

УДК 533.6.12

© 2001 г. В.И. Жук

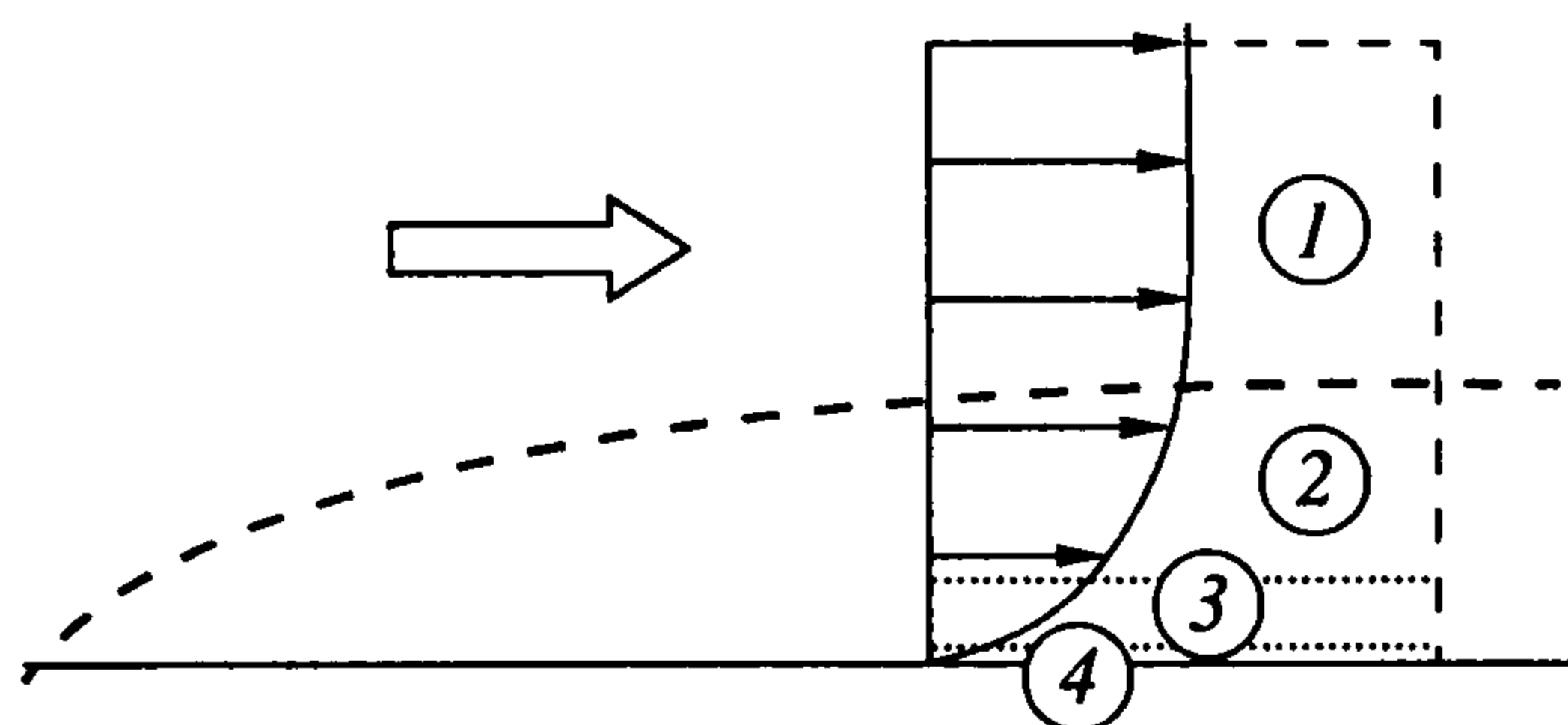
ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО СВОБОДНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ТРАНСЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Рассматривается нелинейная теория сильно возмущенных течений со структурой поля скоростей, характерной для областей так называемого свободного взаимодействия пограничного слоя с внешним потенциальным потоком. Специфика трансзвукового обтекания проявляется не только в оценках амплитуд и длин волн возмущений при асимптотическом анализе задачи, но и в том, что движение может оказаться нестационарным одновременно в пристеночной части пограничного слоя и во внешнем потенциальном потоке. Данный механизм эволюции возмущений удастся описать одним интегродифференциальным уравнением, которое в предположении, что структура флуктуационных полей является четырехслойной, выводится методом Фурье – Лапласа. Даются примеры его нелинейных решений в виде уединенных или периодических волн.

1. Пограничный слой с самоиндуцированным давлением в трансзвуковом потоке.

Ряд новых аспектов возникает в теории Прандтля при введении концепции свободного взаимодействия, согласно которой градиент давления в отличие от классических представлений индуцируется самим пограничным слоем и не может быть вычислен по решению внешней задачи потенциального обтекания. Результат асимптотического анализа системы уравнений Навье – Стокса [1–7] состоит в выводе уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением для непосредственно прилегающей к обтекаемой поверхности узкой подобласти, которая оказывает преобладающее влияние на рост толщины вытеснения пограничного слоя. Нелинейная теория возмущений, описывающая процесс свободного взаимодействия, допускает обобщение на нестационарные течения [8–11], причем производные по времени в уравнениях первого приближения следует удерживать лишь в упомянутом пристеночном подслое, если скорость набегающего из бесконечности потока сверх- либо дозвуковая. В двух других подобластях, а именно в основной толще пограничного слоя и внешнем потенциальном потоке, движение газа квазистационарно, а производные по времени входят лишь в асимптотические уравнения для высших приближений.

Наоборот, при трансзвуковых скоростях движения газа зависимость искомых функций от времени оказывается существенной именно во внешней потенциальной части течения. Последнее обстоятельство составляет важную особенность распространения предложенной ранее [12] асимптотической модели взаимодействия пограничного слоя с трансзвуковым потоком на нестационарные движения [13]. Здесь квазистационарными оказываются поля скоростей в основной толще пограничного слоя и в вязком подслое. Однако обобщение [13] асимптотической схемы [12] не является единственно возможным. Альтернативный подход [14] к построению трехслойной теории нестационарных трансзвуковых течений имеет следствием ситуацию (не встречавшуюся ранее в асимптотическом анализе), когда члены с производными по времени входят как в систему уравнений для вязкого пристеночного подслоя, так и в уравнение для внешних потенциальных возмущений (которое в отличие от аналогичного уравнения [13] становится линейным).



Фиг. 1

Если амплитуды возмущений превышают порядки величин, диктуемые предположениями теории [1–7], то асимптотический анализ пульсационных полей базируется на более сложной структуре поля потока. Для сверх- и дозвукового диапазонов такой анализ приводит к формулировке четырехслойной асимптотической теории [15, 16], существенным компонентом которой является обоснование

применимости уравнений Бюргерса и Бенджамина – Оно [17, 18] к описанию эволюции возмущений.

