

УДК 532.59:534.1

© 2001 г. В.В. Остапенко

### УСТОЙЧИВЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ "МЕЛКОЙ ВОДЕ"

Предлагается критерий корректности полной системы законов сохранения, предполагающий максимальную согласованность области выпуклости замыкающего закона сохранения с областью гиперболичности дифференциальной модели. На основе этого критерия для модели двухслойной "мелкой воды" со свободной верхней границей выделена корректная полная система законов сохранения, в которую в качестве базисных входят законы сохранения массы в слоях, полного импульса и скачка скорости на границе раздела слоев, а в качестве замыкающего – закон сохранения полной энергии. Проведен анализ допускаемых этой системой устойчивых ударных (прерывных) волн.

**1. Введение.** Были выведены и проанализированы [1] три дифференциальные модели двухслойной "мелкой воды": модель I – со свободной верхней границей, модель II – "под крышкой" и их общий предельный случай – модель III. Для них были построены области гиперболичности, в связи с чем была поставлена задача о формулировке этих моделей в виде полных систем законов сохранения и изучении допускаемых этими системами устойчивых разрывных решений с ударными волнами.

Один из возможных подходов к решению этой задачи, восходящий к классической модели одномерной газовой динамики [2], связан с доказательством однозначной разрешимости в области гиперболичности задачи распада произвольного разрыва. Для простейшей модели III этот подход был реализован [3], однако на более сложные модели I и II его распространить не удалось, поскольку возникающие при этом задачи о распаде разрыва являются слишком сложными и провести их полный аналитический анализ в общем случае оказалось невозможным.

В дальнейшем для изучения волновых течений стратифицированной "мелкой воды" стали разрабатываться более структурированные модели, в которых граница раздела между двумя основными слоями заменяется специальным слоем смешения [4] или вводится непрерывное изменение плотности по вертикали [5, 6]. Однако обоснование этих моделей не будет достаточно полным без проведения их сравнительного анализа с полными системами законов сохранения для базисных моделей двухслойной "мелкой воды" (моделей I и II), являющихся их простыми предельными случаями.

В связи с этим в настоящей работе предлагается решение сформулированной в [1] задачи для представляющей наибольший физический интерес модели I – со свободной верхней границей. Это решение получено на основе приводимого ниже критерия корректности полной системы законов сохранения, предполагающего максимальную согласованность области выпуклости замыкающего закона сохранения с областью гиперболичности дифференциальной модели.

**2. Критерий корректности полной системы законов сохранения.** Гиперболическая система законов сохранения [2, 7]

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (2.1)$$

$$u(t, x) = (u_1, \dots, u_m), \quad f(u) = (f_1, \dots, f_m)$$

называется полной системой [8] с выпуклым расширением [9], если она допускает

дополнительный замыкающий закон сохранения

$$U(\mathbf{u})_t + F(\mathbf{u})_x = 0 \quad (2.2)$$

где  $U_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{u}} = F_{\mathbf{u}}$ , с выпуклой (энтропийной) функцией  $U(\mathbf{u})$ , т.е.  $U_{\mathbf{u}\mathbf{u}} > 0$ . Было показано [8–11], что такая система в канонических переменных  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{u}) = U_{\mathbf{u}}$  может быть записана в симметрической форме

$$A\mathbf{w}_t + B\mathbf{w}_x = 0$$

$$A = \Phi_{\mathbf{w}\mathbf{w}} > 0, \quad \Phi = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - U; \quad B = \Psi_{\mathbf{w}\mathbf{w}}, \quad \Psi = \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} - F$$

Замыкающий закон сохранения (2.2) полной системы (2.1) предлагалось использовать [7, 9] для отбора устойчивых разрывных решений, как решений системы (2.1), которые в слабом смысле [7] удовлетворяют энтропийному неравенству

$$U(\mathbf{u})_t + F(\mathbf{u})_x \leq 0 \quad (2.3)$$

На фронте ударной волны  $x = x(t)$  это неравенство принимает вид

$$[DU - F] < 0 \quad (2.4)$$

где  $D = x'(t)$  – скорость распространения ударной волны,  $[f]$  – скачок функции  $f(t, x)$  на ее фронте, т.е.

$$[f] = f_1 - f_0, \quad f_1 = f(t, x(t) - 0), \quad f_0 = f(t, x(t) + 0)$$

Во многих работах (см., например, [12–14]) предполагалось, что для полных систем законов сохранения (2.1) с выпуклым расширением (2.2) энтропийное условие устойчивости (2.3), (2.4) гарантирует однозначную разрешимость "в целом" задачи Коши в некотором классе кусочно-непрерывных функций. В связи с этим наличие выпуклого расширения (2.2) выдвигалось в качестве решающего требования корректной формулировки гиперболической системы в виде полной системы законов сохранения. Однако жесткое применение этого требования предполагает полное совпадение области выпуклости замыкающего закона сохранения с областью гиперболичности дифференциальной модели, чему многие конкретные модели в принципе удовлетворить не могут (в частности, этому требованию не удовлетворяет ни одна из предложенных в [1] моделей двухслойной "мелкой воды").

В результате в настоящее время в теории гиперболических систем сложилась достаточно своеобразная ситуация, когда одни авторы сразу отвергают как некорректные целые классы дифференциальных моделей, которые не допускают выпуклого расширения во всей своей области гиперболичности, а другие – с этими моделями работающие – полностью игнорируют саму идею выпуклого расширения, несмотря на то что она самым естественным образом возникает в наиболее развитых гиперболических системах, таких, например, как система законов сохранения газовой динамики.

В настоящей работе предлагается компромиссный подход, который, с одной стороны, примиряет эти две противоположные точки зрения, а с другой – позволяет гораздо более широко использовать идею выпуклого расширения для анализа корректности конкретных полных систем законов сохранения. В рамках этого "более мягкого" подхода область выпуклости  $\Omega^c$  энтропийной функции  $U(\mathbf{u})$  корректной полной системы может и не совпадать со всей ее областью гиперболичности  $\Omega^h$  (при этом всегда  $\Omega^c \subseteq \Omega^h$ ), но она должна быть с ней максимально согласована по сравнению со всеми другими возможными полными системами, допускаемыми дифференциальной моделью. В частности, если имеем две различных полных системы законов сохранения с областями выпуклости  $\Omega_1^c$  и  $\Omega_2^c$ , которые получены из одной и той же дифференциальной гиперболической системы (2.1), и при этом  $\Omega_2^c \subset \Omega_1^c$ , то данному критерию корректности в большей степени будет удовлетворять полная система с областью выпуклости  $\Omega_1^c$ .

В разд. 3 этот критерий корректности полной системы законов сохранения проверяется на примере хорошо изученной модели однослойной мелкой воды, а в разд. 4 он применяется для выделения корректной полной системы законов сохранения в модели двухслойной "мелкой воды" со свободной верхней границей. В разд. 5 изучаются ударные волны, допускаемые условиями Гюгонио этой полной системы, а в разд. 6 – допускаемые условием выпуклости ее энтропийной функции (полной энергии). В разд. 7 при помощи энтропийного (энергетического) неравенства (2.4) выделяются те из этих ударных волн, которые являются устойчивыми. В разд. 8 изучаются специальные двухслойные прерывные волны, в которых течение через разрыв в одном из слоев отсутствует (такие прерывные волны названы "естественными плотинами"). В разд. 9–12 эти результаты обобщаются на пространственно двумерный случай.

**3. Однослойная "мелкая вода".** Известно [2, 8], что в полную систему законов сохранения однослойной "мелкой воды" в качестве базисных входят законы сохранения массы

$$h_t + q_x = 0 \quad (3.1)$$

и полного импульса

$$q_t + (qv + gh^2/2)_x = 0 \quad (3.2)$$

а в качестве замыкающего – закон сохранения полной энергии

$$e_t + (q(v^2 + 2gh))_x = 0 \quad (3.3)$$

где  $h$  – глубина потока,  $q$  – расход,  $v = q/h$  – скорость,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $e = qv + gh^2/2$  – полная энергия, играющая в данном случае роль энтропийной функции. Записывая полную энергию как функцию базисных переменных  $u = (h, q)$ , получим

$$e(h, q) = q^2/h + gh^2 \quad (3.4)$$

Поскольку эта функция выпукла при  $h > 0$ , т.е. во всей области гиперболичности системы (3.1), (3.2), то тем самым область выпуклости "энтропийной функции" (полной энергии (3.4)) полной системы (3.1)–(3.3) идеально согласована с ее областью гиперболичности (эти области совпадают).

Дифференциальным следствием системы (3.1), (3.2) является уравнение

$$v_t + (v^2/2 + gh)_x = 0 \quad (3.5)$$

представляющее собой закон сохранения локального импульса каждой частицы жидкости вдоль ее линии тока. В отличие от полной системы (3.1)–(3.3) полная система, получаемая при базисных законах сохранения (3.1), (3.5) и том же замыкающем законе (3.3), имеет "энтропийную функцию" (полную энергию)

$$e(h, v) = v^2h + gh^2 \quad (3.6)$$

выпуклую только для докритических течений  $|v| < \sqrt{gh}$ , и поэтому система (3.1)–(3.3) в большей степени удовлетворяет предложенному выше критерию корректности, чем система (3.1), (3.3), (3.5).

Наконец, если в качестве базисных законов сохранения взять законы сохранения массы (3.1) и локального импульса (3.5), а в качестве замыкающего – закон сохранения полного импульса (3.2), то "энтропийная функция" (полный импульс)  $q(h, v) = h \cdot v$  такой "совершенно нефизической" полной системы невыпукла при всех значениях базисных переменных  $h$  и  $v$ . Таким образом, на хорошо изученной модели однослойной "мелкой воды" предложенный выше критерий работает достаточно успешно, однозначно выделяя физически корректную полную систему (3.1)–(3.3).

Напомним теперь как при помощи энтропийного (2.4) (энергетического) условия выделяются устойчивые ударные (прерывные) волны в системе (3.1)–(3.3). Для этого,

переходя в систему координат, в которой скорость ударной волны  $D = 0$  и записывая в ней условия Гюгонио для базисных законов сохранения (3.1), (3.2) и энтропийное условие устойчивости (2.4) для замыкающего закона сохранения полной энергии (3.3), получим

$$[q] = 0 \Rightarrow q_1 = q_0 = q \neq 0 \quad (3.7)$$

$$[qv + gh^2/2] = q^2[h^{-1}] + g[h^2]/2 = 0 \quad (3.8)$$

$$[q(v^2 + 2gh)] = q[v^2 + 2gh] > 0 \quad (3.9)$$

Предполагая для определенности, что  $q > 0$ , т.е., что течение через разрыв направлено по оси  $x$ , перепишем энергетическое неравенство (3.9) в виде

$$[v^2 + 2gh] = [h](2g - q^2(h_1 + h_0)/(h_1 h_0)^2) > 0 \quad (3.10)$$

Поскольку, как следует из (3.8),

$$q^2 = -g[h^2]/(2[h^{-1}]) = gh_1 h_0 (h_1 + h_0)/2 \quad (3.11)$$

то, подставляя это значение расхода в неравенство (3.10), окончательно имеем

$$g[h](4 - (h_1 + h_0)^2/(2h_1 h_0)) = -g[h]^3/(2h_1 h_0) > 0$$

Это означает, что при  $q > 0$  на устойчивой ударной волне

$$[h] = h_1 - h_0 < 0 \Rightarrow h_1 < h_0$$

т.е. глубина воды возрастает при ее движении через фронт ударной волны.

Интересно отметить, что условия Гюгонио, записанные при  $D = 0$  для закона сохранения локального импульса (3.5), имеют вид

$$[v^2/2 + gh] = 0$$

Отсюда следует, что если в качестве базисных взять законы сохранения массы (3.1) и локального импульса (3.5), то тогда в силу (3.7), (3.9) полная энергия в такой системе на разрывах также будет сохраняться, вследствие чего соответствующий ей закон сохранения (3.3) в этом случае нельзя использовать в качестве замыкающего для отбора устойчивых ударных волн.

Далее описанный здесь энергетический метод будет применен для выделения устойчивых ударных волн в двухслойной "мелкой воде".

**4. Двухслойная "мелкая вода".** Дифференциальные уравнения двухслойной "мелкой воды" со свободной верхней границей имеют вид [1]

$$h_t + q_x = 0, \quad H_t + Q_x = 0 \quad (4.1)$$

$$v_t + (v^2/2 + g(h + H))_x = 0, \quad V_t + (V^2/2 + g(H + \lambda h))_x = 0 \quad (4.2)$$

где  $h, q, v = q/h$  – глубина, расход и скорость в верхнем слое,  $H, Q, V = Q/H$  – то же в нижнем слое,  $\lambda < 1$  – отношение плотностей верхнего и нижнего слоев. Уравнения (4.1) представляют собой законы сохранения массы, а уравнения (4.2) – законы сохранения локального импульса в каждом из слоев жидкости.

