

УДК 532.5

© 2001 г. М.М. Алимов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛООБМЕНЕ ПЛАСТИНЫ С БЕЗГРАНИЧНЫМ И РАВНОМЕРНЫМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

В пределе малых чисел Пекле аналитически получены три старших члена асимптотического разложения решения задачи конвективного теплообмена тонкой пластины конечной длины и произвольной температуры поверхности с безграничным и равномерным потоком жидкости при малых числах Прандтля.

Несмотря на то что на практике случай, когда числа Рейнольдса и Прандтля удовлетворяют условиям $Re \gg 1$, $Pr \ll 1$, наблюдается редко [1], сама задача о конвективном теплообмене пластины конечной длины с безграничным и равномерным потоком жидкости интересна как задача математической физики, часто встречающаяся в различных областях прикладной механики, например в контактных задачах теории упругости [2], в задачах замораживания фильтрующих грунтов [3] и т.д. Для случая, когда на поверхности пластины поддерживается постоянная температура, имеется аналитическое решение, полученное несколькими авторами [2, 4–7] и представляющее собой ряд по функциям Матье. Последнее обстоятельство затрудняет его использование как в численном, так и в качественном анализе. В данной работе в отличие от упомянутых представлений решения через функции Матье не используется, а асимптотика строится непосредственно с помощью аппарата интегральных уравнений и аналитических функций комплексного переменного.

1. Постановка задачи. Установившийся конвективный теплообмен тонкой пластины конечной длины с безграничным и равномерным потоком жидкости (фигура) описывается системой уравнений [8]

$$\begin{aligned} Re \partial \theta / \partial x &= \Delta \theta, \quad x, y \in D \\ \theta &= 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty; \quad \theta = f(x), \quad x \in \Gamma = [-1, 1] \end{aligned} \quad (1.1)$$

где x, y – безразмерные декартовы координаты (отнесенные к полудлине пластины), D – область течения (внешность отрезка $\Gamma = [-1, 1]$), θ – температура, отсчитываемая от температуры на бесконечности, $f(x)$ – заданное распределение температуры на пластине, Re – число Пекле, построенное по полудлине пластины, скорости набегающего потока и коэффициенту температуропроводности жидкости.

Заметим, что задача симметрична относительно оси $y = 0$, поэтому на участках $|x| > 1$ этой оси выполняется условие $\partial \theta / \partial y = 0$.

Будем полагать, что функция $f(x)$ может быть аппроксимирована рядом

$$f(x) = \sum_{k=0}^N c_k T_k(x) \quad (1.2)$$

где T_k – полиномы Чебышева первого рода [9]. В виду линейности системы (1.1) достаточно рассмотреть случай $f(x) = T_k(x)$, $k \geq 0$.

Методом граничных интегральных уравнений задача (1.1) сводится к интегральному уравнению [10]

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \mu(\xi) \exp\left[\frac{Pe}{2}(x - \xi)\right] K_0\left(\frac{Pe}{2}|x - \xi|\right) d\xi = T_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k \geq 0 \quad (1.3)$$

где

$$\mu(x) = \partial\theta/\partial y, \quad x \in \Gamma, \quad y = +0$$

После его решения суммарный поток тепла к пластине $2Q$ и температура $\theta(x, y)$ в области D определяются по формулам

$$Q = \int_{-1}^1 \mu(\xi) d\xi \quad (1.4)$$

$$\theta(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \mu(\xi) \exp\left[\frac{\text{Pe}}{2}(x - \xi)\right] K_0\left(\frac{\text{Pe}}{2} r\right) d\xi, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} \quad (1.5)$$

Удобно ввести обозначения

$$v(\xi) = \mu(\xi) \exp\left(-\frac{\text{Pe}}{2}\xi\right), \quad \Theta(x, y) = -\theta(x, y) \exp\left(-\frac{\text{Pe}}{2}x\right) \quad (1.6)$$

Тогда для функции $\Theta(x, y)$ из выражения (1.5) можно получить интегральное представление

$$\Theta(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v(\xi) K_0\left(\frac{\text{Pe}}{2} r\right) d\xi, \quad x, y \in D \quad (1.7)$$