Развитые ранее [15, 16] представления позволили рассмотреть трансзвуковые течения с четырехслойной структурой области взаимодействия [19]. Как и прежде [14], волновая картина включает существенно нестационарные области в нижней пристеночной части пограничного слоя и в верхнем потенциальном поле потока. Однако само асимптотическое разделение области самоиндуцированного давления на четыре подслоя связано с исследованием класса возмущений, характеризующихся иной по сравнению с рассматривавшейся [14] нормировкой независимых переменных и искомым функциям, в частности большей относительной величиной амплитуд. Полученное ранее [19] интегродифференциальное уравнение, которое описывает процесс свободного взаимодействия, приводится к уравнениям Бюргерса либо Бенджамина – Оно при выходе из трансзвукового диапазона (в сторону увеличения либо уменьшения числа Маха). В этом смысле развитая теория [19] является аналогом подходов [15, 16], предложенных для отличающихся от единицы на конечную величину чисел Маха.

Ниже основное интегродифференциальное уравнение асимптотической теории взаимодействия пограничного слоя с трансзвуковым потоком, предложенное ранее [19], выводится другим способом, а именно методом Фурье – Лапласа.

2. Четырехслойная асимптотическая схема свободного взаимодействия. Рассмотрим плоскую пластину, обтекаемую равномерным потоком сжимаемого газа со скоростью U_∞^* , плотностью ρ_∞^* , давлением p_∞^* , динамическим коэффициентом вязкости μ_∞^* , скоростью звука a_∞^* , и, направляя вдоль поверхности пластины ось x^* декартовой системы координат (x^*, y^*) , определим число Рейнольдса $Re = \rho_\infty^* U_\infty^* L^* / \mu_\infty^*$ по расстоянию L^* от передней кромки $(0, 0)$ до некоторой короткой области в окрестности точки $(L^*, 0)$. Звездочкой будем помечать размерные величины. Оценку малости упомянутой области зададим в терминах числа Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$ и второго параметра $\delta \rightarrow 0$, характеризующего околосзвуковой характер течения, следующим образом.

Пусть число Маха $M_\infty = U_\infty^* / a_\infty^*$ набегающего потока близко к единице, а именно

$$M_\infty^2 = 1 + \delta Q_\infty, \quad Q_\infty = O(1), \quad \delta \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

Предположим всюду в дальнейшем выполненным порядковое соотношение между малым параметром δ и числом Рейнольдса Re , принимающим большие значения:

$$\delta^3 Re \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

Тогда для нестационарных возмущений исходного стационарного течения (включающего ламинарный пограничный слой и внешний равномерный поток) зависимость компонент скорости u^*, v^* , плотности ρ^* и давления p^* от времени t^* и пространственных координат x^*, y^* введем посредством быстрых переменных

$$T = \delta^{5/2} Re^{1/2} \frac{U_\infty^* t^*}{L^*}, \quad X = \delta^{3/2} Re^{1/2} \frac{x^* - L^*}{L^*}, \quad Y_u = \delta^2 Re^{1/2} \frac{y^*}{L^*} \quad (2.3)$$

Как видно из (2.3), условие $X = O(1)$ фиксирует продольный масштаб $\Delta x^* \sim \delta^{-3/2} \text{Re}^{-1/2} L^*$ области, отстоящей на расстоянии L^* от передней кромки, причем, согласно (2.2), данный масштаб является коротким: $\Delta x^* \ll L^*$. В то же время устанавливаемый условием $Y_u = O(1)$ вертикальный масштаб $\Delta y^* \sim \delta^2 \text{Re}^{-1/2} L^*$ данной области много больше толщины $\text{Re}^{-1/2} L^*$ пограничного слоя, сформировавшегося в сечении $x^* = L^*$. Поэтому нормировка (2.3) вертикальной координаты означает, что пограничный слой (область 2 на фиг. 1) располагается при $Y_u \rightarrow 0$, а во внешней по отношению к нему области $Y_u = O(1)$ (обозначенной на фиг. 1 как область 1) вязкость и теплопроводность несущественны и течение в ней безвихревое.

Запишем уравнение для потенциала $\Phi^* = \Phi^*(t^*, x^*, y^*)$ в области 1 над обтекаемой плоской пластиной [20, 21]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^{*2}} \left[a^{*2} - \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^{*2}} \left[a^{*2} - \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] - \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^{*2}} - \\ - 2 \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^* \partial y^*} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \Phi^*}{\partial y^*} - 2 \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^* \partial x^*} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} - 2 \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^* \partial y^*} \frac{\partial \Phi^*}{\partial y^*} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

совместно с интегралом Лагранжа – Коши

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t^*} + \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] = \frac{a_\infty^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{U_\infty^{*2}}{2} \quad (2.5)$$

Здесь γ – отношение удельных теплоемкостей. Потенциал скоростей

$$u^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^*}, \quad v^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial y^*} \quad (2.6)$$

представим в виде

$$\frac{\Phi^*}{L^* U_\infty^*} = 1 + \delta^{-3/2} \text{Re}^{-1/2} X + \delta^{1/2} \text{Re}^{-1/2} \phi_{lu}(T, X, Y_u) + \dots \quad (2.7)$$

Первые два слагаемых в (2.7) задают потенциал невозмущенного потока $\Phi^* = U_\infty^* x^*$ на коротких расстояниях $(x^* - L^*) L^{*-1} = O(\delta^{-3/2} \text{Re}^{-1/2})$ для $X = O(1)$. Подстановка (2.7) в (2.6) дает

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = 1 + \delta^2 \frac{\partial \phi_{lu}}{\partial X} + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} = \delta^{5/2} \frac{\partial \phi_{lu}}{\partial Y_u} + \dots \quad (2.8)$$

Уравнение Лагранжа – Коши при учете разложений (2.8) запишем в виде

$$\frac{a^{*2}}{a_\infty^{*2}} = 1 - \delta^2 M_\infty^2 (\gamma - 1) \frac{\partial \phi_{lu}}{\partial X} + \dots \quad (2.9)$$

Плотность ρ^* и давление p^* газа связаны уравнением состояния и справедливым в первом приближении для рассматриваемой здесь невязкой области уравнением адиабаты Пуассона, которые удобно представить в форме

$$\frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \left[\left(\frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} \right)^\gamma - 1 \right], \quad \frac{p^*}{\rho_\infty^*} = \left(\frac{a^*}{a_\infty^*} \right)^{2/(\gamma-1)} \quad (2.10)$$

Тогда, внося в (2.10) асимптотическое разложение (2.9), находим

$$\frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} = 1 - \delta^2 \frac{\partial \phi_{1u}}{\partial X} + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = -\delta^2 \frac{\partial \phi_{1u}}{\partial X} + \dots \quad (2.11)$$

Таким образом, все функции течения выражаются по формулам (2.8), (2.11) через возмущение потенциала ϕ_{1u} . Заметим, что соотношения (2.9)–(2.11) никак не связаны с предположением (2.1) о близости числа Маха к единице, их вывод опирается лишь на оценку (2.2) для двух входящих в (2.3), (2.7) параметров $\delta \rightarrow 0$ и $Re \rightarrow \infty$.