Было показано [1], что система (4.1), (4.2) имеет еще два линейно независимых закона сохранения: полного импульса

$$\alpha = Q + \lambda q \quad (4.3)$$

в виде

$$\alpha_t + (QV + \lambda qv + g\varphi/2)_x = 0; \quad \varphi = H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda Hh \quad (4.4)$$

и полной энергии

$$e = QV + \lambda qv + g\varphi \quad (4.5)$$

в виде

$$e_t + (Q(V^2 + 2gH_m) + \lambda q(v^2 + 2gH_n))_x = 0, \quad (4.6)$$

$$H_m = H + \lambda h, \quad H_n = H + h$$

По аналогии с однослойным случаем в качестве базисных возьмем законы сохранения массы в слоях (4.1) и закон сохранения полного импульса (4.4), а в качестве замыкающего – закон сохранения полной энергии (4.6). В результате возникает классическая проблема выбора еще одного недостающего (в данном случае – четвертого) базисного закона сохранения.

Было показано [15], что применение предложенного здесь критерия однозначно выделяет в качестве этого четвертого базисного закона сохранения вытекающий из (4.2) закон сохранения скачка скорости  $\gamma = V - v$  на линии раздела слоев

$$\gamma_t + ((V^2 - v^2)/2 - \mu gh)_x = 0; \quad \mu = 1 - \lambda \quad (4.7)$$

Это связано с тем, что полная энергия (4.5), записанная как функция

$$e(h, H, \alpha, \gamma) = (\alpha^2 + \lambda h H \gamma^2)/(H + \lambda h) + g(H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda h H)$$

зависящая от базисных переменных  $u = (h, H, \alpha, \gamma)$ , является выпуклой при условии

$$|\bar{\gamma}| < \frac{b}{\lambda r} \left( \frac{g}{2} (c - (c^2 - 4\lambda^2 \mu r^3)^{1/2}) \right)^{1/2}, \quad b = 1 + \lambda r, \quad c = 1 + \lambda^2 r^3 \quad (4.8)$$

где

$$\bar{\gamma} = \gamma / \sqrt{H} = (V - v) / \sqrt{H}, \quad r = h / H \quad (4.9)$$

– те же самые переменные, относительно которых записывается условие гиперболичности системы (4.1), (4.2), полученное в неявном виде [1]. Если же в качестве четвертого базисного закона сохранения, вместо (4.7), выбрать какой-либо другой имеющий физический смысл закон сохранения, например закон сохранения локального импульса в одном из слоев (4.2) или закон сохранения скачка локального импульса  $\beta = V - \lambda v$  на линии раздела слоев, или, наконец, если в качестве базисных выбрать законы сохранения массы (4.1) и локального импульса (4.2) в слоях, то во всех этих случаях область выпуклости полной энергии (4.5) как функции соответствующих базисных переменных представляет собой ограничение на величины, отличные от переменных (4.9), относительно которых записывается условие гиперболичности системы (4.1), (4.2).

Так, например, если в качестве базисных выбраны законы сохранения массы (4.1) и локального импульса (4.2) в слоях (такая полная система аналогична однослойной системе (3.1), (3.3), (3.5)), то тогда полная энергия (4.5) как функция

$$e(h, H, v, V) = HV^2 + \lambda h v^2 + g(H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda h H)$$

базисных переменных  $u = (h, H, v, V)$  выпукла при условии докритичности течений в обоих слоях

$$|v| < \sqrt{gh}, \quad |V| < \sqrt{gH} \quad (4.10)$$

и при дополнительном, усиливающем (4.10), условии

$$(gh - v^2)(gH - V^2) > \lambda g^2 h H$$

Очевидно, что эти условия, требующие ограничения скорости в каждом слое жидкости, не согласованы с условием гиперболичности системы (4.1), (4.2), предполагающем ограничение лишь на разность скоростей в слоях.

Отметим, что дополнительный базисный закон сохранения (4.7) возникает также и в предельных случаях моделей, предложенных ранее [5, 6].

**5. Ударные волны, допускаемые условиями Гюгонио.** Записывая для системы (4.1), (4.4), (4.7) условия Гюгонио в системе координат, в которой скорость ударной волны  $D = 0$ , получим следующие соотношения, являющиеся двухслойным аналогом условий (3.7), (3.8):

$$[q] = 0 \Rightarrow q_1 = q_0 = q, \quad [Q] = 0 \Rightarrow Q_1 = Q_0 = Q \quad (5.1)$$

$$[QV + \lambda qv + g\varphi/2] = Q^2[H^{-1}] + \lambda q^2[h^{-1}] + g[\varphi]/2 = 0 \quad (5.2)$$

$$[V^2 - v^2 - 2\mu gh] = Q^2[H^{-2}] - q^2[h^{-2}] - 2\mu g[h] = 0 \quad (5.3)$$

Уравнения (5.2), (5.3) представляют собой линейную систему относительно  $Q^2$  и  $q^2$ . Решая ее, при учете того, что  $[h] \neq 0$  и  $[H] \neq 0$  (в противном случае разрыв отсутствует), найдем

$$Q^2 = \frac{g(4\lambda\mu[h] - \tilde{h}[\varphi])}{2\tilde{b}[H^{-1}]}, \quad q^2 = -\frac{g(4\mu[h] + \tilde{H}[\varphi])}{2\tilde{b}[h^{-1}]} \quad (5.4)$$

$$\tilde{b} = \tilde{h} + \lambda\tilde{H}, \quad \tilde{h} = h_1^{-1} + h_0^{-1}, \quad \tilde{H} = H_1^{-1} + H_0^{-1}$$

Неотрицательность правых частей в равенствах (5.4) (представляющих собой двухслойный аналог соотношения (3.11)) приводит к следующим ограничениям на скачки глубин на разрыве:

$$(\tilde{h}[\varphi] - 4\lambda\mu[h])[H] \geq 0, \quad (\tilde{H}[\varphi] + 4\mu[h])[h] \geq 0 \quad (5.5)$$

Далее, не нарушая общности, будем полагать, что

$$H_0 = 1, \quad [H] < 0 \Rightarrow H_1 < H_0 = 1 \quad (5.6)$$

Отсюда следует, что первое из неравенств (5.5) можно переписать в виде

$$4\lambda\mu[h] \geq \tilde{h}[\varphi] \quad (5.7)$$

Если одновременно с (5.6) имеет место условие

$$[h] < 0 \Rightarrow h_1 < h_0 \quad (5.8)$$

то тогда выполнение второго неравенства (5.5) сразу следует из соотношения

$$[\varphi] = [H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda Hh] < 0$$

а выполнение неравенства (5.7) вытекает из цепочки неравенств

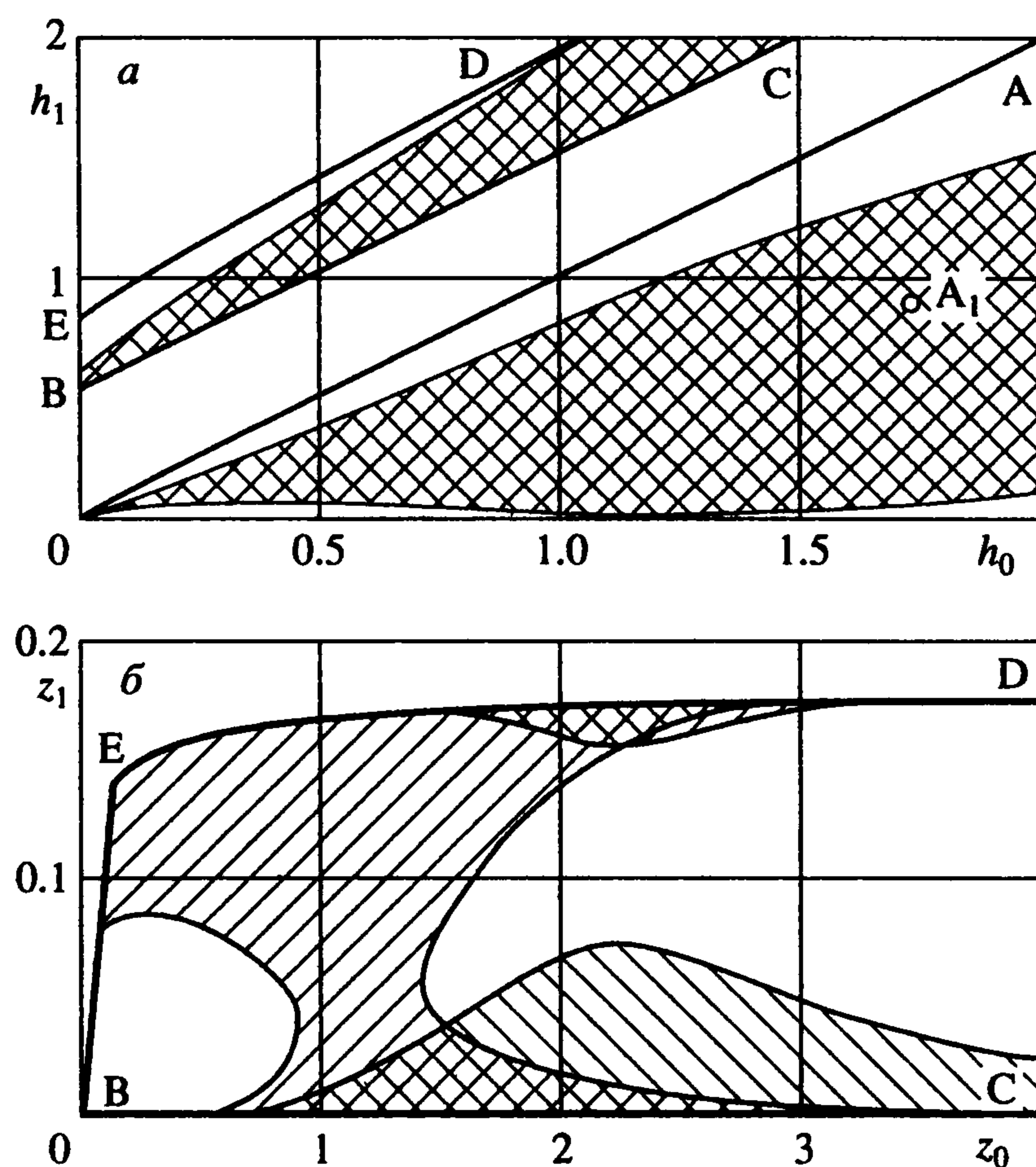
$$\begin{aligned} 4\lambda\mu[h] - \tilde{h}[\varphi] &> 4\lambda\mu[h] - \lambda\tilde{h}[h^2] > \lambda[h](4 - \tilde{h}\bar{h}) = \\ &= -\lambda[h]^3/(h_1h_0) > 0, \quad \bar{h} = h_1 + h_0 \end{aligned}$$

Это означает, что условиями (5.5) допускаются любые разрывы, при которых глубина в обоих слоях при переходе через фронт ударной волны одновременно убывает или возрастает.

На фиг. 1, а на плоскости переменных  $(h_0, h_1)$  множество допустимых глубин (5.8) расположено внутри угла  $A0h_0$ .

Рассмотрим теперь случай

$$[h] > 0 \Rightarrow h_1 > h_0 \quad (5.9)$$



Фиг. 1

когда второе неравенство (5.5) можно записать в виде

$$\tilde{H}[\varphi] + 4\mu[h] \geq 0 \quad (5.10)$$

Применяя формулу  $[\varphi] = \lambda[H_n^2] + \mu[H^2]$ , преобразуем неравенство (5.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\lambda[H_n^2] + \mu[H^2]) + 4\mu[H_n - H] &= (\lambda\tilde{H}\bar{H}_n + 4\mu)[H_n] + \mu(\tilde{H}\bar{H} - 4)[H] = \\ &= (a[H_n] + \mu[H]^3)/(H_1 H_0) \geq 0 \\ a &= \lambda\bar{H}\bar{H}_n + 4\mu H_1 H_0 > 0, \quad \bar{H} = H_1 + H_0, \quad \bar{H}_n = H_{n1} + H_{n0} \end{aligned}$$

Отсюда, при учете (5.6), имеем

$$[H_n] \geq -\mu[H]^3/(aH_1 H_0) > 0 \quad (5.11)$$

Это означает, что полная глубина  $H_n$  при переходе через такой разрыв должна возрастать и, следовательно, область допустимых условиями Гюгонио глубин  $h_0, h_1$  при условиях (5.6), (5.9) лежит на плоскости переменных  $(h_0, h_1)$  выше прямой  $h_1 = h_0 - [H]$ .

