравнение Ван-дер-Поля, имеющее единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $v = v_*(t, \varepsilon)$. Подставляя его в (2.13), однозначно определяем периодическую функцию $u = u_*(t, x, \varepsilon)$ с тем же периодом.

При $0 < \gamma \ll 1$ ситуация в принципе не меняется. Предположим для простоты, что $\beta \neq n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда, как легко видеть, уравнение (2.3) имеет простой корень $\omega = \omega_0(\gamma) : \omega_0(0) = \sqrt{\beta}$, которому отвечает критическое значение $\alpha = \alpha_0(\gamma) : \alpha_0(0) = 0$, а остальным его корням $\omega_n(\gamma) : \omega_n(0) = n\pi$ соответствуют такие критические значения $\alpha_n = \alpha_n(\gamma)$ параметра α , что $\alpha_n(\gamma) \rightarrow +\infty$ при $\gamma \rightarrow 0$. Тем самым при любых фиксированных α, β и при $\gamma \rightarrow 0$ условие существования и устойчивости цикла (2.12) выполняется только на частоте ω_0 .

Итак, при малых γ , т.е. при слабом обратном воздействии струны на осциллятор, наблюдается явление захвата: существует единственный периодический режим с частотой, близкой к частоте внешнего воздействия. С другой стороны, при $\gamma \gg 1$ происходит полное гашение колебаний в системе. Таким образом, буферность в данной задаче реализуется в некотором среднем диапазоне значений параметра γ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00157).

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров А.А., Колесов Ю.С. Пространственно неоднородные режимы в задаче хищник – жертва // Нелинейные колебания и экология. Ярославль: Изд-во Яросл. ун-та, 1984. С. 3–15.
2. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Диффузионная буферность в одной математической модели биологии // Изв. РАН. Сер. мат. 1998. Т. 62. № 5. С. 135–164.
3. Витт А.А. Распределенные автоколебательные системы // Журн. техн. физики. 1934. Т. 4. Вып. 1. С. 144–157.
4. Азьян Ю.М., Мигулин В.В. Об автоколебаниях в системе с запаздывающей обратной связью // Радиотехника и электроника. 1956. Т. 1. № 4. С. 418–427.
5. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Явление параметрической буферности в системах параболических и гиперболических уравнений с малой диффузией // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50. № 1. С. 22–35.
6. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИАН. 1998. Т. 222. С. 3–191.
7. Камбулов В.Ф., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Исследование автоколебаний в генераторе Ван-дер-Поля с распределенными параметрами // Вестн. МГУ. Сер. 3, Физика, астрономия. 1999. № 3. С. 23–27.
8. Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Сушко В.Г. Специфика автоколебательных процессов в резонансных гиперболических системах // Фунд. и прикл. математика. 1999. Т. 5. № 2. С. 437–473.
9. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
10. Соболевский П.Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 297–350.
11. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. B. etc.: Springer, 1981 = Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 376 с.

12. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1988. 392 с.
13. Колесов Ю.С., Майоров В.В. Новый метод исследований устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 10. С. 1778–1788.
14. Колесов Ю.С. Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Мат. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.
15. Колесов Ю.С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Мат. сб. 1995. Т. 186. № 10. С. 57–72.

Ярославль, Москва
e-mail: rozov@rozov. mscme.ru

Поступила в редакцию
25.VII.2000