Что касается функции ϕ_{1u} , то уравнение для нее получим асимптотическим упрощением уравнения (2.4) в предположении (2.1) о трансзвуковом характере течения с использованием соотношений (2.3), (2.7)–(2.9).

Подставим в уравнение (2.4) выражения (2.1), (2.7), (2.9), тогда главные члены будут иметь порядок величины $\tau_0 = \delta^{9/2} Re^{1/2} U_\infty^{*3} L^{*-1}$. Отбрасывая члены высшего порядка малости $\sim \delta^{1/2} Re^{1/2} U_\infty^{*3} L^{*-1}$ и сокращая уравнение на множитель τ_0 , получим

$$2 \frac{\partial^2 \phi_{1u}}{\partial T \partial X} + Q_\infty \frac{\partial^2 \phi_{1u}}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \phi_{1u}}{\partial Y_u^2} = 0 \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) было предложено [14] в рамках альтернативного подхода к формулировке теории свободного взаимодействия с целью сохранить члены, определяющие потерю устойчивости пограничного слоя в трансзвуковом внешнем потоке. Несколько иные соображения были положены в основу вывода уравнения (2.12) в [19], где оно является условием совместности асимптотических уравнений второго приближения для возмущений газодинамических функций в верхней области взаимодействия.

Таким образом, выражение для потенциала (2.7), в котором функция $\phi_{1u}(T, X, Y_u)$ подчиняется уравнению (2.12), эквивалентно следующим представлениям функций течения в области 1, примыкающей сверху к пограничному слою:

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = 1 + \delta^2 u_{1u} + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} = \delta^{5/2} v_{1u} + \dots \quad (2.13)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} = 1 + \delta^2 \rho_{1u} + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \delta^2 p_{1u} + \dots$$

где в соответствии с соотношениями (2.8), (2.11)

$$u_{1u} = \frac{\partial \phi_{1u}}{\partial X}, \quad v_{1u} = \frac{\partial \phi_{1u}}{\partial Y_u}, \quad p_{1u} = \rho_{1u} = -u_{1u} \quad (2.14)$$

Возмущения (2.13), (2.14) проникают в пограничный слой (область 2), индуцируя в нем поле флуктуаций

$$\begin{aligned} \frac{u^*}{U_\infty^*} &= U_0 + \delta u_{1m} + \delta^2 u_{2m} + \dots, & \frac{v^*}{U_\infty^*} &= \delta^{5/2} v_{1m} + \delta^{7/2} v_{2m} + \dots \\ \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} &= R_0 + \delta \rho_{1m} + \delta^2 \rho_{2m} + \dots, & \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} &= \delta^2 p_{1m} + \delta^3 p_{2m} + \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь $U_0 = U_0(Y_m)$, $R_0 = R_0(Y_m)$ – профили скорости и плотности в невозмущенном стационарном ламинарном пограничном слое, $Y_m = Re^{1/2} L^{*-1} y^*$ – вертикальная координата, имеющая порядок единицы в основной толще 2 пограничного слоя и связанная

с ранее введенной посредством соотношений (2.3) координатой верхней области 1 взаимодействия следующим образом:

$$Y_m = \delta^{-2} Y_u \quad (2.16)$$

Аргументами функций с индексами jm , $j = 1, 2, \dots$ в (2.15) являются переменные T , X , Y_m . Подстановка выражений (2.15) в уравнения Навье – Стокса определяет первые члены разложений с точностью до произвольных функций $A_j(T, X)$:

$$\begin{aligned} u_{1m} &= A_1(T, X) \frac{dU_0}{dY_m}, \quad v_{1m} = -\frac{\partial A_1}{\partial X} U_0(Y_m), \quad p_{1m} = A_1 \frac{dR_0}{dY_m}, \quad p_{1m} = p_{1m}(T, X) \\ u_{2m} &= -U_0(Y_m) p_{1m} - \int_{-\infty}^X \frac{\partial v_{2m}}{\partial Y_m} dX' \\ v_{2m} &= -U_0(Y_m) \frac{\partial p_{1m}}{\partial X} \int_{Y_m}^{\infty} \left(\frac{1}{R_0 U_0^2} - 1 \right) dY'_m - \frac{\partial A_1}{\partial T} - A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} \frac{dU_0}{dY_m} - \frac{\partial A_2}{\partial X} U_0(Y_m) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Поведение решения (2.17) в нижней части пограничного слоя следует из предельных свойств

$$U_0 = \lambda_1 Y_m + \dots, \quad R_0 = r_0 + \dots \quad (Y_m \rightarrow 0) \quad (2.18)$$

Внутренний предел разложений (2.15), (2.17) при $Y_m \rightarrow 0$ при учете (2.18) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{u^*}{U_\infty^*} &\rightarrow \lambda_1 (Y_m + \delta A_1) + \dots, \quad \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} \rightarrow r_0 + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} \rightarrow \delta^2 p_{1m} + \dots \\ \frac{v^*}{U_\infty^*} &\rightarrow -\delta^{5/2} \lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} Y_m - \delta^{7/2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial T} + \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} + \frac{1}{\lambda_1 r_0} \frac{\partial p_{1m}}{\partial X} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Если $Y_m = O(\delta)$, то, согласно соотношениям (2.19), возмущение скорости $\delta \lambda_1 A_1$ становится величиной порядка невозмущенной скорости $\lambda_1 Y_m$. Следовательно, в нижней части пограничного слоя 2 возникает нелинейная область 3 (фиг. 1). Определим переменную Y_a по формуле

$$Y_a = \delta^{-1} Y_m \quad (2.20)$$

тогда $Y_a = O(1)$ в области 3.

Соотношения (2.14) и (2.17) получены без учета вязких членов в уравнениях Навье – Стокса. Для возмущений вида (2.15) вязкие эффекты проявляются в соприкасающемся со стенкой тонком подслое (область 4 на фиг. 1) толщины порядка $Y_m = O(\beta_0)$, где малый параметр

$$\beta_0 = \delta^{-5/4} \text{Re}^{-1/4} \quad (2.21)$$

Введем новую вертикальную координату

$$Y_l = \beta_0^{-1} Y_m \quad (2.22)$$

Тогда в упомянутом вязком подслое возмущения функций течения зависят от переменных T , X , Y_l и задаются разложениями

$$\begin{aligned} \frac{u^*}{U_\infty^*} &= \delta u_{1l} + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} = \delta^{5/4} \text{Re}^{-1/4} v_{1l} + \dots \\ \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} &= r_0 + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \delta^2 p_{1l} + \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

Остановимся на вопросе о соотношении толщин областей 3 и 4, которое зависит от асимптотических оценок параметра δ в терминах числа Рейнольдса Re . Соотношение (2.2), как отмечалось выше, означает, что продольный масштаб Δx^* мал по сравнению с L^* .

Предположим $Y_a = Y_l$, что равносильно утверждению о совпадении областей 3 и 4. Сравнение правых частей равенств (2.20) и (2.22) дает

$$\delta = Re^{-1/9} \quad (2.24)$$

Соотношение (2.24) гарантирует выполнение условия (2.2). Случай (2.24), когда область возмущенного движения имеет трехслойную структуру, а нелинейный и вязкий подслои сливаются друг с другом, рассмотрен ранее [14].