Преобразуем теперь неравенство (5.7). Для этого, используя формулу  $[\varphi] = [H_m^2] + \lambda\mu[h^2]$ , перепишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{h}([H_m^2] + \lambda\mu[h^2]) - 4\lambda\mu[h] &= \tilde{h}\bar{H}_m[H_m] + \lambda\mu[h](\tilde{h}\bar{h} - 4) = \\ &= (\bar{h}\bar{H}_m[H_m] + \lambda\mu[h]^3)/(h_1 h_0) \leq 0, \quad \bar{H}_m = H_{m1} + H_{m0} \end{aligned}$$

Отсюда, при учете (5.9), получим

$$[H_m] \leq -\lambda\mu[h]^3/(\bar{h}\bar{H}_m) < 0 \quad (5.12)$$

Это означает, что полная масса  $H_m$  единицы длины потока убывает при переходе через рассматриваемый разрыв и, следовательно, область допустимых условиями Гюгонио глубин  $h_0, h_1$  при условиях (5.6), (5.9) лежит на плоскости переменных  $(h_0, h_1)$  ниже прямой  $h_1 = h_0 - [H]/\lambda$ .

Таким образом, в случае (5.6), (5.9) (т.е. когда глубина нижнего слоя при переходе через разрыв падает, а верхнего слоя растет) допустимые условиями Гюгонио глубины верхнего слоя удовлетворяют двухстороннему неравенству

$$h_0 - [H]/\lambda > h_1 > h_0 - [H] \quad (5.13)$$

На фиг. 1, а при

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 0,5, \quad \lambda = 0,5 \quad (5.14)$$

множество этих глубин (полученное в результате численного решения неравенств (5.7) и (5.10)) представляет собой полосу  $BCDE$ . Как следует из (5.13), ширина этой полосы стремится к нулю при  $[H] \rightarrow 0$  или  $\lambda \rightarrow 1$  и неограниченно возрастает при  $\lambda \rightarrow 0$ .

Интересно отметить, что если вместо (4.4) и (4.7) в качестве базисных взять законы сохранения локального импульса в слоях (4.2), то тогда соответствующие им условия Гюгонио будут иметь вид

$$[v^2/2 + g(H+h)] = \frac{q^2}{2}[h^{-2}] + g[H_n] = 0$$

$$[V^2/2 + g(H+\lambda h)] = \frac{Q^2}{2}[H^{-2}] + g[H_m] = 0$$

и тем самым допустимые в этом случае скачки глубин на разрыве будут определяться неравенствами

$$[H_n][h] \geq 0, \quad [H_m][H] \geq 0$$

которые, как легко видеть, при условии (5.6) эквивалентны неравенствам (5.8) и (5.13). Это означает, что множество разрывов глубин, допускаемых условиями Гюгонио простейшей некорректной системы (4.1), (4.2), содержит внутри себя множество разрывов глубин, допускаемых условиями Гюгонио корректной системы (4.1), (4.4), (4.7).

**6. Ударные волны, допускаемые условием выпуклости полной энергии.** Потребуем, чтобы течение по обе стороны от разрыва удовлетворяло условию выпуклости полной энергии (4.8), что, в частности, гарантирует его гиперболичность. При этом возможны две принципиально различные ситуации: когда через разрыв в обоих слоях жидкость течет в одном направлении – такие разрывы назовем *ударными волнами с односторонними потоками* (ОУВ) и когда через разрыв в нижнем и верхнем слоях жидкость течет в разных направлениях – такие разрывы назовем *ударными волнами с разносторонними потоками* (РУВ).

В случае ОУВ из (4.8), при учете (5.4), вытекают следующие дополнительные ограничения на значения глубин по обе стороны от разрыва:

$$|\bar{Q}/H_i - \bar{q}/h_i| < \psi_i, \quad i = 0, 1 \quad (6.1)$$

где

$$\bar{Q} = ((4\lambda\mu[h] - \tilde{h}[\varphi])/[H^{-1}])^{1/2}, \quad \bar{q} = (-(4\mu[h] + \tilde{H}[\varphi])/[h^{-1}])^{1/2} \quad (6.2)$$

$$\psi_i = \frac{b_i}{\lambda r_i} (\tilde{b}H_i(c_i - (c_i^2 - 4\lambda^2\mu r_i^3)^{1/2}))^{1/2} \quad (6.3)$$

$$b_i = 1 + \lambda r_i, \quad c_i = 1 + \lambda^2 r_i^3, \quad r_i = h_i / H_i$$

Глубины  $(h_0, h_1)$ , удовлетворяющие условиям выпуклости (6.1), определялись численно. На фиг. 1, *a* они показаны в виде заштрихованных множеств, расположенных внутри областей  $A0h_0$  и  $BCDE$ , допускаемых условиями Гюгонио (5.1)–(5.3).

В случае РУВ условия выпуклости (4.7), (4.8) принимают вид

$$|\bar{Q}/H_i + \bar{q}/h_i| < \psi_i, \quad i = 0, 1 \quad (6.4)$$

Численные расчеты показали, что ограничения (6.4) являются гораздо более сильными, чем (6.1), и удовлетворяющие им глубины расположены на фиг. 1, *a* только внутри полосы  $BCDE$ . Поэтому при

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 0.75, \quad \lambda = 0.5 \quad (6.5)$$

множества этих глубин показаны на фиг. 1, *b* в специальной системе координат  $z_0z_1$ , где

$$z_0 = (h_1 + h_0 + [H])/\sqrt{2}, \quad z_1 = (h_1 - h_0 + [H])/\sqrt{2} \quad (6.6)$$

Ось  $z_0$  этой системы координат лежит на прямой  $h_1 = h_0 - [H]$ , а ось  $z_1$  ей перпендикулярна. Глубины  $(h_0, h_1)$ , удовлетворяющие условиям (6.4), показаны на фиг. 1, *b* в виде заштрихованных крест-накрест множеств, примыкающих к нижней  $BC$  и верхней  $ED$  границам области  $BCDE$ , изображенной на фиг. 1, *b* гораздо более подробно, чем на фиг. 1, *a*. При этом на фиг. 1, *b* (в отличие от фиг. 1, *a*) показано не только пересечение множеств (6.4), но и каждое из этих множеств в отдельности: первое из них, получаемое при  $i = 0$ , заштриховано прямыми с наклоном вправо, а второе, получаемое при  $i = 1$ , заштриховано прямыми с наклоном влево.

Численные расчеты показали, что при непрерывном изменении параметров  $H_1$  и  $\lambda$  (которые для фиг. 1, *a* определяются формулами (5.14), а для фиг. 1, *b* – формулами (6.5)) области выпуклости полной энергии также непрерывно изменяются, однако качественная картина их расположения остается практически неизменной.

**7. Устойчивые ударные волны.** Для замыкающего закона сохранения полной энергии (4.6) "энтропийное" условие устойчивости (2.4) при учете того, что  $D = 0$ , имеет вид

$$[FQ + \lambda f q] > 0, \quad F = V^2 + 2gH_m, \quad f = v^2 + 2gH_n \quad (7.1)$$

Учитывая, что в силу (5.3)  $[F] = [f]$ , получим неравенство

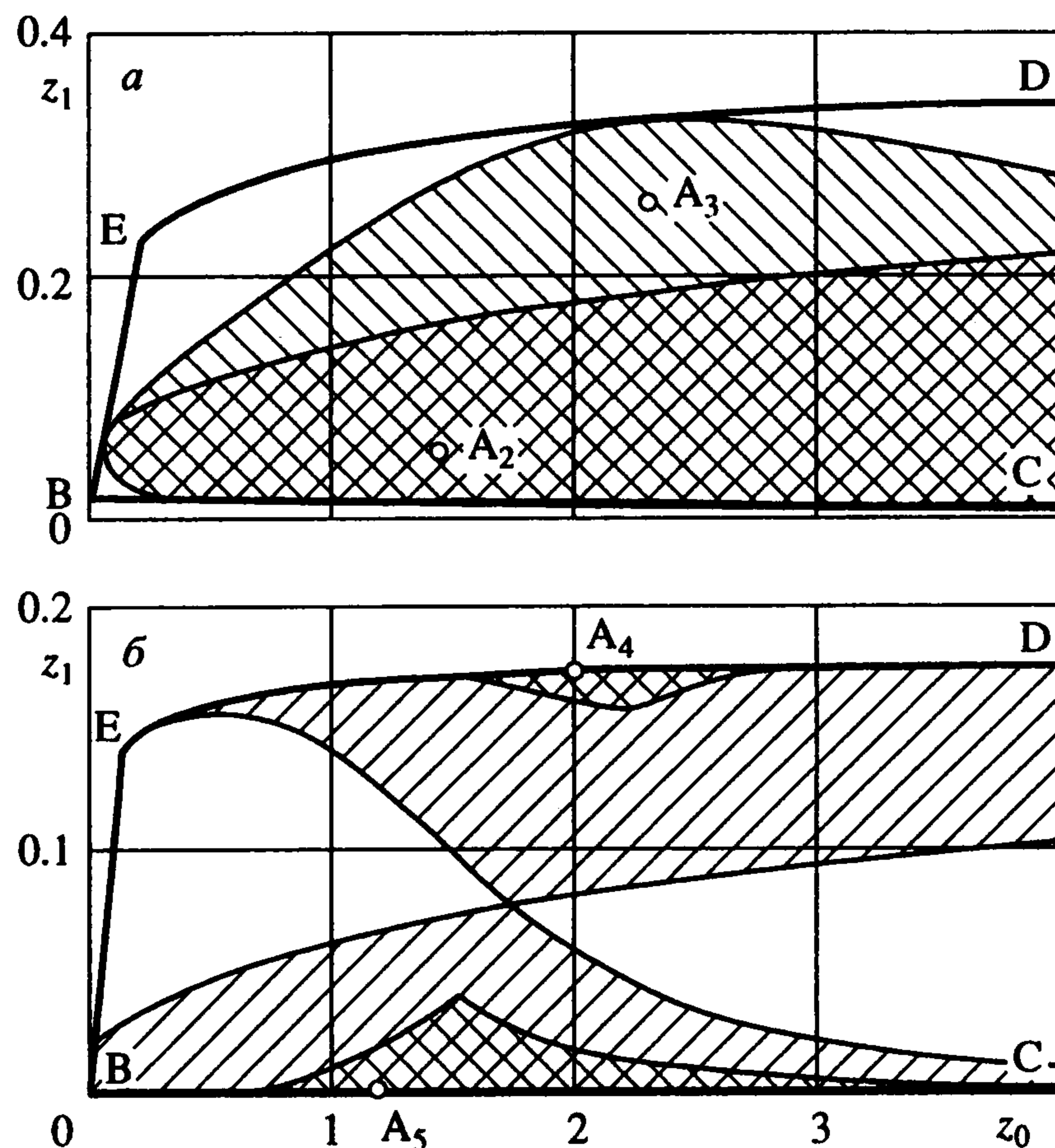
$$\alpha[f] = \alpha[v^2 + 2gH_n] > 0 \quad (7.2)$$

представляющее собой двухслойный аналог однослойного условия устойчивости (3.9).

Предположим, что полный импульс (4.3) положителен. Тогда при учете соотношений (5.4) и (6.2) неравенство (7.2) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} 2\tilde{b}[f]/g &= 4\tilde{b}[H_n] + \bar{q}^2[h^{-2}] = 4\tilde{b}[H_n] - \tilde{h}(4\mu[h] + \tilde{H}[\varphi]) = \\ &= 4(\tilde{h} + \lambda\tilde{H})[H_n] - 4\mu\tilde{h}[h] - \tilde{h}\tilde{H}(\lambda[H_n^2] + \mu[H^2]) = \lambda\tilde{H}[H_n](4 - \tilde{h}\bar{h}) + \tilde{h}[H_m](4 - \tilde{H}\bar{H}) = \\ &= (\lambda\bar{H}[-H_n][h]^2 + \bar{h}[-H_m][H]^2)/(H_1H_0h_1h_0) > 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Это неравенство заведомо выполнено при условиях (5.6), (5.8), означающих, что глубина жидкости в обоих слоях возрастает при переходе через разрыв в направлении оси  $x$  (на фиг. 1, *a* множество таких глубин расположено внутри угла  $A0h_0$ ). При условиях (5.6), (5.9) неравенство (7.3) выделяет некоторое подмножество в множестве глубин, допустимых условиями Гюгонио (5.1)–(5.4). На фиг. 2, *a* это подмножество заштриховано прямыми с наклоном влево, а множество глубин, удовлетворяющих условиям выпуклости (6.1), заштриховано прямыми с наклоном вправо; в результате, их общая часть заштрихована крест-накрест.