а из условия (1.3) – граничное уравнение

$$\Theta(x, y)|_{\Gamma} = -T_k(x) \exp\left(-\frac{\text{Pe}}{2}x\right), \quad k \geq 0 \quad (1.8)$$

2. Случай малого числа Пекле. В случае $\text{Pe} \ll 1$ и $x^2 + y^2 \sim 1$ ядро интегрального оператора (1.7) и правую часть уравнения (1.8) можно разложить асимптотически. Будем иметь [9]

$$K_0\left(\frac{\text{Pe}}{2} r\right) = (m - \ln r) + \frac{\text{Pe}^2 r^2}{16} [m + 1 - \ln r] + O(\text{Pe}^4), \quad m = \ln \frac{4}{\text{Pe}} - C \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} T_k(x) \exp\left(-\frac{\text{Pe}}{2}x\right) &= T_k(x) - \frac{\text{Pe}}{4} [T_{k+1}(x) + T_{|k-1|}(x)] + \\ &+ \frac{\text{Pe}^2}{32} [T_{k+2}(x) + 2T_k(x) + T_{|k-2|}(x)] + O(\text{Pe}^3) \end{aligned} \quad (2.2)$$

где C – постоянная Эйлера.

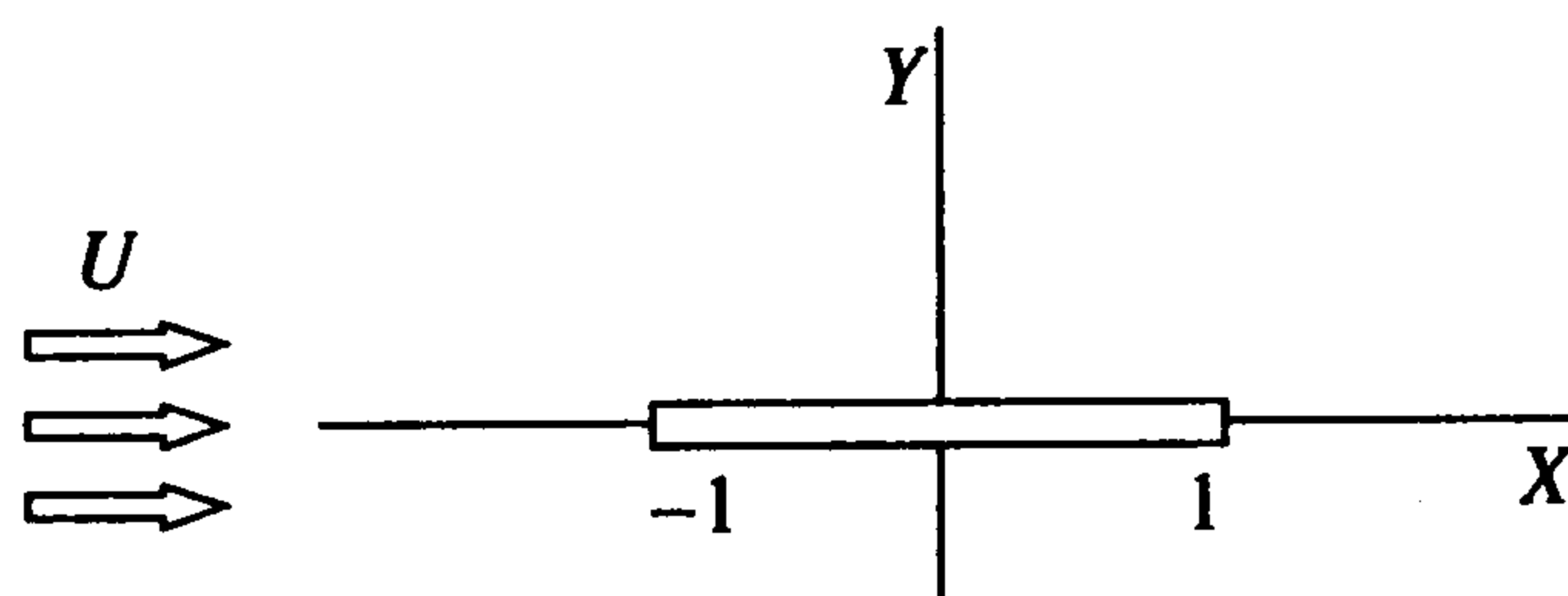
Для проведения асимптотического анализа положим, что $v(\xi)$, Q и $\Theta(x, y)$ могут быть представлены в виде асимптотических рядов по степеням Pe