Еще более усилим ограничение (2.2) и потребуем вместо (2.24) выполнения условия

$$\delta^9 Re \rightarrow \infty \quad (2.25)$$

В силу вытекающей из соотношений (2.20) и (2.22) зависимости

$$Y_l = \delta^{9/4} Re^{1/4} Y_a \quad (2.26)$$

можно заключить, что $Y_a \rightarrow 0$ при $Y_l = O(1)$ в случае (2.25). Это означает, что толщина прилегающей к стенке области 4 много меньше, чем толщина области 3. Другими словами, если амплитуда возмущений δ (в разложениях (2.13), (2.15), (2.23)) превышает по порядку величины значение (2.24) и выполнено условие (2.25), то поле течения приобретает четырехслойную структуру [19], причем вязкий подслой 4 располагается на дне нелинейного подслоя 3 (фиг. 1).

Остается заметить, что правые части предельных выражений (2.19), переписанные в терминах переменной Y_a , служат точными решениями асимптотических уравнений для невязкой нелинейной области 3. Таким образом, разложения (2.15), (2.17) и их внутренний предел (2.19) остаются справедливыми вплоть до верхней границы вязкого подслоя 4, т.е. при $Y_m = O(\beta_0)$, $Y_a = O(\beta_0 \delta^{-1})$, и должны срачиваться с функциями (2.23). Но из условия (2.25) следует $\beta_0 \ll \delta$, а из соотношения (2.26) видно, что верхняя граница вязкого подслоя соответствует $Y_m \delta^{-1} = Y_a \rightarrow 0$. Поэтому, даже не производя срачивания (2.19) с (2.23), можно сразу указать необходимое условие его реализуемости, а именно

$$\frac{\partial A_1}{\partial T} + \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} = -\frac{1}{\lambda_1 r_0} \frac{\partial p_{1m}}{\partial X} \quad (2.27)$$

Рассмотрим теперь внешний предел при $Y_m \rightarrow \infty$ разложений (2.15), (2.17), который в соответствии с соотношением (2.16) должен быть равен внутреннему пределу при $Y_u \rightarrow 0$ разложений (2.8), (2.11) для верхней области течения 1. Поскольку

$$U_0(Y_m) \rightarrow 1, \quad R_0(Y_m) \rightarrow 1 \quad (Y_m \rightarrow \infty)$$

асимптотические последовательности (2.15) на верхнем крае пограничного слоя 2 трансформируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{u^*}{U_\infty^*} &\rightarrow 1 - \delta^2 p_{1m} + \dots, & \frac{v^*}{U_\infty^*} &\rightarrow -\delta^{5/2} \frac{\partial A_1}{\partial X} + \dots \\ \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} &\rightarrow 1 + \delta^2 p_{1m} \dots, & \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} &\rightarrow \delta^2 p_{1m} + \dots \end{aligned} \quad (2.28)$$

Внешняя асимптотика (2.28) устанавливает предельный вид выражений (2.8), (2.11), взятых при $Y_u \rightarrow 0$, что дает

$$\frac{\partial \phi_{1u}(T, X, 0)}{\partial X} = -p_{1m}(T, X), \quad \frac{\partial \phi_{1u}(T, X, 0)}{\partial Y_u} = -\frac{\partial A_1(T, X)}{\partial X} \quad (2.29)$$

Исключим из соотношений (2.12), (2.27), (2.29) несущественные постоянные λ_1, r_0 изменением масштабов величин с помощью указанного ранее [19] преобразования подобия. Переходя от $T, X, Y_u, A_1, p_{1m}, \phi_{1u}, Q_\infty$ к переменным $t, x, y_u, A, p, \phi, K_\infty$ соответственно, запишем в окончательном виде замкнутую систему невязких уравнений

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + K_\infty \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_u^2} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \phi(t, x, 0)}{\partial x} = -p(t, x), \quad \frac{\partial \phi(t, x, 0)}{\partial y_u} = -\frac{\partial A(t, x)}{\partial x} \quad (2.32)$$

Покажем, что система уравнений (2.30)–(2.32) имеет следствием одно интегро-дифференциальное уравнение для функции $A(t, x)$, причем при выводе этого уравнения будем руководствоваться несколько иными соображениями по сравнению со сделанными ранее [19].

3. Интегральная формула для потенциала, устанавливаемая методом Фурье – Лапласа. Совершим в уравнении для потенциала (2.30) преобразование Фурье по переменной x

$$\phi^*(t, k, y_u) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t, x, y_u) e^{-ikx} dx, \quad \phi(t, x, y_u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(t, k, y_u) e^{ikx} dk$$

и преобразование Лапласа по переменной t

$$\phi^{**}(\lambda, k, y_u) = \int_0^{\infty} \phi^*(t, k, y_u) e^{-\lambda t} dt, \quad \phi^*(t, k, y_u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \phi^{**}(\lambda, k, y_u) e^{\lambda t} d\lambda$$

Будем считать, что $\phi(t, x, y_u) = 0, t \leq 0$. Тогда

$$-\frac{\partial^2 \phi^{**}}{\partial y_u^2} + ik\lambda \phi^{**} - k^2 K_\infty \phi^{**} = 0 \quad (3.1)$$

Примем $i = e^{i\pi/2}$, полагая в выражениях, содержащих многозначные функции,

$$(ik)^{1/2} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} |k|^{1/2} = i^{\pm 1/2} |k|^{1/2}$$

где верхний знак берется при $k > 0$, нижний – при $k < 0$. Затухающее при $y_u \rightarrow +\infty$ решение уравнения (2.1) имеет вид

$$\phi^{**}(\lambda, k, y_u) = \phi^{**}(\lambda, k, 0) \exp \left[-(ik)^{1/2} (\lambda + ikK_\infty)^{1/2} y_u \right] \quad (3.2)$$

Для определения величины $\phi^{**}(\lambda, k, 0)$ воспользуемся вторым граничным условием из (2.32), переписанным в образах Фурье – Лапласа

$$\frac{\partial \phi^{**}(\lambda, k, 0)}{\partial y_u} = -ikA^{**}(\lambda, k) \quad (3.3)$$

Дифференцируя равенство (3.2) по y_u , из условия (3.3) находим

$$\varphi^{**}(\lambda, k, 0) = \frac{(ik)^{1/2} A^{**}(\lambda, k)}{(\lambda + ikK_\infty)^{1/2}} \quad (3.4)$$

Таким образом,

$$\varphi^{**}(\lambda, k, y_u) = (ik)^{1/2} A^{**}(\lambda, k) \Lambda^{**}(\lambda, k, y_u) = \left[\frac{\partial A}{\partial x} \right]^{**}(\lambda, k) \frac{\Lambda^{**}(\lambda, k, y_u)}{(ik)^{1/2}} \quad (3.5)$$