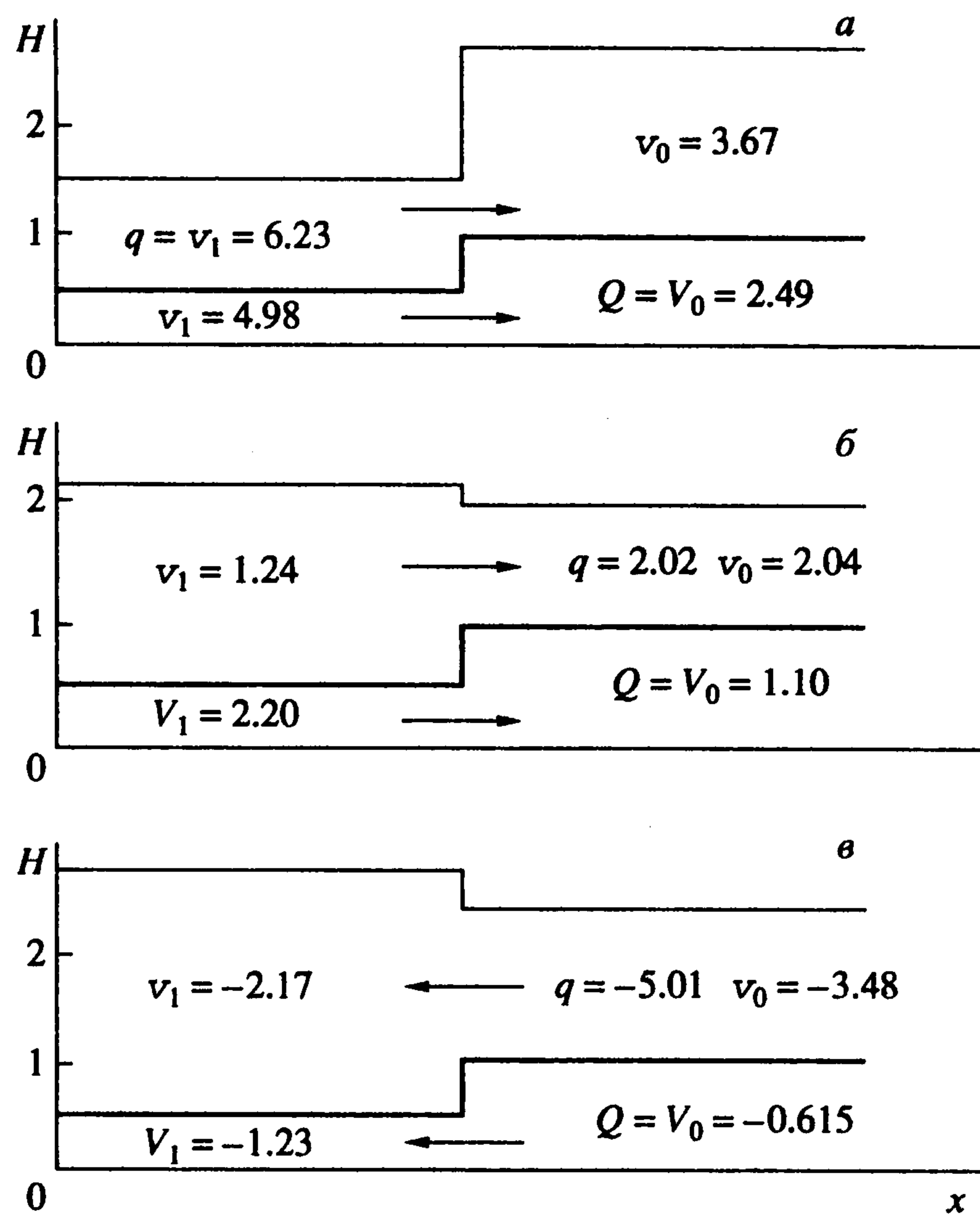
Фиг. 2

Таким образом, ОУВ, для которых  $Q > 0$  и  $q > 0$ , устойчивы при глубинах, значения которых находятся внутри угла  $A_0h_0$  на фиг. 1, *a* и внутри области, заштрихованной на фиг. 2, *a* прямыми с наклоном влево. В то же время ОУВ, для которых  $Q < 0$  и  $q < 0$ , устойчивы только при глубинах, значения которых заполняют на фиг. 2, *a* ту часть области  $BCDE$ , которая не заштрихована прямыми с наклоном влево.

На фиг. 3 приведены профили трех качественно различных устойчивых прерывных волн, соответствующих точке  $A_1$  на фиг. 1, *a* и точкам  $A_2, A_3$  на фиг. 2, *a*. Прерывная волна, отвечающая точке  $A_1$ , показана на фиг. 3, *a*, точке  $A_2$  – на фиг. 3, *б*, точке  $A_3$  – на фиг. 3, *в*. Жирными линиями на фиг. 3 изображены линии раздела слоев, а более тонкими – свободные поверхности. Стрелки указывают направления потоков в слоях. Приведенные на фиг. 3 значения расходов и скоростей в слоях вычислялись в предположении, что ускорение силы тяжести  $g = 9, 8$ .

В случае РУВ, для которых  $Q > 0$  и  $q < 0$ , неравенство  $\alpha = Q + \lambda q > 0$  примет вид  $\bar{Q} - \lambda \bar{q} > 0$ , величины  $\bar{Q}$  и  $\bar{q}$  определяются по формулам (6.2). В результате такие ударные волны будут устойчивы при выполнении неравенства  $(\bar{Q} - \lambda \bar{q})[f] > 0$ . Множество глубин  $(h_0, h_1)$ , удовлетворяющих этому условию, показано на фиг. 2, *б* в виде двух областей, заштрихованных прямыми с наклоном влево. Аналогичным образом, РУВ, для которых  $Q < 0$  и  $q > 0$ , будут устойчивы при выполнении неравенства  $(\bar{Q} - \lambda \bar{q})[f] < 0$  и, следовательно, допустимые ими значения глубин заполняют на фиг. 2, *б* незаштрихованные части области  $BCDE$ .

Глубины  $(h_0, h_1)$ , удовлетворяющие условиям выпуклости (6.4), показаны на фиг. 2, *б* (так же, как и на фиг. 1, *б*) в виде двух заштрихованных крест-накрест множеств. Из фиг. 2, *б* следует, что при условиях (6.5) РУВ, удовлетворяющие условию выпуклости (6.4), устойчивы, только когда в нижнем слое течение направлено по оси  $x$ , а в верхнем слое – в противоположном направлении, т.е. когда  $Q > 0$  и  $q < 0$ . Численные расчеты показали, что этот результат остается верным и при других допустимых значениях параметров  $H_1$  и  $\lambda$ .



Фиг. 3

**8. "Естественные плотины".** Промежуточными между ОУВ и РУВ являются ударные волны, для которых течение жидкости через разрыв в одном из слоев отсутствует. Такие своеобразные двухслойные прерывные волны назовем естественными плотинами (ЕП) в нижнем (при  $Q = 0$ ) и в верхнем (при  $q = 0$ ) слоях. Можно показать, что при  $Q = 0$  допустимые глубины верхнего слоя лежат на верхней границе  $DE$  области  $BCDE$ , а при  $q = 0$  – на ее нижней границе  $BC$  (см. фиг. 1, б, 2, в).

В случае  $Q = 0$  из первого уравнения (5.4) следует, что

$$4\lambda\mu[h] = \tilde{h}[\varphi] \quad (8.1)$$

Выражая отсюда  $[\varphi]$  и подставляя результат во второе уравнение (5.4), найдем, что расход в верхнем слое определяется по формуле

$$q^2 = 2\mu gh_1^2 h_0^2 / \tilde{h} \quad (8.2)$$

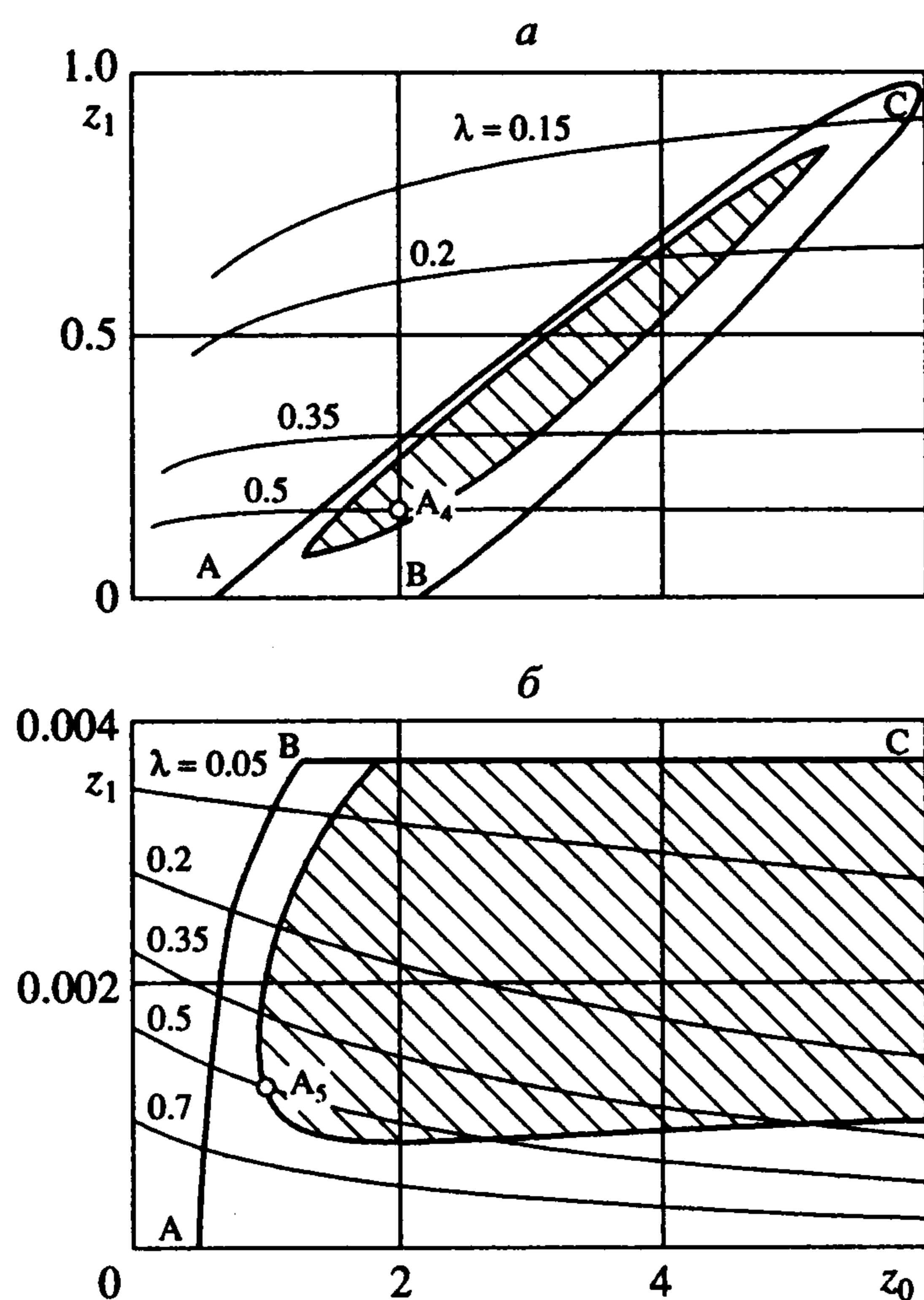
Для таких ЕП условия выпуклости (6.1) принимают вид

$$2h_1(\mu\tilde{b}/\tilde{h})^{1/2} < \psi_0, \quad 2h_0(\mu\tilde{b}/\tilde{h})^{1/2} < \psi_1 \quad (8.3)$$