$$v(\xi) = v_0(\xi) + \text{Pe} v_1(\xi) + \text{Pe}^2 v_2(\xi) + O(\text{Pe}^3) \quad (2.3)$$

$$Q = Q_0 + \text{Pe} Q_1 + \text{Pe}^2 Q_2 + O(\text{Pe}^3) \quad (2.4)$$

$$\Theta(x, y) = \Theta_0(x, y) + \text{Pe} \Theta_1(x, y) + \text{Pe}^2 \Theta_2(x, y) + O(\text{Pe}^3) \quad (2.5)$$

Зависимость $m(\text{Pe})$ в разложении (2.1) ядра интегрального уравнения указывает, что в



Фиг. 1

этих представлениях должны присутствовать члены порядка $Re^i \ln Re$. Запись (2.3)–(2.5) означает, что формально при построении решения m считается постоянной величиной и в действительности $v_i(\xi)$, Q_i , $\Theta_i(x, y)$ посредством m будут зависеть от Re . Такой прием позволяет сократить выкладки и корректен, поскольку найденные с его помощью коэффициенты при Re^i слабо (логарифмически) зависят от Re и не портят асимптотический характер разложений (2.3)–(2.5).

Подстановка выражений (2.3), (2.4) в соотношения (1.4), (1.6) дает

$$Q_i = q_i + \frac{\bar{\delta}_{i0}}{2} \int_{-1}^1 v_{i-1}(\xi) \xi d\xi + \frac{\delta_{i2}}{8} \int_{-1}^1 v_{i-2}(\xi) \xi^2 d\xi, \quad i = 0, 1, 2; \quad (2.6)$$

$$q_i = \int_{-1}^1 v_i(\xi) d\xi \quad (2.7)$$

(δ_{ij} – символ Кронекера, $\bar{\delta}_{ij} = 1 - \delta_{ij}$).

Подставим выражения (2.1), (2.3), (2.5) в представление (1.7) функции $\Theta(x, y)$ и разделим его по порядкам. Получим интегральные представления

$$\Theta_i(x, y) = \frac{mq_i}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v_i(\xi) \ln r d\xi + \delta_{i2} F(x, y), \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.8)$$

где

$$F(x, y) = \frac{1}{16\pi} \int_{-1}^1 v_0(\xi) r^2 [m + 1 - \ln r] d\xi \quad (2.9)$$

Далее подставим выражения (2.2), (2.5) в уравнение (1.8) и также разделим полученное соотношение по порядкам. Получим граничные условия для функций $\Theta_i(x, y)$:

$$\Theta_i(x, y)|_{\Gamma} = -\delta_{i0} T_k(x) + \frac{\delta_{i1}}{4} [T_{k+1}(x) + T_{|k-1|}(x)] - \frac{\delta_{i2}}{32} [T_{k+2}(x) + 2T_k(x) + T_{|k-2|}(x)],$$

$$i = 0, 1, 2; \quad k \geq 0 \quad (2.10)$$

Таким образом, задача (1.1) при малых Re сведена к серии задач для логарифмических потенциалов (2.7)–(2.10), охватывающей три старших члена асимптотики.

3. О решении граничных интегральных уравнений типа (2.8), (2.10) в терминах аналитических функций. Как известно [11], конструктивный анализ такого рода граничных задач может быть проведен с помощью спектрального соотношения

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln |x - \xi| d\xi = \delta_{n0} \ln 2 + \frac{\bar{\delta}_{n0}}{n} T_n(x), \quad x \in [-1, 1] \quad (3.1)$$

где $n \geq 0$, однако решение в виде логарифмических потенциалов неудобно для использования. Выразим соотношение (3.1) в терминах аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$.