где

$$\Lambda^{**}(\lambda, k, y_u) = \frac{\exp \left[-(ik)^{1/2} (\lambda + ikK_\infty)^{1/2} y_u \right]}{(\lambda + ikK_\infty)^{1/2}}$$

Воспользуемся доказываемой при помощи интеграла Пуассона [22]

$$\int_0^\infty e^{-ts^2} \cos \alpha s \, ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\alpha^2 / (4t)} \quad (t > 0)$$

формулой [23]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} e^{-\alpha\sqrt{\lambda} + \lambda t} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha^2 / (4t)} \quad (3.6)$$

и вычислим обратное преобразование Лапласа для функции $\Lambda^{**}(\lambda, k, y_u)$. Производя в формуле обращения (3.6) замену $\lambda = \lambda_* - ikK_\infty$, находим

$$\begin{aligned} \Lambda^*(t, k, y_u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \Lambda^{**}(\lambda, k, y_u) e^{\lambda t} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} e^{-ikK_\infty t} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} e^{-(ik)^{1/2} \lambda_*^{1/2} y_u + \lambda_* t} \frac{d\lambda_*}{\lambda_*^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-ikK_\infty t -iky_u^2 / (4t)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

По теореме умножения [23] оригинал произведения изображений выражается через свертку оригиналов сомножителей

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \Lambda^{**}(\lambda, k, y_u) A^{**}(\lambda, k) e^{\lambda t} d\lambda = \int_0^t \Lambda^*(t-\tau, k, y_u) A^*(\tau, k) d\tau$$

Поэтому найденный выше оригинал (3.7) функции $\Lambda^{**}(\lambda, k, y_u)$ позволяет обратить изображение по Лапласу $\varphi^{**}(\lambda, k, y_u)$ из (3.5)

$$\varphi^*(t, k, y_u) = \frac{1}{(ik)^{1/2}} \int_0^t \left[\frac{\partial A}{\partial x} \right]^*(\tau, k) e^{-ikK_\infty(t-\tau) -iky_u^2 / (4(t-\tau))} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \quad (3.8)$$

Положим в (3.8) $y_u = 0$ и вычислим обратное преобразование Фурье функции $\varphi^*(t, k, 0)$ по переменной x

$$\begin{aligned} \varphi(t, k, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx} dk}{(ik)^{1/2}} \int_0^t e^{-ikK_\infty(t-\tau)} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial A(\tau, \xi)}{\partial \xi} e^{-ik\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial A(\tau, \xi)}{\partial \xi} d\xi \left[\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-ik(\xi-Q)}}{(-i|k|)^{1/2}} dk + \int_0^\infty \frac{e^{-ik(\xi-Q)}}{(ik)^{1/2}} dk \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь $Q = x - K_\infty(t - \tau)$. Внутреннее интегрирование по k в соотношении (3.9) дает

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{i|k|(\xi-Q)}}{(-i|k|)^{1/2}} d|k| + \int_0^\infty \frac{e^{-ik(\xi-Q)}}{(ik)^{1/2}} dk &= 2 \operatorname{Im} \int_0^\infty \frac{i^{1/2} e^{-ik(\xi-Q)}}{k^{1/2}} dk = \\ &= 2 \operatorname{Im} \frac{i^{1/2}}{\sqrt{|\xi-Q|}} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega \operatorname{sign}(\xi-Q)}}{\omega^{1/2}} d\omega = \begin{cases} 0, & \xi > Q \\ \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{Q-\xi}}, & \xi < Q \end{cases} \end{aligned}$$

поскольку [23]

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pm i\omega}}{\omega^{1/2}} d\omega = 2(\pm i)^{1/2} \int_0^\infty e^{-\gamma^2} d\gamma = (\pm i)^{1/2} \sqrt{\pi}$$

Таким образом, область интегрирования S в соотношении (3.9) по переменным τ и ξ задается неравенствами

$$S: 0 < \tau < t, \quad \xi < Q = x - K_\infty(t - \tau)$$

Следовательно, обращение интегральных преобразований Фурье – Лапласа в предположении $\varphi(0, x, y_u) = 0$ устанавливает связь

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, 0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^Q \frac{\partial A(\tau, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{Q-\xi}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x-K_\infty t} \frac{d\xi^0}{\sqrt{x-K_\infty t-\xi^0}} \int_0^t \frac{\partial A(\tau, \xi^0 + K_\infty \tau)}{\partial \xi^0} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = B(t, x; 0) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$B(t, x; a) = \frac{1}{\pi} \int_a^t d\tau \int_{-\infty}^{x-K_\infty(t-\tau)} \frac{\partial A(\tau, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(t-\tau)(x-\xi) - K_\infty(t-\tau)^2}}$$

Пусть теперь начальные данные ненулевые:

$$\varphi(0, x, y_u) = \varphi_0(x, y_u)$$

Снова применяя к уравнению для потенциала (2.30) преобразование Фурье – Лапласа по переменным t и x , получим уравнение

$$-\frac{\partial^2 \varphi^{**}}{\partial y_u^2} + ik\lambda \varphi^{**} - k^2 K_\infty \varphi^{**} = f_0 \quad (3.11)$$

относительно $\varphi^{**} = \varphi^{**}(\lambda, k, y_u)$, отличающееся от (3.1) наличием неоднородного члена $f_0 = ik\varphi_0^*(k, y_u) = ik\varphi^*(0, k, y_u)$. Для учета последнего найдем сначала решение уравнения (3.11) с однородными краевыми условиями

$$y_u = 0: \quad \partial \varphi^{**} / \partial y_u = 0, \quad y_u \rightarrow +\infty: \quad \varphi^{**} \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

Построим функцию Грина краевой задачи (3.11), (3.12) на полуоси $y_u \geq 0$. Обозначая для краткости

$$\vartheta = (ik)^{1/2} (\lambda + ikK_\infty)^{1/2} \quad (3.13)$$

рассмотрим два линейно независимых решения однородного уравнения (3.1)

$$\psi_1(y_u) = e^{\vartheta y_u} + e^{-\vartheta y_u}, \quad \psi_2(y_u) = e^{-\vartheta y_u}$$

с определителем Вронского $w = \psi_2' \psi_1 - \psi_2 \psi_1' = -2\vartheta$. Функция ψ_1 удовлетворяет первому краевому условию (3.12), а в силу того, что $\arg \vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$ при любом знаке k , функция ψ_2 удовлетворяет краевому условию (3.12).