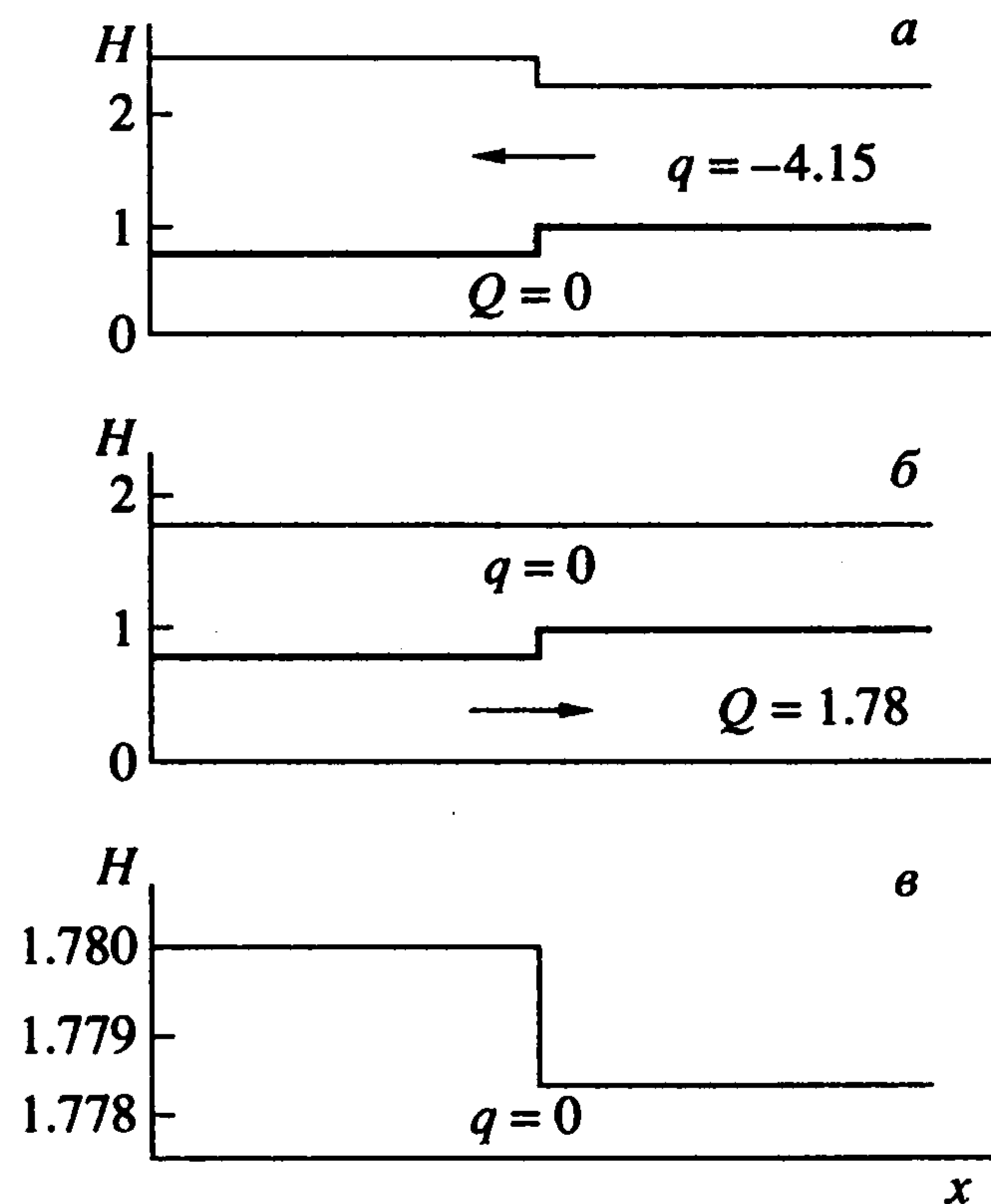
причем функции  $\psi_i$  определяются по формуле (6.3), а параметр  $\lambda$ , при учете того, что  $\mu = 1 - \lambda$  и  $\varphi = H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda Nh$ , находится из уравнения (8.1) по формуле

$$\lambda = \left( (\beta^2 - 16\tilde{h}[h][H^2])^{1/2} - \beta \right) / (8[h]), \quad \beta = \tilde{h}[h^2 + 2Nh] - 4[h] \quad (8.4)$$

В результате ограничения (8.3) в отличие от (6.1) при  $H_0 = 1$  зависят только от трех произвольных параметров  $H_1$ ,  $h_0$  и  $h_1$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4, *a* множество глубин  $(h_0, h_1)$ , удовлетворяющих условию выпуклости (8.3) при  $H_0 = 1$  и  $H_1 = 0,75$ , изображено в системе координат (6.6) в виде области, ограниченной замкнутой линией  $ABC$ . Тонкими линиями на этой фигуре показаны изолинии  $\lambda$ , вычисляемые по формуле (8.4). Численные расчеты показали, что с возрастанием  $H_1$  до  $H_0 = 1$  область  $ABC$  на фиг. 4, *a* неограниченно "вытягивается", а при уменьшении  $H_1$  она сокращается. При этом существует критическое значение  $H_1^* \approx 0,41H_0$ , такое, что при  $H_1 < H_1^*$  область  $ABC$  перестает существовать, т.е. для таких значений глубин  $H_1$  ЕП в нижнем слое условиями выпуклости (8.3) не допускаются.

Из энергетического условия устойчивости (7.2) при  $Q = 0$ , при учете (8.2), получим

$$\begin{aligned} q[v^2 + 2gH_n] &= q(q^2[h^{-2}] + 2g[H_n]) = 2gq(\mu h_1^2 h_0^2 [h^{-2}] / \bar{h} + [H_n]) = \\ &= 2gq([H_n] - \mu[h]) = 2gq[H_m] > 0 \end{aligned}$$

Отсюда, при учете (5.12), следует, что для устойчивости ЕП в нижнем слое необходимо выполнение неравенства  $q < 0$ , означающего, что течение в верхнем слое направлено против оси  $x$ . Пример такой ЕП (соответствующей точке  $A_4$  на фиг. 2, *b* и 4, *a*) приведен на фиг. 5, *a*.

Перейдем к рассмотрению ЕП в верхнем слое, для которых  $q = 0$ . В этом случае из второго уравнения (5.4) следует, что

$$4\mu[h] + \tilde{H}[\varphi] = 0 \quad (8.5)$$

Выражая отсюда  $[\varphi]$  и подставляя результат в первое уравнение (5.4), получим, что расход в нижнем слое определяется по формуле

$$Q^2 = 2\mu g[h] / ([H^{-1}] \tilde{H}) \quad (8.6)$$

Для таких ЕП условия выпуклости (6.1) примут вид

$$2H_1(-\mu[h]\tilde{b}/[H^2])^{1/2} < \psi_0, \quad 2H_0(-\mu[h]\tilde{b}/[H^2])^{1/2} < \psi_1 \quad (8.7)$$

причем функции  $\psi_i$  определяются по формуле (6.3), а параметр  $\lambda$  находится из уравнения (8.5) по формуле

$$\lambda = (4[h] - \tilde{H}[H^2]) / (\tilde{H}[h^2 + 2Nh] + 4[h]) \quad (8.8)$$

На фиг. 4, б в системе координат (6.6) множество глубин  $(h_0, h_1)$ , удовлетворяющих условиям выпуклости (8.7) при  $H_0 = 1$  и  $H_1 = 0.75$ , представляет собой область, ограниченную линией  $ABC$  и осью  $z_0$ . Более тонкими линиями показаны изолинии  $\lambda$ , вычисляемые по формуле (8.8). Как следует из этой фигуры (а также из результатов других расчетов), отличительной особенностью ЕП в верхнем слое является то, что при конечных  $H_1$  они могут существовать лишь при очень малом скачке полной глубины на линии разрыва (для фиг. 4, б  $[H_n] < 0.004$ ). Это означает, что верхняя граница потока при таких разрывах визуально будет восприниматься как горизонтальная поверхность (см. фиг. 5, б).

Из энергетического условия устойчивости (7.2) при  $q = 0$ , при учете (8.6), получим

$$\begin{aligned} Q[V^2 + 2gH_m] &= Q(Q^2[H^{-2}] + 2g[H_m]) = 2gQ([H_m] + \mu[h][H^{-2}]/([H^{-1}]\tilde{H})) = \\ &= 2gQ([H_m] + \mu[h]) = 2gQ[H_n] > 0 \end{aligned}$$

Из этого неравенства, при учете (5.11), следует, что для устойчивости ЕП в верхнем слое необходимо, чтобы  $Q > 0$ , т.е. чтобы в нижнем слое течение было направлено по оси  $x$ . Пример такой ЕП (соответствующей точке  $A_5$  на фиг. 2, б и 4, б) приведен на фиг. 5, б, в. При этом на фиг. 5, в в более мелком масштабе по оси  $H$  показан соответствующий этой ЕП разрыв свободной поверхности.

**9. Двухслойная "мелкая вода" в двумерном случае.** Еще одним важным и одновременно независимым критерием корректности предложенной полной системы законов сохранения для модели двухслойной "мелкой воды" является возможность ее естественного обобщения на пространственно двумерный случай. С учетом этого рассмотрим двумерное течение двухслойной "мелкой воды" над горизонтальным дном в предположении, что трение о дно и между слоями отсутствует. Такое течение определяется глубинами  $h, H$  и осредненными по вертикали горизонтальными скоростями  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ,  $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$  соответственно верхнего и нижнего слоев, которые зависят от времени  $t$  и горизонтальных координат  $x$  и  $y$ .

Дифференциальные уравнения, описывающие это течение, могут быть получены из интегральных законов сохранения массы и полного импульса в каждом из слоев жидкости при помощи метода близкого тому, который был применен [2] для вывода уравнений однослойной "мелкой воды" в одномерном случае. Указанные уравнения имеют вид

$$h_t + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \quad H_t + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0 \quad (9.1)$$

$$\mathbf{q}_t + \operatorname{div} (\mathbf{q} \otimes \mathbf{v}) + gh\nabla H_n = 0, \quad \mathbf{Q}_t + \operatorname{div} (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{V}) + gH\nabla H_m = 0 \quad (9.2)$$

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2) = h\mathbf{v}, \quad \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) = H\mathbf{V}, \quad \operatorname{div} \mathbf{q} = q_{1x} + q_{2y}$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{q} \otimes \mathbf{v}) = ((q_1 v_1)_x + (q_1 v_2)_y, (q_2 v_1)_x + (q_2 v_2)_y)$$

Уравнения (9.1) представляют собой законы сохранения массы в слоях, а уравнения (9.2) описывают изменение полных импульсов в каждом из слоев.

Дифференциальными следствиями системы (9.1), (9.2) являются уравнения Эйлера

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + g\nabla H_n = 0, \quad \mathbf{V}_t + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + g\nabla H_m = 0 \quad (9.3)$$

описывающие изменение локального импульса в слоях, закон сохранения полного импульса

$$\alpha = Q + \lambda q \quad (9.4)$$

в виде

$$\alpha_t + \operatorname{div}(Q \otimes V) + \lambda \operatorname{div}(q \otimes v) + g \nabla \varphi / 2 = 0 \quad (9.5)$$

и закон сохранения полной энергии

$$e = Q \cdot V + \lambda q \cdot v + g \varphi \quad (9.6)$$

в виде

$$e_t + \operatorname{div}(\bar{F}Q + \lambda \bar{f}q) = 0 \quad (9.7)$$

где

$$\bar{F} = |V|^2 + 2gH_m, \quad \bar{f} = |v|^2 + 2gH_n \quad (9.8)$$

Преобразуя уравнения (9.3) при помощи формулы

$$(v \nabla)v = \nabla(|v|^2 / 2) - [v \times \operatorname{rot} v] = \nabla(|v|^2 / 2) - w v^\perp$$

в которой  $w = v_{2x} - v_{1y}$  – плоский вихрь, а  $v^\perp = (v_2, -v_1)$  – вектор, перпендикулярный вектору скорости  $v$ , получим уравнения

$$v_t + \nabla \bar{f} / 2 = w v^\perp, \quad V_t + \nabla \bar{F} / 2 = W V^\perp \quad (9.9)$$

представляющие собой двумерный аналог дивергентных уравнений (4.2). Сами уравнения (9.9) являются дивергентными лишь в случае потенциальных течений в слоях, для которых  $w = W = 0$ . В этом случае система (9.1), (9.9) может быть получена при помощи метода потенциала, аналогичного тому, который был использован [1] при выводе одномерных уравнений (4.1), (4.2).

Применяя к уравнениям (9.9) операцию вихря, получим скалярные дивергентные уравнения

$$w_t + \operatorname{div}(wv) = 0, \quad W_t + \operatorname{div}(WV) = 0 \quad (9.10)$$

представляющие собой законы сохранения плоских вихрей  $w$  и  $W$  в каждом из слоев двухслойной жидкости. Для гладких течений эти законы сохранения по существу являются пространственно двумерным аналогом теоремы Томпсона о сохранении циркуляции скорости.

По аналогии с одномерным случаем в качестве базисных законов сохранения системы (9.1) – (9.10) возьмем скалярные законы сохранения массы в слоях (9.1), векторный закон сохранения полного импульса (9.5) и вытекающее из (9.3) векторное уравнение

$$\gamma_t + (V \nabla)V - (v \nabla)v - \mu g \nabla h = 0 \quad (9.11)$$

описывающее изменение скачка скорости  $\gamma = V - v$  на границе раздела слоев. Далее будет показано, что, несмотря на недивергентность уравнения (9.11), его можно использовать для корректного получения условий Гюгонио на линиях разрывов.