Введем функцию

$$\mathcal{P}(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}$$

Чтобы обеспечить однозначность, договоримся под корнем понимать ту его ветвь, которая совпадает с корнем арифметическим на действительной оси при $x > 1$. Функция $\mathcal{P}(z)$ является обратной к функции Жуковского [12] и отображает область D на единичный круг $|\mathcal{P}| \leq 1$. На разрезе Γ , очевидно, имеем

$$\mathcal{P}(z)|_{\Gamma} = \exp(i \arccos x) \quad (3.2)$$

откуда следует [9], что

$$\mathcal{P}^n(z)|_{\Gamma} = T_n(x) + iU_n(x), \quad n \geq 1$$

где $U_n(x)$ – полиномы Чебышева второго рода.

Случаю $n = 0$ в соотношении (3.1) отвечает задача о кондуктивном притоке тепла от бесконечно удаленного источника к пластине Γ , имеющей постоянную температуру. В плоскости комплексного переменного $\mathcal{P}$ ей соответствует задача о кондуктивном притоке тепла от источника, расположенного в точке $\mathcal{P} = 0$, к контуру $|\mathcal{P}| = 1$, имеющему постоянную температуру. Комплексный тепловой потенциал такой задачи с точностью до несущественной аддитивной постоянной будет равен $\lambda \ln \mathcal{P}$, где λ – параметр, определяющий суммарный приток тепла к пластине. Учитывая это обстоятельство, а также выражение (3.2), можно получить искомый вид соотношения (3.1) в терминах аналитической функции $\Omega(z)$, такой, что

$$\operatorname{Re} \Omega(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v^*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln r d\xi \quad (3.3)$$

Действительно, из соотношения (3.1) следует, что плотности $v^*(\xi)$ вида

$$v^*(\xi) = T_n(\xi), \quad n \geq 0 \quad (3.4)$$

соответствует функция

$$\Omega(z) = \delta_{n0} \ln[2\mathcal{P}(z)] + \frac{\bar{\delta}_{n0}}{n} \mathcal{P}^n(z), \quad n \geq 0 \quad (3.5)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что при $n = 0$ вышеоговоренный параметр $\lambda = 1$. Это вытекает из сравнения поведения функции $\operatorname{Re} \Omega(z)$ в форме (3.3) и (3.5) для $z = x \rightarrow \infty$ при учете равенства [13]

$$\int_{-1}^1 \frac{v^*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \delta_{n0} \pi$$

Аналогичная проверка поведения функции $\operatorname{Re} \Omega(z)$ на бесконечности проводится и при $n \geq 1$.

Из полученных соотношений следует

Утверждение. Решение граничного уравнения

$$\operatorname{Re} \Omega(z)|_{\Gamma} = T_n(x), \quad n \geq 0$$

для функции вида (3.3) представляется выражением

$$\Omega(z) = \delta_{n0} \left[1 + \frac{\ln \mathcal{P}(z)}{\ln 2} \right] + \bar{\delta}_{n0} \mathcal{P}^n(z), \quad n \geq 0 \quad (3.6)$$

причем

$$\int_{-1}^1 \frac{v^*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \delta_{n0} \frac{\pi}{\ln 2} \quad (3.7)$$

4. Построение решения. Построим решение задачи (2.7)–(2.10) в терминах аналитических функций $\Omega_i(z)$

$$\operatorname{Re} \Omega_i(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_i^*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln r d\xi, \quad v_i^*(\xi) = v_i(\xi) \sqrt{1-\xi^2} \quad (4.1)$$

связанных с $\Theta_i(x, y)$ формулой

$$\Theta_i(x, y) = \operatorname{Re} \Omega_i(z) + \frac{mq_i}{\pi} + \delta_{i2} F(x, y) \quad (4.2)$$

вытекающей из представлений (2.8), (4.1).