Функция Грина [24]

$$G(y_u, y_u') = -\frac{1}{w} \begin{cases} \psi_1(y_u) \psi_2(y_u'), & 0 \leq y_u \leq y_u' \\ \psi_2(y_u) \psi_1(y_u'), & 0 \leq y_u' \leq y_u \end{cases}$$

дает решение краевой задачи (3.11), (3.12) в виде

$$\begin{aligned} \varphi^{**}(\lambda, k, y_u) &= \int_0^\infty G(y_u, y_u') f_0(y_u') dy_u' = \\ &= -\frac{1}{w} \left[\psi_2(y_u) \int_0^{y_u} \psi_1(y_u') f_0(y_u') dy_u' + \psi_1(y_u) \int_{y_u}^\infty \psi_2(y_u') f_0(y_u') dy_u' \right] = \\ &= \frac{1}{2\vartheta} [e^{-\vartheta y_u} F_+(\lambda, k; 0, y_u) + e^{\vartheta y_u} F_-(\lambda, k; y_u, \infty) + e^{-\vartheta y_u} F_-(\lambda, k; 0, \infty)] \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$F_\pm(\lambda, k; a, b) = \int_a^b e^{\pm \vartheta y_u'} f_0(y_u') dy_u'$$

В частности, при $y_u = 0$ из соотношения (3.14) имеем

$$\chi^{**}(\lambda, k) = \varphi^{**}(\lambda, k, 0) = \frac{1}{\vartheta} F_-(\lambda, k; 0, \infty) \quad (3.15)$$

Искомое решение начально-краевой задачи для уравнения (2.30) получается как сумма решений задач с нулевыми данными Коши и с однородным краевым условием при $y_u = 0$. Их образы в спектральном пространстве после преобразования Фурье – Лапласа даются выражениями (3.5) и (3.14); обращение названных преобразований даст картину потенциального движения в полуплоскости $y_u \geq 0$, если известна граничная функция $\partial \varphi(t, x, 0)/\partial y_u$.

Однако рассматриваемая здесь многослойная асимптотическая теория характеризуется тем, что потенциал скоростей $\varphi(t, x, y_u)$ может быть найден только в результате совместного решения краевых задач внутри пограничного слоя и примыкающей к нему сверху внешней области, описываемой уравнением (2.30). Поэтому ни потенциальная функция $\varphi(t, x, 0)$, ни ее нормальная производная $\partial \varphi(t, x, 0)/\partial y_u$ заранее не известны.

С другой стороны, обе эти функции не могут быть заданы независимо; в спектральном пространстве связь между ними получим, суммируя выражения (3.5) (при $y_u = 0$ с учетом условия (3.3)) и (3.15), а именно

$$\varphi^{**}(\lambda, k, 0) = -\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \varphi^{**}(\lambda, k, 0)}{\partial y_u} + \frac{ik}{\vartheta} \int_0^\infty e^{-\vartheta y_u'} \varphi^*(0, k, y_u') dy_u' \quad (3.16)$$

причем величина ϑ определена в (3.13). Поскольку обратное преобразование Лапласа первого слагаемого в соотношении (3.16) уже вычислено и выражается равенством (3.8) (при $y_u = 0$), найдем прообраз второго слагаемого. Снова пользуясь формулой (3.6) и производя такую же замену переменной интегрирования, как и в (3.7), получим для $\chi^*(t, k) = \varphi^*(t, k, 0)$ из равенства (3.15)

$$\chi^*(t, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} e^{\lambda t} d\lambda \int_0^\infty \frac{(ik)^{1/2} e^{-(ik)^{1/2}(\lambda + ikK_\infty)^{1/2} y_u'}}{(\lambda + ikK_\infty)^{1/2}} \varphi^*(0, k, y_u') dy_u' =$$

$$= (ik)^{1/2} \int_0^\infty \varphi^*(0, k, y'_u) e^{-ikK_\infty t} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} e^{-(ik)^{1/2} \lambda_*^{1/2} y'_u + \lambda_* t} \frac{d\lambda_*}{\lambda_*^{1/2}} \right] dy'_u = I_0(t, k)$$

$$I_a(t, k) = (ik)^{1/2} \int_0^\infty \varphi^*(a, k, y'_u) e^{-ikK_\infty t - iky_u'^2/(4t)} \frac{dy'_u}{\sqrt{\pi t}}$$

Таким образом, с помощью обращения преобразования Лапласа получена интегральная связь между Фурье-образами потенциала и его нормальной производной (задаваемой вторым соотношением (2.32)) на границе $y_u = 0$

$$\varphi^*(t, k, 0) = \Phi(t, k; 0) + I_0(t, k) \quad (3.17)$$

$$\Phi(t, k; a) = \frac{1}{(ik)^{1/2}} \int_a^t \left[\frac{\partial A(\tau, x)}{\partial x} \right]^* e^{-ikK_\infty(t-\tau)} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}$$

Положим $t = t' - t_0$ в правой и левой частях равенства (3.17), перейдя тем самым к функциям

$$A'(t', x) = A(t' - t_0, x) = A(t, x), \quad \varphi'(t', x, y_u) = \varphi(t' - t_0, x, y_u) = \varphi(t, x, y_u)$$

Заменяем, далее, в первом слагаемом в правой части равенства (3.17) переменную интегрирования: $\tau = \tau' - t_0$. Тогда вместо (3.17) получим более общую формулу (штрихи у новых функций и независимых переменных опущены)

$$\varphi^*(t, k, 0) = \Phi(t, k; t_0) + I_{t_0}(t - t_0, k) \quad (3.18)$$

Первый интеграл из равенства (3.18) при $t_0 = -\infty$, понимаемый как несобственный, сходится (по признаку Дирихле [22]). Предполагая абсолютную сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^\infty |\varphi^*(t_0, k, y'_u)| dy'_u = C^*(t_0, k)$$

оценим второй интеграл из равенства (3.18) при $t_0 \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} |I_{t_0}(t - t_0, k)| &\leq \sqrt{\frac{|k|}{\pi(t - t_0)}} \int_0^\infty |\varphi^*(t_0, k, y'_u)| dy'_u = \\ &= \frac{|k|^{1/2}}{|t_0|^{1/2} \sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{t}{2|t_0|} + O\left(\frac{t^2}{t_0^2}\right) \right] C^*(t_0, k) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Предельный переход $t_0 \rightarrow -\infty$ дает (в случае ограниченности $C^*(t_0, k)$ по t_0) частный случай представления (3.18) для Фурье-образа потенциальной функции на границе $y_u = 0$

$$\varphi^*(t, k, 0) = \Phi(t, k; -\infty) \quad (3.20)$$

Оценка (3.19) служит обоснованием возможности заменить в (3.10) нижний предел интегрирования по временной переменной τ на $-\infty$. Повторяя выкладки, проделанные при вычислении обратного преобразования Фурье и выводе выражения (3.10) из (3.8), получим

$$\varphi(t, x, 0) = B(t, x; -\infty) \quad (3.21)$$

Ранее [19] интегральная связь (3.21) была указана из несколько иных соображений, а именно, исходя из известных в теории потенциальных течений [25] представлений решений волнового уравнения через значения нормальной производной на границе.

Если данные Коши задаются при $t = t_0$, то в качестве нижнего предела интегрирования в равенстве (3.21) следует взять t_0 и добавить слагаемое, являющееся обратным преобразованием Фурье от второго интегрального члена в равенстве (3.18).