В качестве замыкающего закона сохранения возьмем закон сохранения полной энергии (9.7). При этом, как и в одномерном случае, полная энергия (9.6), записанная как функция

$$e(h, H, \alpha, \gamma) = (|\alpha|^2 + \lambda h H |\gamma|^2) / (H + \lambda h) + g(H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda h H) \quad (9.12)$$

зависящая от базисных переменных  $u = (h, H, \alpha, \gamma)$ , где  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ , является выпуклой при условии (4.8), (4.9), в котором скалярную величину  $\gamma$  необхо-

димо заменить на плоский вектор  $\gamma$ . Это условие выпуклости (представляющее собой для двумерных течений естественную альтернативу требованию гиперболичности) будет далее использовано для отбора допустимых двухслойных течений.

**10. Условия Гюгонио в двумерном случае.** Для получения условий Гюгонио, которые допускает система базисных законов сохранения (9.1), (9.5), (9.11), рассмотрим какой-нибудь элемент гладкой линии разрыва некоторого ее обобщенного решения и воспользуемся связанной с этим элементом системой координат с осью  $x$ , направленной по нормали к нему, и с осью  $y$ , направленной по касательной к нему. Нормальные и касательные компоненты векторных величин  $f$  будем обозначать  $f_n$  и  $f_\tau$ , при этом для удобства сравнения с формулами одномерного случая индекс  $n$  у нормальных компонент будем иногда опускать. Будем также учитывать, что в рассматриваемой системе координат скорость линии разрыва  $D = 0$  и все величины являются достаточно гладкими функциями переменной  $y$ .

В результате из скалярных уравнений (9.1) и нормальных компонент векторных уравнений (9.5), (9.11), как и в одномерном случае, получим соотношения (5.1) – (5.3), из которых следуют формулы (5.4) и ограничения на скачки глубин на разрыве (5.5). Таким образом, проведенный выше анализ допускаемых условиями Гюгонио скачков глубин на разрыве целиком переносится на двумерный случай.

Из касательной компоненты закона сохранения полного импульса (9.5), при учете (5.1), получим соотношение

$$[QV_\tau + \lambda qv_\tau] = Q[V_\tau] + \lambda q[v_\tau] = 0 \quad (10.1)$$

которое устанавливает связь на разрыве между нормальными компонентами расходов в слоях и скачками касательных компонент скорости. В связи с этим заметим, что в случае однослойной двумерной модели "мелкой воды", для которой закон сохранения полного импульса имеет вид

$$q_t + \operatorname{div}(q \otimes v) + g \nabla h^2/2 = 0$$

условие Гюгонио для его касательной компоненты, аналогичное (10.1), запишется следующим образом:  $q[v_\tau] = 0$ . Отсюда следует, что однослойная двумерная модель, подобно уравнениям классической гидродинамики [16], допускает разрывы лишь двух типов: ударные волны, для которых  $q = q_n \neq 0$ ,  $[v_\tau] = 0$ , и контактные разрывы, для которых  $q = q_n = 0$ ,  $[v_\tau] \neq 0$ . В то же время, как следует из (10.1), двухслойная двумерная модель допускает не только ударные волны и контактные разрывы, но и разрывы смешанного типа, для которых в каждом из слоев отличен от нуля как поток жидкости через разрыв, так и скачок на нем касательной компоненты скорости.

Поскольку касательная компонента уравнения (9.11) не допускает записи в дивергентной форме по переменной  $x$ , то ее нельзя непосредственно использовать для получения еще одного соотношения на разрыве. Для этого необходимо вывести скалярное интегральное следствие уравнения (9.11), для чего, принимая во внимание (9.9), его удобно переписать в виде

$$\gamma_t + \nabla(\bar{F} - \bar{f})/2 = WV^\perp - wv^\perp \quad (10.2)$$

Вводя обозначения

$$\phi = (\bar{F} - \bar{f})/2, \quad \psi = WV^\perp - wv^\perp$$

запишем интегральный аналог закона сохранения (10.2)

$$\int (\gamma g_t + \phi \nabla g - \psi g) dt dx dy = 0, \quad \forall g(t, x, y) \in C_0^\infty \quad (10.3)$$

где  $C_0^\infty$  – класс бесконечно дифференцируемых финитных функций. В формуле (10.3) и далее, если область интегрирования не указана, то это означает, что интегрирование проводится по носителю функции  $g$ .

Для получения искомого интегрального следствия закона сохранения (10.3) применим метод, разработанный в [17]. Подставляя в первую компоненту векторного уравнения (10.3) вместо пробной функции  $g$  ее производную  $g_y$  и подставляя во вторую компоненту этого уравнения вместо  $g$  ее производную  $g_x$ , получим следующие интегральные следствия закона сохранения (10.3):

$$\int (\gamma_1 g_{yt} + \phi g_{yx} - \psi_1 g_y) dt dx dy = 0, \quad \forall g \in C_0^\infty \quad (10.4)$$

$$\int (\gamma_2 g_{xt} + \phi g_{xy} - \psi_2 g_x) dt dx dy = 0, \quad \forall g \in C_0^\infty \quad (10.5)$$

Выполняя для первых слагаемых этих уравнений операцию интегрирования по частям и вычитая после этого из уравнения (10.4) уравнение (10.5), получим скалярный закон сохранения

$$\int ((W - w)g_t + (WV_1 - wv_1)g_x + (WV_2 - wv_2)g_y) dt dx dy = 0, \quad \forall g \in C_0^\infty$$

дифференциальная форма записи которого имеет вид

$$(W - w)_t + \operatorname{div}(WV - wv) = 0 \quad (10.6)$$

Отсюда следует, что в связанной с линией разрыва системе координат имеет место дополнительное условие Гюгонио

$$[V_n W - v_n w] = 0 \quad (10.7)$$

означающее непрерывность на линии разрыва скачка вихря на границе раздела слоев. При этом каждый из вихрей по отдельности, несмотря на то что их изменение на гладких течениях описывается дивергентными уравнениями (9.10), в общем случае на разрыве сохраняться не будет.

Таким образом, для непотенциальных течений векторный закон сохранения скачка скорости (9.11) реализуется на разрывах в виде закона сохранения скачка нормальной компоненты скорости (5.3) и закона сохранения скачка вихря (10.6), (10.7).

**11. Условие выпуклости полной энергии в двумерном случае.** Требование выпуклости (4.8) полной энергии (9.6) по обе стороны от линии разрыва прежде всего приводит к следующим ограничениям на скачки касательной составляющей скорости на границе раздела слоев:

$$|\gamma_{ti}| = |V_{ti} - v_{ti}| < (g / (2\tilde{b}))^{1/2} \psi_i, \quad i = 0, 1 \quad (11.1)$$

причем функции  $\psi_i$  определяются по формуле (6.3). При выполнении условий (11.1) из (4.8), при учете (5.4), следуют дополнительные к (5.5) ограничения на скачки глубин на разрыве:

для ОУВ

$$|\bar{Q} / H_i - \bar{q} / h_i| < (\psi_i^2 - 2\tilde{b}\gamma_{ti}^2 / g)^{1/2}, \quad i = 0, 1 \quad (11.2)$$

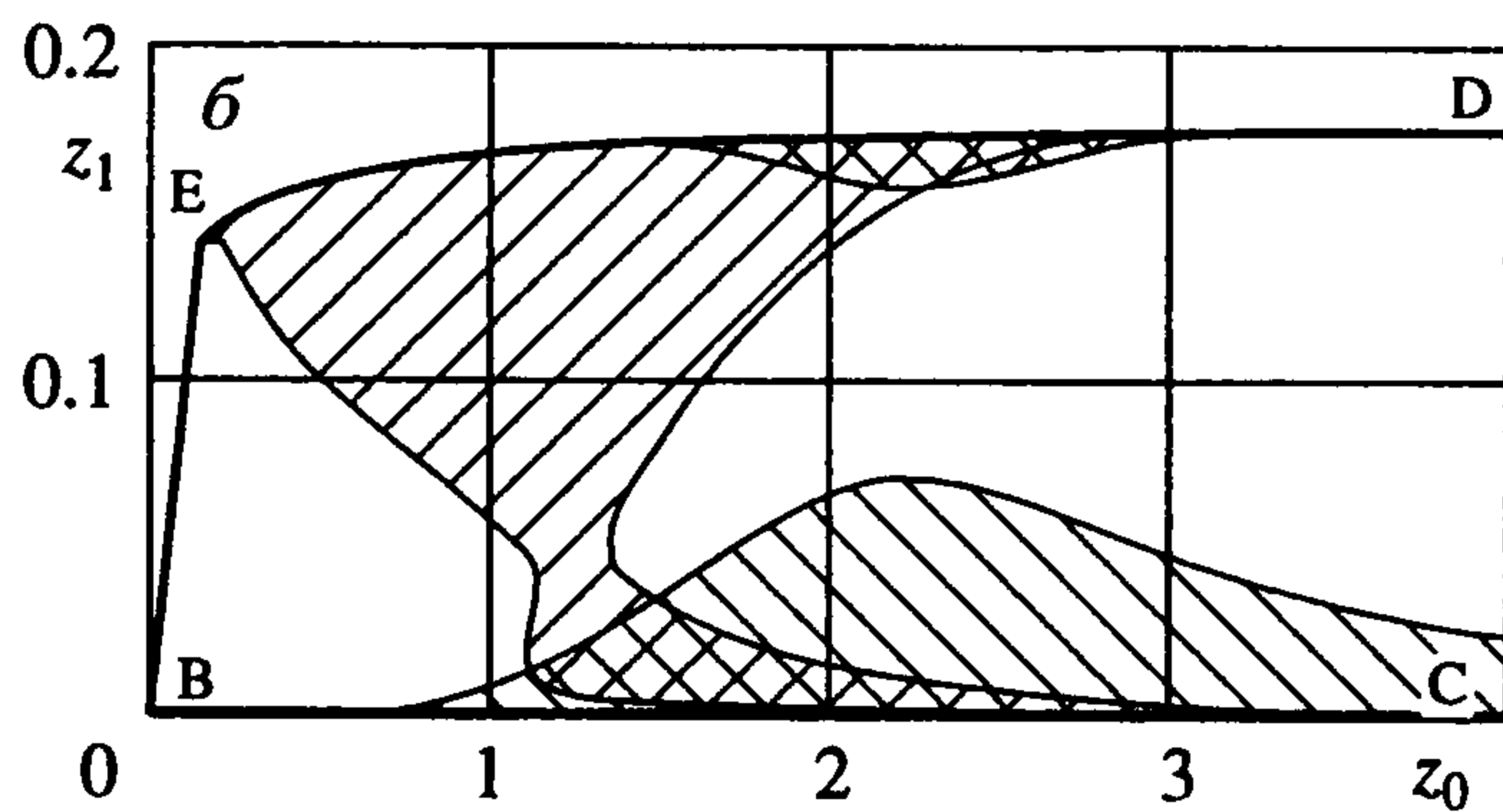
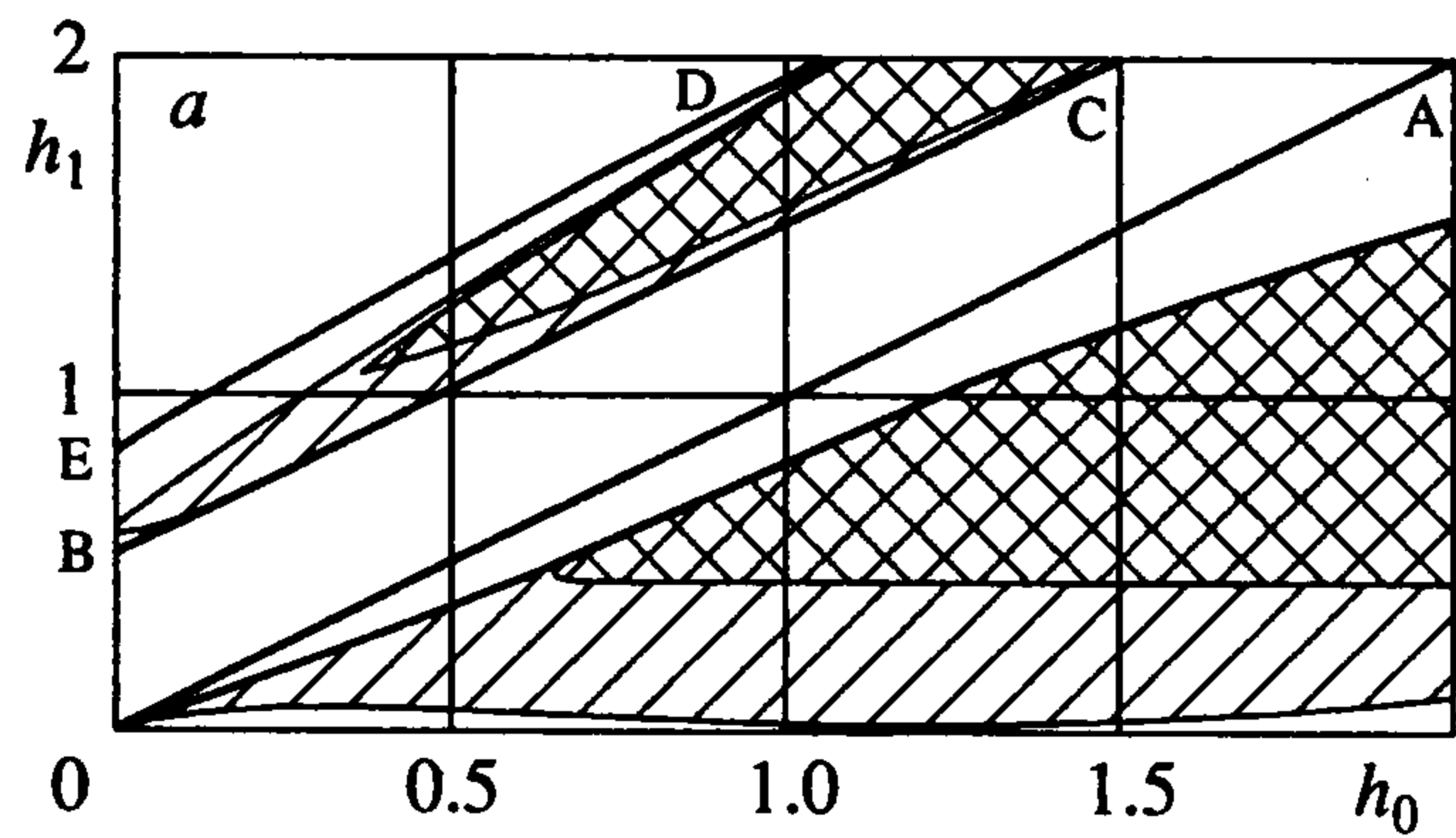
для РУВ