В соответствии с соотношениями (4.2), (2.10) на границе Γ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Omega_i(z) |_{\Gamma} = & \delta_{i0} \left[T_k(x) - \frac{mq_0}{\pi} \right] - \delta_{i1} \left\{ \frac{1}{4} [T_{k+1}(x) + T_{|k-1|}(x)] + \frac{mq_1}{\pi} \right\} + \\ & + \delta_{i2} \left\{ \frac{1}{32} [T_{k+2}(x) + 2T_k(x) + T_{|k-2|}(x)] - \frac{mq_2}{\pi} - F(x, y) |_{\Gamma} \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тогда для функции $\Omega_0(z)$ в силу утверждения из разд. 3 справедливо представление

$$\Omega_0(z) = \left(\delta_{k0} - \frac{mq_0}{\pi} \right) \left[1 + \frac{\ln \mathcal{P}(z)}{\ln 2} \right] + \bar{\delta}_{k0} \mathcal{P}^k(z)$$

Соотношения (2.7), (3.7) позволяют определить постоянную q_0 и окончательный вид функции $\Omega_0(z)$

$$\Omega_0(z) = \frac{q_0}{\pi} \ln[2\mathcal{P}(z)] + \bar{\delta}_{k0} \mathcal{P}^k(z), \quad q_0 = \frac{\delta_{k0}\pi}{m + \ln 2} \quad (4.4)$$

Аналогично находим

$$\Omega_1(z) = \frac{q_1}{\pi} \ln[2\mathcal{P}(z)] - \frac{1}{4} [\bar{\delta}_{k1} \mathcal{P}^{|k-1|}(z) + \mathcal{P}^{k+1}(z)], \quad q_1 = -\frac{\delta_{k1}\pi}{4(m + \ln 2)} \quad (4.5)$$

Задача для $\Omega_2(z)$ несколько сложнее ввиду присутствия негармонического добавка $F(x, y)$ в формуле (4.2) и соответствующего добавка в граничном условии (4.3). Выразим $F(x, y)$ в терминах функций $\mathcal{P}(z)$.

Прежде всего с помощью спектрального соотношения (3.1) найдем из граничного уравнения (4.3), (4.1) вид функции $v_0^*(\xi)$

$$v_0^*(\xi) = \frac{q_0}{\pi} + kT_k(\xi) \quad (4.6)$$

Подстановка его в выражение (2.10) при учете соотношений (3.3)–(3.5), (4.4) даст

$$\begin{aligned} F(x, y) = & \frac{m+1}{16} \left(\frac{\delta_{k2}}{2} - x\delta_{k1} + \omega \frac{q_0}{\pi} \right) + \frac{\delta_{k2} - 2x}{32} \ln[2|\mathcal{P}(z)|] + \frac{\omega}{16} \operatorname{Re} \Omega_0(z) - \\ & - \frac{x}{16} \operatorname{Re} \left\{ \frac{2q_0}{\pi} \mathcal{P}(z) + k \left[\frac{\mathcal{P}^{k+1}(z)}{k+1} + \bar{\delta}_{k1} \frac{\mathcal{P}^{|k-1|}(z)}{|k-1|} \right] \right\} + \operatorname{Re} \Omega^*(z) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\omega = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}, \quad \Omega^*(z) = \frac{q_0}{64\pi} \mathcal{P}^2(z) + \frac{k}{64} \left[\frac{\mathcal{P}^{k+2}(z)}{k+2} + \bar{\delta}_{k2} \frac{\mathcal{P}^{|k-2|}(z)}{|k-2|} \right]$$

Очевидно, $\Omega^*(z)$ – функция типа (3.3), она состоит из нескольких слагаемых вида (3.6), причем ни одно из них не дает вклада в интеграл (3.7). Оказывается, этого достаточно, чтобы в конечном выражении для $\Theta_2(x, y)$ она не давала никакого вклада. Поэтому в дальнейших выкладках не будем конкретизировать вид связанных с ней членов.

Теперь в соответствии с соотношениями (3.2), (4.3) и найденным видом функции

$F(x, y)$ можем выписать граничное условие для функции $\Omega_2(z)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Omega_2(z)|_{\Gamma} = & \frac{mq_2}{\pi} - \frac{m+1+\ln 2}{16} \left[\frac{\delta_{k2}}{2} - \delta_{k1} T_1(x) \right] - \operatorname{Re} \Omega^*(z)|_{\Gamma} + \\ & + \frac{T_{k+2}(x) + T_{|k-2|}(x)}{64} + \frac{k}{32} \left[\frac{T_{k+2}(x) + T_k(x)}{k+1} + \bar{\delta}_{k1} \frac{T_{|k-2|}(x) + T_k(x)}{|k-1|} \right] \end{aligned}$$