Подстановка в первое из соотношений (2.32) выражения (3.21) позволяет исключить функцию p из уравнения (2.31). Последнее, таким образом, трансформируется в интегродифференциальное уравнение относительно функции A и записывается в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^{x-K_{\infty}(t-\tau)} \frac{\partial A(\tau, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(t-\tau)(x-\xi)-K_{\infty}(t-\tau)^2}} \quad (3.22)$$

4. Предельные случаи. Рассмотрим асимптотический вид выражения (3.20) при $K_{\infty} \rightarrow +\infty$. От переменной интегрирования $\tau \in (-\infty, t)$ перейдем к новой переменной $v \in (0, +\infty)$ по формуле

$$\tau = t - \frac{v^2}{|k| K_{\infty}}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial A(\tau, x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} A\left(t - \frac{v^2}{|k| K_{\infty}}, x\right) = \frac{\partial A(t, x)}{\partial x} + O\left(\frac{v^2}{|k| K_{\infty}}\right) \quad (4.1)$$

и используя значение интеграла Френеля [22]

$$\int_0^{\infty} e^{\mp i \eta^2} d\eta = (\mp i)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

с точностью $O(|k|^{-3/2} K_{\infty}^{-3/2})$ имеем

$$\varphi^*(t, k, 0) = \mp \frac{i}{|k| \sqrt{K_{\infty}}} \left[\frac{\partial A(t, x)}{\partial x} \right]^* = \frac{A^*(t, k)}{\sqrt{K_{\infty}}}, \quad \varphi(t, x, 0) = \frac{A(t, x)}{\sqrt{K_{\infty}}} \quad (4.2)$$

Здесь, как и везде, в символах $\pm$ либо $\mp$ верхний знак соответствует $k > 0$, нижний — $k < 0$.

В силу соотношений (2.31), (2.32) связь (4.2) приводит к уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{K_{\infty}}} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

Таким образом, уравнение (4.3) представляет собой предельную форму уравнения (3.22) при $K_{\infty} \rightarrow +\infty$.

Пусть теперь $K_{\infty} \rightarrow -\infty$. Вводя новую переменную интегрирования

$$\tau = t + \frac{v^2}{|k| K_{\infty}}$$

из соотношения (3.20) аналогично предыдущему находим

$$\varphi^*(t, k, 0) = \frac{1}{|k| \sqrt{-K_{\infty}}} \left[\frac{\partial A(t, x)}{\partial x} \right]^* = i \frac{A^*(t, k)}{\sqrt{-K_{\infty}}} \text{sign } k \quad (4.4)$$

Известное свойство оператора Гильберта (доказываемое, например, при помощи формул Сохоцкого [23])

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} \frac{d\xi}{\xi - x} = i \text{sign } k e^{ikx} \quad (4.5)$$

позволяет перейти в равенстве (4.4) от образов Фурье к их прообразам:

$$\varphi(t, x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(t, k, 0) e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^*(t, k)}{\sqrt{-K_{\infty}}} e^{ik\xi} dk \right] \frac{d\xi}{\xi - x}$$

Следовательно, соотношение (4.4) устанавливает связь

$$\varphi(t, x, 0) = \frac{1}{\pi\sqrt{-K_{\infty}}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(t, \xi)}{\xi - x} d\xi \quad (4.6)$$

но тогда соотношения (2.31), (2.32) сводятся к уравнению Бенджамина – Оно [17, 18]

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\pi\sqrt{-K_{\infty}}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A(t, \xi)}{\partial \xi^2} \frac{d\xi}{\xi - x} \quad (4.7)$$

В качестве предельной формы уравнения (3.22) при $K_{\infty} \rightarrow -\infty$ имеем, таким образом, уравнение (4.7).

5. Автомоделность типа бегущей волны. Рассмотрим класс решений системы (2.30) – (2.32), в котором зависимость всех функций от переменных t, x задается в автомоделной форме. В частности,

$$\varphi(t, x, y_u) = \tilde{\varphi}(x - ct, y_u)$$

В этом случае из уравнения (2.30) имеем

$$(c - K_{\infty}) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y_u^2} = 0 \quad (5.1)$$

Пусть $K_{\infty} > c$. Обозначая через $g(x)$ и $h(x)$ две произвольные функции, запишем общее решение уравнения (5.1)

$$\tilde{\varphi} = g(\zeta - \eta) + h(\zeta + \eta); \quad \zeta = x - ct, \quad \eta = y_u \sqrt{K_{\infty} - c} \quad (5.2)$$

Требование $\tilde{\varphi} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ равномерно по y_u исключает распространение возмущений вдоль характеристик второго семейства $\zeta + \eta = \text{const}$; следовательно, в (5.2) необходимо положить $h \equiv 0$. Возмущения из основной толщи пограничного слоя передаются на его верхний край и сносятся вниз по потоку вдоль характеристик первого семейства $\zeta - \eta = \text{const}$. Какова бы ни была функция $g(x)$, подстановка в оба условия (2.32) выражения (5.2) с $h \equiv 0$ устанавливает дифференциальную связь между $p = \tilde{p}(x - ct)$ и $A = \tilde{A}(x - ct)$:

$$\tilde{p} = -\frac{1}{\sqrt{K_{\infty} - c}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \quad (5.3)$$

Из соотношений (2.31), (2.32), (5.3) имеем уравнение Бюргерса

$$(\tilde{A} - c) \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{K_{\infty} - c}} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x^2} \quad (5.4)$$

Предположим теперь, что $K_{\infty} < c$. В переменных ζ, η уравнение (5.1) представляет собой уравнение Лапласа. Решение задачи Неймана для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости $\eta > 0$ записывается в виде [24]

$$\tilde{\varphi}(\zeta, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\xi, 0)}{\partial \eta} \ln[(\zeta - \xi)^2 + \eta^2] d\xi \quad (5.5)$$

Дифференцирование равенства (5.5) по ζ приводит к одному из вариантов формулы Пуассона [23]

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\xi, 0)}{\partial \eta} \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + \eta^2} d\xi \quad (5.6)$$

Введем новую переменную интегрирования $s = \xi - \zeta$ и для любого $\varepsilon > 0$ разобьем интеграл в правой части (5.6) на три интеграла, выделив интеграл по отрезку $[-\varepsilon, \varepsilon]$, и перейдем в обеих частях равенства (5.6) к пределу при $\eta \rightarrow +0$, а затем при $\varepsilon \rightarrow +0$. В результате получим, что на границе $y_u = 0$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(\zeta, 0)}{\partial \zeta} = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\varphi}(s + \zeta, 0)}{\partial \eta} \frac{ds}{s} = \frac{1}{\pi \sqrt{c - K_{\infty}}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\xi, 0)}{\partial y_u} \frac{d\xi}{\xi - \zeta} \quad (5.7)$$

Два условия (2.32)

$$p = \tilde{p}(\zeta) = -\frac{\partial \tilde{\varphi}(\zeta, 0)}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{A}(\zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \tilde{\varphi}(\xi, 0)}{\partial \eta}$$

совместно с соотношением (5.9) устанавливают интегральную связь

$$\tilde{p} = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\xi - \zeta} \quad (5.8)$$

Наряду с $\tilde{\varphi}(\zeta, \eta)$ уравнению Лапласа удовлетворяет и функция $\partial \tilde{\varphi}(\zeta, \eta)/\partial \zeta$; повторяя для последней вывод формулы (5.7), находим

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \xi^2} \frac{d\xi}{\xi - \zeta} \quad (5.9)$$

Подставляя выражение (5.9) в правую часть уравнения (2.31), выводим для функции $\tilde{A}$ уравнение Бенджамина – Оно

$$(\tilde{A} - c) \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} = \frac{1}{\pi \sqrt{c - K_{\infty}}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \xi^2} \frac{d\xi}{\xi - x + ct} \quad (5.10)$$

Таким образом, показано, что система уравнений (2.30) – (2.32) на решениях, зависящих от комбинации $x - ct$, сводится к уравнениям (5.4) либо (5.10). Возможность такого сведения основана на существовании локального соотношения (5.3) либо интегральных соотношений (5.7), (5.8), которые являются частными случаями общей зависимости (3.21), влекущей за собой интегродифференциальное уравнение (3.22).