$$|\bar{Q} / H_i + \bar{q} / h_i| < (\psi_i^2 - 2\tilde{b}\gamma_{ti}^2 / g)^{1/2}, \quad i = 0, 1 \quad (11.3)$$

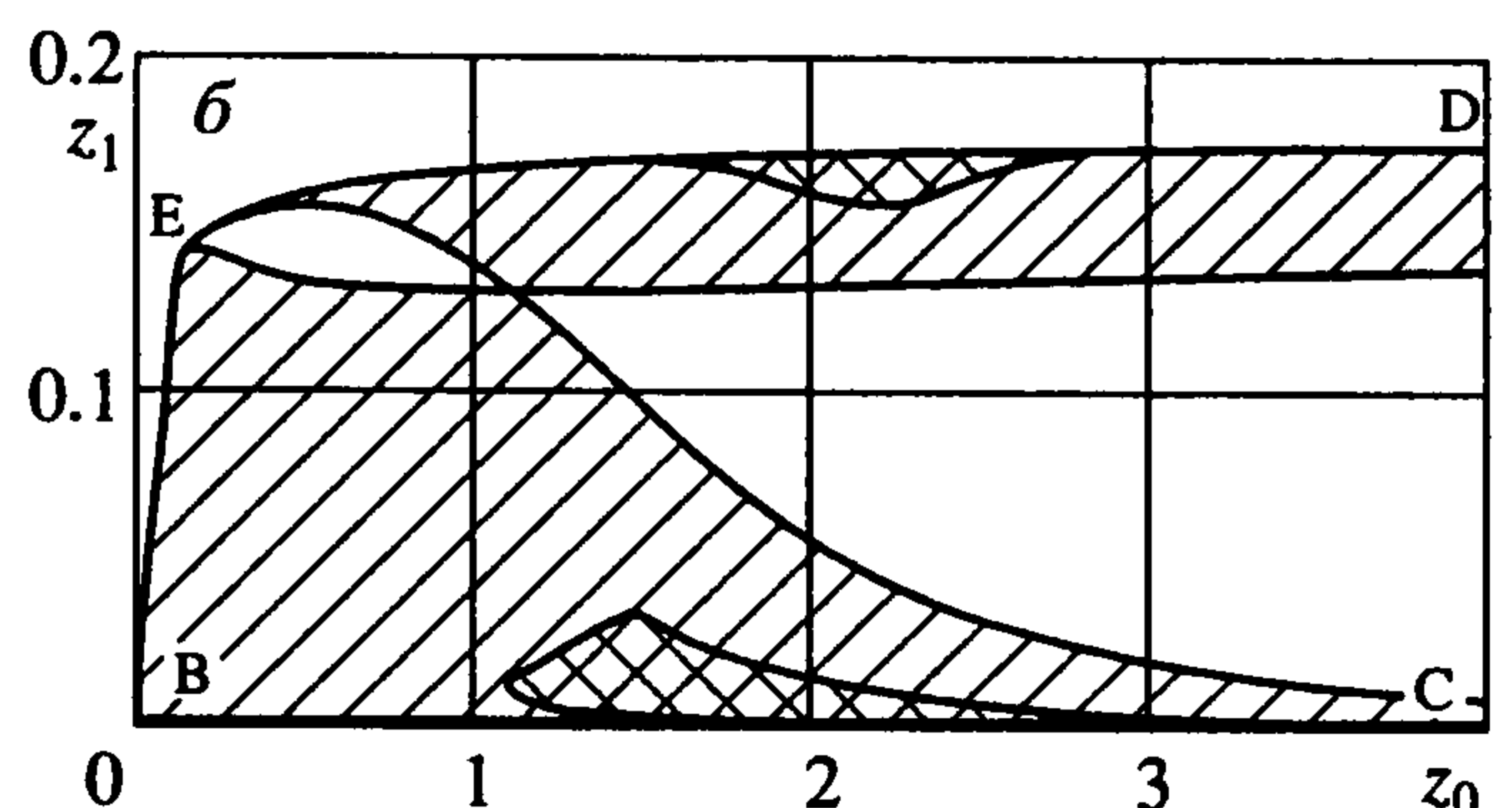
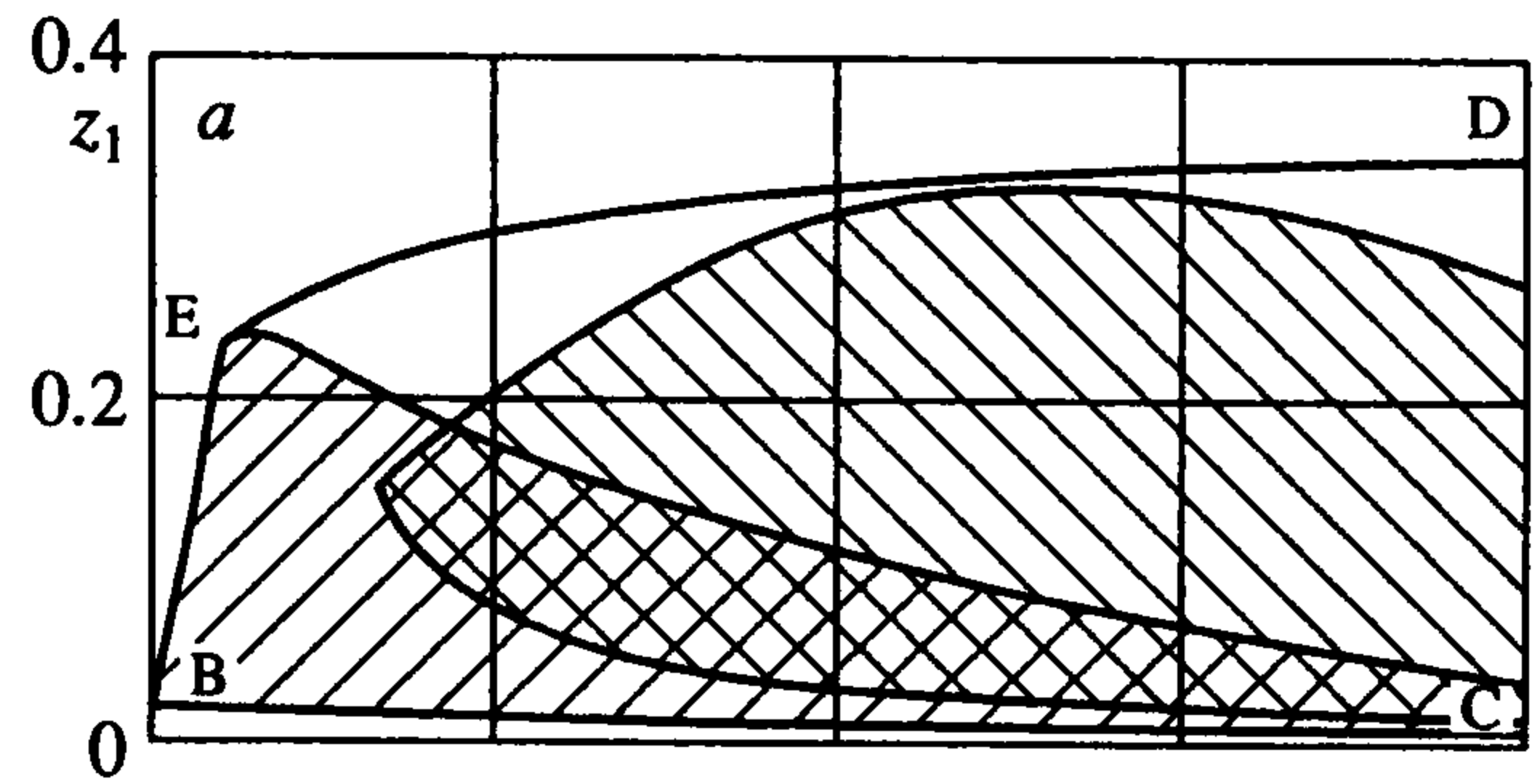
причем величины  $\bar{Q}$  и  $\bar{q}$  определяются по формулам (6.2).

Если по обе стороны от разрыва отсутствует скачок касательной составляющей скорости на границе раздела слоев, т.е. если  $v_{ti} = V_{ti}$ , то тогда ограничения (11.2) и (11.3) совпадают с аналогичными ограничениями (6.1) и (6.4) для одномерных течений. Если же  $V_{ti} \neq v_{ti}$ , то условия (11.2) и (11.3) становятся существенно более жесткими. При этом, как следует из (10.1), скачки касательных составляющих скоростей в слоях  $[V_t]$  и  $[v_t]$  имеют разные знаки для ОУВ и одинаковые знаки для РУВ.

Множества глубин, удовлетворяющих условиям выпуклости (11.2) и (11.3), опреде-



Фиг. 6



Фиг. 7

лялись численно. На фиг. 6, а при

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 0.5, \quad \lambda = 0.5 \quad (11.4)$$

$$V_{\tau 0} = 0, \quad v_{\tau 0} = 1, \quad V_{\tau 1} = 1 \Rightarrow [V_{\tau}] = 1, \quad \gamma_{\tau 0} = -1 \quad (11.5)$$

множество глубин  $(h_0, h_1)$ , удовлетворяющих неравенству (11.2), показано в виде двух заштрихованных крест-накрест областей, расположенных внутри множеств  $A0h_0$  и  $BCDE$ , допускаемых условиями Гюгонио (5.4) (при этом величина  $v_{\tau 1}$ , входящая в (11.2) при  $i = 1$ , определялась из условия Гюгонио (10.1)). Эти области расположены также внутри двух множеств, заштрихованных на фиг. 6, а прямыми с наклоном влево и получаемых из неравенств (11.2) при  $\gamma_{\tau i} = 0$ , т.е. при отсутствии по обе стороны от линии разрыва скачка касательной компоненты скорости на границе раздела слоев (эти множества изображены отдельно на фиг. 1, а).

Ограничения (11.3) являются гораздо более сильными, чем (11.2), как было показано выше (см. фиг. 1, б), даже при  $\gamma_{\tau i} = 0$ , удовлетворяющие неравенству (11.3) глубины расположены на фиг. 6, а только внутри полосы  $BCDE$ . Поэтому при

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 0.75, \quad \lambda = 0.5 \quad (11.6)$$

$$V_{\tau 0} = 0, \quad v_{\tau 0} = 0.25, \quad V_{\tau 1} = 0.25 \Rightarrow [V_{\tau}] = 0.25, \quad \gamma_{\tau 0} = -0.25 \quad (11.7)$$

глубины  $(h_0, h_1)$ , удовлетворяющие условиям (11.3), показаны на фиг. 6, б в системе координат (6.6). Эти глубины заполняют два заштрихованных крест-накрест множества, примыкающих к нижней  $BC$  и верхней  $ED$  границам области  $BCDE$ . При этом на фиг. 6, б (так же, как и на фиг. 1, б) показано не только пересечение множеств (11.3), но и каждое из этих множеств в отдельности: первое из них, получаемое при  $i = 0$ , заштриховано прямыми с наклоном вправо, а второе, получаемое при  $i = 1$ , заштриховано прямыми с наклоном влево.