Применяя к нему утверждение из разд. 3, найдем

$$\begin{aligned} \Omega_2(z) = & \frac{\delta_{k1}}{16} (m + \ln 2 + 1) \mathcal{P}(z) + \frac{q_2}{\pi} \ln[2\mathcal{P}(z)] + \frac{q_0 \mathcal{P}^2(z)}{32\pi} - \Omega^*(z) + \Phi(z) \\ \Phi(z) = & \frac{k}{32} \left[\frac{\mathcal{P}^{k+2}(z) + \mathcal{P}^k(z)}{k+1} + \bar{\delta}_{k1} \frac{\bar{\delta}_{k2} \mathcal{P}^{|k-2|}(z) + \mathcal{P}^k(z)}{|k-1|} \right] + \frac{\mathcal{P}^{k+2}(z) + \bar{\delta}_{k2} \mathcal{P}^{|k-2|}(z)}{64}, \\ q_2 = & \frac{\delta_{k2}\pi}{64} \left(\frac{3}{m + \ln 2} - 2 \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Используя найденные выражения (4.4)–(4.8) для функций $\Omega_i(z)$, $F(x, y)$ и величин q_i , с помощью соотношения (4.2) получим

$$\begin{aligned} \Theta_0(x, y) = & -\delta_{k0} - \operatorname{Re} \left[\frac{q_0}{\pi} \ln \mathcal{P}(z) + \bar{\delta}_{k0} \mathcal{P}^k(z) \right] \\ \Theta_1(x, y) = & \frac{\delta_{k1}}{4} - \operatorname{Re} \left[\frac{q_1}{\pi} \ln \mathcal{P}(z) - \frac{1}{4} \mathcal{P}^{k+1}(z) - \frac{\bar{\delta}_{k1}}{4} \mathcal{P}^{|k-1|}(z) \right] \\ \Theta_2(x, y) = & -\frac{\omega}{16} \operatorname{Re}[\ln \mathcal{P}(z) + \mathcal{P}^k(z)] - \sum_{j=0}^2 \delta_{jk} \operatorname{Re} \Phi_j(z) - \\ & - \operatorname{Re} \left[\Phi(z) - \frac{kx}{16} \left(\frac{\mathcal{P}^{k+1}(z)}{k+1} + \bar{\delta}_{k1} \frac{\mathcal{P}^{|k-1|}(z)}{|k-1|} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) = & \frac{2\omega + \mathcal{P}^2(z) - 4x\mathcal{P}(z)}{32(m + \ln 2)} \\ \Phi_1(z) = & \frac{m + \ln 2 + 1}{16} [\mathcal{P}(z) - x] - \frac{x}{16} \ln \mathcal{P}(z) \\ \Phi_2(z) = & \frac{5}{64} + \frac{3 \ln \mathcal{P}(z)}{64(m + \ln 2)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

В качестве проверки можно убедиться, что полученные представления для функций $\Theta_i(x, y)$ удовлетворяют граничным условиям (2.10).

Соотношения (4.9), (4.10) при учете связи (1.6), (2.5) между функциями $\Theta_i(x, y)$ и $\theta(x, y)$ дают искомое аналитическое представление асимптотического разложения задачи (1.1) по малым Re с удержанием трех старших членов асимптотики.

Отметим, что функции $\Theta_i(x, y)$ зависят от Re через параметр m (см. соотношение (2.1)), который входит только в величины q_0 , q_1 и функции $\Phi_j(z)$. Очевидно, при $k > 2$ функции $\Theta_i(x, y)$ вообще не будут зависеть от Re .

Для вычисления суммарного теплового потока к пластине с помощью соотношений (2.4)–(2.6) необходимо дополнительно найти функцию $v_1^*(\xi)$. Это можно сделать,

применяя соотношения (3.4), (3.5) к функции $\Omega_1(z)$, вид которой известен. Будем иметь

$$v_1^*(\xi) = \frac{q_1}{\pi} - \frac{k+1}{4} T_{k+1}(\xi) - \bar{\delta}_{k1} \frac{|k-1|}{4} T_{|k-1|}(\xi) \quad (4.11)$$