**12. Устойчивые разрывы в двумерном случае.** Как следует из закона сохранения полной энергии (9.7), энергетическое условие устойчивости, предполагающее потерю на разрыве полной энергии, имеет следующий вид:

$$[\bar{F}Q_n + \lambda \bar{f}q_n] = Q_n[F + V_{\tau}^2] + \lambda q_n[f + v_{\tau}^2] > 0 \quad (12.1)$$

$$F = V_n^2 + 2gH_m, \quad f = v_n^2 + 2gH_n$$

Поскольку из условий Гюгонио (5.3) и (10.1) следует, что

$$[F] = [f], \quad Q_n[V_\tau] = -\lambda q_n[v_\tau] \quad (12.2)$$

то, преобразуя с учетом этого неравенство (12.1), получим

$$\alpha_n[F] + Q_n \bar{\gamma}_\tau[V_\tau] > 0 \quad (12.3)$$

$$\alpha_n = Q_n + \lambda q_n, \quad \bar{\gamma}_\tau = \gamma_{\tau 1} + \gamma_{\tau 0} = V_{\tau 1} + V_{\tau 0} - v_{\tau 1} - v_{\tau 0}$$

Отсюда для ОУВ, направленных по оси  $x$  ( $Q_n > 0, q_n > 0$ ), при учете обозначений (6.2), имеем

$$F_1 = (\bar{Q} + \lambda \bar{q})f_1 + \bar{Q}f_2 > 0, \quad (12.4)$$

$$f_1 = \bar{Q}^2[H^{-2}] + 4\bar{b}[H_m], \quad f_2 = 2\bar{b}\bar{\gamma}_\tau[V_\tau]/g$$

Для ОУВ, направленных против оси  $x$  ( $Q_n < 0, q_n < 0$ ), энергетическое неравенство (12.3) примет вид  $F_1 < 0$ .

Численные расчеты показали, что при параметрах (11.4), (11.5) неравенство (12.4) выполнено во всей области  $A0h_0$  и в некоторой подобласти области  $BCDE$  на фиг. 6, *a*. На фиг. 7, *a* в системе координат (6.6) указанная подобласть заштрихована прямыми с наклоном влево, а множество глубин, удовлетворяющих условиям выпуклости (11.2), – прямыми с наклоном вправо: в результате их общая часть заштрихована крест-накрест. Сравнение этой фигуры с фиг. 2, *a* показывает, что в данном случае наличие скачка касательной компоненты скорости приводит к существенному сужению той части области  $BCDE$ , внутри которой устойчивыми являются разрывы с положительным направлением потоков в слоях ( $Q_n > 0, q_n > 0$ ) и, соответственно, к заметному расширению той части этой области, внутри которой устойчивыми являются разрывы с отрицательным направлением потоков в слоях ( $Q_n < 0, q_n < 0$ ).

Для РУВ, направленных в нижнем слое по оси  $x$ , а в верхнем слое – в противоположном направлении, т.е. при  $Q_n > 0$  и  $q_n < 0$ , из (12.3) получим

$$F_2 = (\bar{Q} - \lambda \bar{q})f_1 + \bar{Q}f_2 > 0 \quad (12.5)$$

Множество глубин ( $h_0, h_1$ ), удовлетворяющих при условиях (11.6), (11.7) неравенству (12.5), показано на фиг. 7, *б* в виде двух областей, заштрихованных прямыми с наклоном влево. Для РУВ, направленных в верхнем слое по оси  $x$ , а в нижнем слое – в противоположном направлении, т.е. при  $Q_n < 0$  и  $q_n > 0$ , энергетическое неравенство (12.5) поменяет знак и примет вид  $F_2 < 0$ . Это означает, что допустимые такими разрывами глубины заполняют на фиг. 7, *б* незаштрихованные части области  $BCDE$ .

Глубины ( $h_0, h_1$ ), удовлетворяющие условиям выпуклости (11.3), показаны на фиг. 7, *б* в виде двух заштрихованных крест-накрест множеств. Из фиг. 7, *б* следует, что при условиях (11.6), (11.7) РУВ, удовлетворяющие условию выпуклости (11.3), устойчивы только когда течение в нижнем слое направлено по оси  $x$ , а в верхнем слое – в противоположном направлении, т.е. когда  $Q_n > 0$  и  $q_n < 0$ . Численные расчеты показали, что этот результат остается верным и при других допустимых значениях параметров течения.

**13. Устойчивые контактные разрывы в слоях.** Промежуточными между двумерными ОУВ ( $Q_n q_n > 0$ ) и РУВ ( $Q_n q_n < 0$ ) являются такие двухслойные разрывы, для которых течение жидкости через разрыв в одном из слоев отсутствует, т.е.  $Q_n = 0$  или  $q_n = 0$ . При этом, с учетом (10.1), возможны три различные ситуации:

а)  $Q_n = q_n = 0$  – в этом случае в обоих слоях имеет место контактный разрыв. Такой двухслойный разрыв будем называть полным контактным разрывом (ПКР);

б)  $Q_n = 0$ ,  $q_n \neq 0$ ,  $[\nu_\tau] = 0$  – в этом случае в нижнем слое имеет место контактный разрыв, а в верхнем слое – ударная волна. Такой комбинированный двухслойный разрыв будем называть контактным разрывом в нижнем слое (КРНС);

в)  $q_n = 0$ ,  $Q_n \neq 0$ ,  $[V_\tau] = 0$  – в этом случае в нижнем слое имеет место ударная волна, а в верхнем слое – контактный разрыв. Такой двухслойный разрыв будем называть контактным разрывом в верхнем слое (КРВС).

Отметим, что контактные разрывы в слоях при  $\gamma_{\tau i} = 0$  ( $i = 0, 1$ ), т.е. при  $V_{\tau 0} = V_{\tau 1} = \nu_{\tau 0} = \nu_{\tau 1}$ , переходят в ЕП, которые изучались в разд. 8.

Из (12.3) следует, что при  $Q_n = q_n = 0$  полная энергия при переходе через разрыв сохраняется, что можно интерпретировать как энергетическую неустойчивость ПКР (в этом проявляется аналогия с классической гидродинамикой [16]). В то же время энергетическое условие устойчивости (12.3) допускает контактные разрывы в слоях: для КРНС оно принимает вид  $q_n[f] > 0$ , а для КРВС – следующий вид:  $Q_n[F] > 0$ . Как показано в разд. 8, при условии  $H_0 > H_1$  из неравенства  $q_n[f] > 0$  следует, что  $q_n < 0$ , а из неравенства  $Q_n[F] > 0$  следует, что  $Q_n > 0$ . Это означает, что при  $H_0 > H_1$  для устойчивости КРНС необходимо, чтобы течение в верхнем слое было направлено против оси  $x$ , и наоборот, для устойчивости КРВС необходимо, чтобы течение в нижнем слое было направлено по оси  $x$ .

В случае КРНС, не нарушая общности, можно считать, что  $\nu_{\tau 0} = \nu_{\tau 1} = 0$ . Тогда условия выпуклости (11.2), (11.3), при учете (8.1), (8.2), примут вид

$$2\mu g h_1^2 / \bar{h} < g \psi_0^2 / (2\tilde{b}) - V_{\tau 0}^2, \quad 2\mu g h_0^2 / \bar{h} < g \psi_1^2 / (2\tilde{b}) - V_{\tau 1}^2 \quad (13.1)$$

причем функции  $\psi_i$  определяются по формуле (6.3), а параметр  $\lambda$  находится из уравнения (8.1).

В качестве примера на фиг. 4, а множество глубин ( $h_0$ ,  $h_1$ ), удовлетворяющих условиям выпуклости (13.1) при  $H_0 = 1$ ,  $H_1 = 0.75$  и при

$$\nu_{\tau 0} = \nu_{\tau 1} = 0, \quad V_{\tau 0} = 1, \quad V_{\tau 1} = 2 \Rightarrow [V_\tau] = 1, \quad \gamma_{\tau 0} = 1, \quad \gamma_{\tau 1} = 2$$

изображено в системе координат (6.6) в виде заштрихованной области. Эта область расположена внутри множества, ограниченного замкнутой линией  $ABC$  и получаемого из неравенств (13.1) при  $V_{\tau 0} = V_{\tau 1} = 0$ .

В случае КРВС, не нарушая общности, можно считать, что  $V_{\tau 0} = V_{\tau 1} = 0$ . Тогда условия выпуклости (11.2), (11.3), при учете (8.5), (8.6), можно записать в виде

$$2\mu g H_1^2 [h] / [H^2] > \nu_{\tau 0}^2 - g \psi_0^2 / (2\tilde{b}), \quad 2\mu g H_0^2 [h] / [H^2] > \nu_{\tau 1}^2 - g \psi_1^2 / (2\tilde{b}) \quad (13.2)$$

причем функции  $\psi_i$  определяются по формуле (6.3), а параметр  $\lambda$  находится из уравнения (8.5).

В качестве примера на фиг. 4, б множество глубин ( $h_0$ ,  $h_1$ ), удовлетворяющих условиям выпуклости (13.2) при  $H_0 = 1$ ,  $H_1 = 0.75$  и при

$$V_{\tau 0} = V_{\tau 1} = 0, \quad \nu_{\tau 0} = 1, \quad \nu_{\tau 1} = 2 \Rightarrow [\nu_\tau] = 1, \quad \gamma_{\tau 0} = -1, \quad \gamma_{\tau 1} = -2$$

изображено в системе координат (6.6) в виде заштрихованной области. Эта область расположена внутри множества, ограниченного линией  $ABC$  и осью  $z_0$  и получаемого из неравенств (13.4) при  $\nu_{\tau 0} = \nu_{\tau 1} = 0$ .

**14. Заключение.** Проведенный анализ устойчивых прерывных двухслойных волн носит чисто теоретический характер, и возможность реального существования таких волн требует специального экспериментального исследования. При этом необходимо учитывать, что разрывы, рассматриваемые в рамках данной модели, на практике

представляют собой целые переходные области волнообразного течения жидкости, что может существенно затруднять интерпретацию получаемых результатов.

Представляет также интерес дальнейшее более детальное изучение особенностей разрывных течений двухслойной "мелкой воды" на основе прямого численного моделирования предложенной в данной работе полной системы законов сохранения.

Автор благодарит Э.В. Шугрину за помощь в оформлении графического материала.

Результаты работы докладывались на Всероссийской конференции "Математические проблемы механики", приуроченной к 80-летию академика Л.В. Овсянникова (19–22 апреля 1999 г., Новосибирск).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Совета поддержки ведущих научных школ (00-15-96-162).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Модели двухслойной "мелкой воды" // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
3. Ляпидевский В.Ю. Задача о распаде разрыва для уравнений двухслойной мелкой воды // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1981. Вып. 50. С. 85–98.
4. Ляпидевский В.Ю. Структура гравитационного течения в смешивающейся жидкости // ПМТФ. 1998. Т. 30. № 3. С. 79–85.
5. Тешуков В.М. Гидравлический прыжок на сдвиговом течении идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 1. С. 11–20.
6. Тешуков В.М. Гидравлический прыжок на сдвиговом течении баротропной жидкости // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 5. С. 73–81.
7. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: SIAM, 1973. 48 p.
8. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука, 1993. 368 с.
9. Friedrichs K.O., Lax P.D. Systems of conservation equations with a convex extension // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1971. V. 68. № 8. P. 1686–1688.
10. Годунов С.К. Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 3. С. 521–523.
11. Шугрин С.М. Об одном классе квазилинейных систем // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1969. Вып. 2. С. 145–148.
12. Harten A., Hyman J.M., Lax P.D. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks // Commun. Pure and Appl. Math. 1976. V. 29. № 3. P. 297–322.
13. Godunov S.K., Romensky E.I. Thermodynamics, conservation laws, and symmetric forms of differential equations in mechanics of continuous media // Comput. Fluid Dynamics. Review / Ed. by M. Hafez and K. Oshima. Chichester: Wiley, 1995. P. 19–31.
14. Sever M. Estimate of the time rate of entropy dissipation of systems of conservation laws // J. Different. Equat. 1996. V. 130. № 1. P. 127–141.
15. Остапенко В.В. Полные системы законов сохранения для моделей двухслойной "мелкой воды" // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 5. С. 23–32.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
17. Остапенко В.В. О повышении порядка слабой аппроксимации законов сохранения на разрывных решениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. № 10. С. 146–157.