После подстановки вторых выражений из (4.4), (4.5), (4.8) и выражений (4.6), (4.11) в соотношение (2.6) можно найти величины Q_i , а значит и суммарный поток тепла $2Q$ к пластине с точностью до членов $\sim \text{Re}^3$:

$$\frac{Q}{\pi} \approx -\frac{1}{m + \ln 2} \left[\delta_{k0} - \text{Re} \frac{\delta_{k1}}{4} + \text{Re}^2 \frac{4\delta_{k0} + 3\delta_{k2}}{64} \right] - \text{Re} \frac{\delta_{k1}}{4} + \text{Re}^2 \frac{4\delta_{k0} + \delta_{k2}}{32}$$

Отсюда, в частности, следует, что порядок величины Q по Re определяется первым ненулевым членом разложения (1.2).

5. Сравнение с численным экспериментом и результатами других авторов. Было проведено сравнение полученных асимптотических формул с численными расчетами. Уравнение (1.3) решалось численно при $k=0$ по методике, предложенной ранее [14], с последующим восстановлением суммарного потока тепла к пластине по формуле (1.4) и температуры по формуле (1.5). Оказалось, что асимптотическая зависимость $Q(\text{Re})$ хорошо аппроксимирует численную вплоть до значения $\text{Re} = 1$, при котором погрешность достигла $\approx 4\%$ (отбрасывание членов второго порядка увеличивает погрешность до $\approx 13\%$). Несколько хуже ситуация для температуры, поскольку она является не интегральной, а дифференциальной характеристикой задачи. Сравнение температур на контуре $|z| = 2$, $\text{Re } z > 0$ показало хорошее совпадение вплоть до значения $\text{Re} = 0,5$, при котором погрешность достигла $\approx 5\%$.

Отметим, что при $f(x) = \text{const}$ главный член разложения Q по Re совпадает с полученным ранее [15]. Сравнение с результатами работы [6] показывает отличие как в главном члене – дополнительный множитель 2 в [6], так и в члене второго порядка по Re (член первого порядка равен нулю). В пользу правильности полученной асимптотики говорит хорошее совпадение с результатами численных расчетов, о чем говорилось выше. Для сравнения отметим, что погрешность асимптотической формулы [6] при $\text{Re} = 1$ уже имеет порядок 100%. При этом отличие численного значения Q , приведенного в [6], от полученного по предложенной ранее методике [14] не превышает 2%.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00200).

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
2. Рвачев В.Л. Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 248–254.
3. Kornev K., Mukhamadullina G. Mathematical theory of freezing for flow in porous media // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1994. V. 447. № 1930. P. 281–297.
4. Сретенский Л.Н. О нагревании потока жидкости твердыми стенками // ПММ. 1935. Т. 2. Вып. 2. С. 163–179.
5. Хасанова А.Ю., Тумашев Г.Г. Нагревание потенциального потока идеальной жидкости твердыми стенками // Изв. вузов. Математика. 1978. № 6. С. 109–116.
6. Борзых А.А., Черепанов Г.П. Плоская задача теории конвективной теплопередачи и массообмена // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 848–855.
7. Кашеваров А.В. Точное решение задачи конвективного теплообмена для эллиптического цилиндра и пластины в жидкости с малым числом Прандтля // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 26–31.
8. Shlichting H. Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe: Braun, 1965. = Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
9. Jahnke E., Emde F., Lösch F. Tafeln höherer Funktionen. Stuttgart: Teubner. 1960. = Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.

10. Чугунов В.А., Корнев К.Г. Динамика ледопородных ограждений при замораживании фильтрующих горных пород // Инж.-физ. журн. 1986. Т. 51. № 2. С. 305–311.
11. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
14. Корнев К.Г., Мухамадуллина Г.И. О влиянии фильтрационного потока на равновесную форму тел, образующихся при искусственном замораживании // Инж.-физ. журн. 1991. Т. 61. № 6. С. 980–985.
15. Kornev K., Mukhamadullina G. Mathematical theory of freezing for flow in porous media // Flow Through Porous Media: Fundamentals and Reservoir Engineering Applications. Proc. Intern. Conf. Moscow, 1992. М.: Inst. Probl. Mech. Russ. Acad. Sci., 1992. P. 60–63.

Казань

Поступила в редакцию
28.XII.1998