6. Простейшие точные решения для $c > K_{\infty}$. Односолитонное решение уравнения (5.10) дается выражением

$$A = \frac{4c}{1 + c^2(c - K_{\infty})(x - ct)^2} \quad (6.1)$$

и существует при $K_{\infty} < c < 0$. Если амплитуда солитона (6.1) однозначно определяется его скоростью

$$|A(x, t)|_{\max} = 4|c|$$

то его характерная ширина при фиксированной амплитуде может быть любой. В частности, "масса" солитона уравнения (6.1)

$$\mathcal{M} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4|c| dx}{1 + c^2(c - K_{\infty})(x - ct)^2} = \frac{4}{(c - K_{\infty})^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{x}}{1 + \hat{x}^2} = \frac{4\pi}{(c - K_{\infty})^{1/2}}$$

не является инвариантом на всем множестве решений типа уединенной волны, являясь функцией как c , так и K_∞ . В (6.1) всегда $|c| < |K_\infty|$, причем $\mathcal{M} \rightarrow \infty$, если $|K_\infty| \rightarrow |c| + 0$ и $\mathcal{M} \rightarrow 0$, если $|K_\infty| \rightarrow \infty$.

Периодическое решение уравнения (5.10) можно представить в форме

$$A = c + \frac{k}{(c - K_\infty)^{1/2}} \left[\frac{1 + \sigma^2}{1 - \sigma^2} - \frac{2(1 - \sigma^2)}{1 + \delta^2 - 2\sigma \cos[k(x - ct)]} \right] \quad (6.2)$$

Семейство решений (6.2) зависит от четырех параметров k, c, σ, K_∞ и существует при $0 < \sigma < 1, c > K_\infty, k > 0$. Знак фазовой скорости c в (6.2) может быть любым (в отличие от (6.1)).

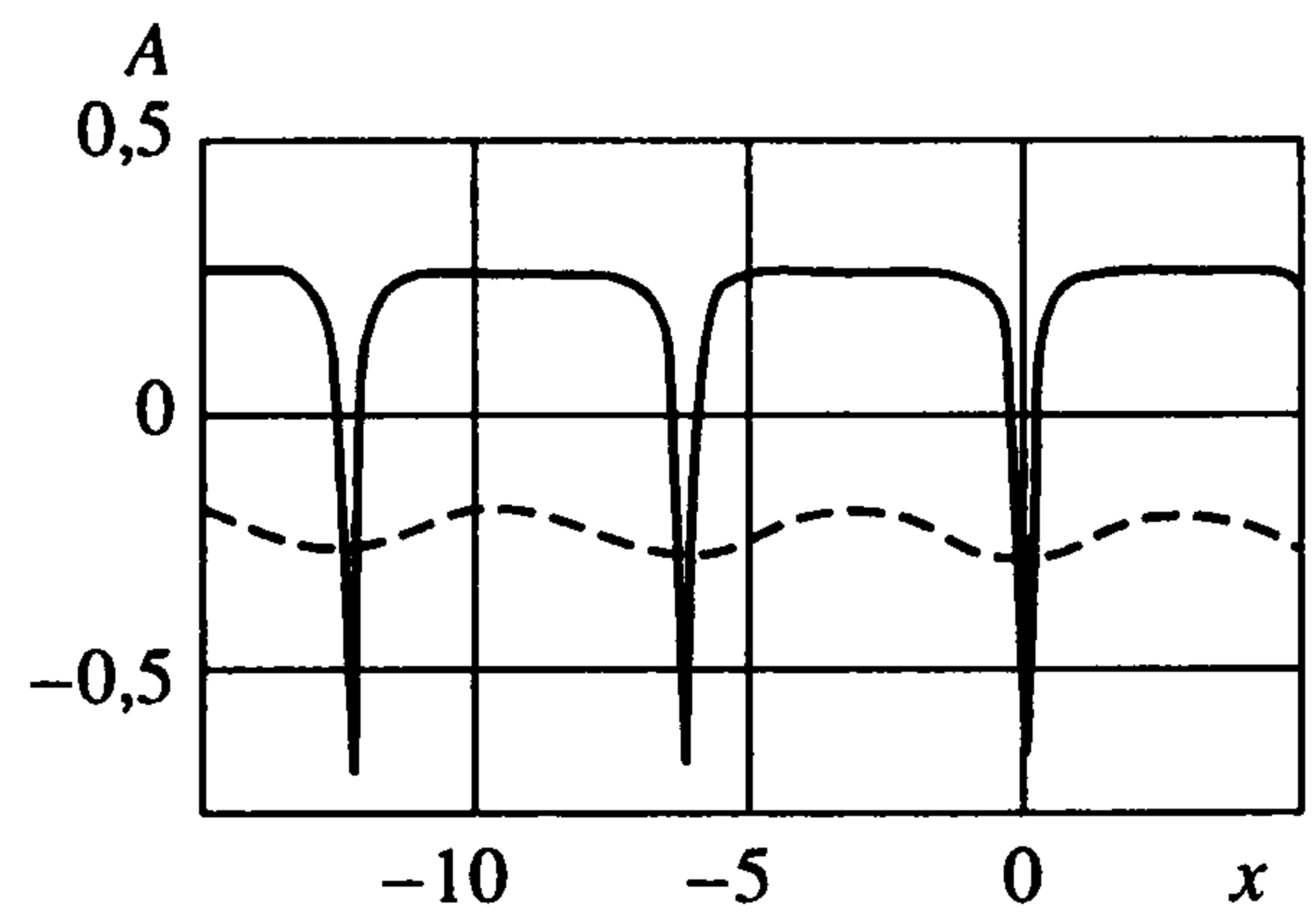
Инвариантность уравнения (3.22) относительно преобразования

$$t \rightarrow \mathcal{B}^{5/3} t, \quad x \rightarrow \mathcal{B} x, \quad A \rightarrow \mathcal{B}^{-2/3} A, \quad K_\infty \rightarrow \mathcal{B}^{-2/3} K_\infty \quad (6.3)$$

и преобразования

$$x \rightarrow x - \mathcal{D} t, \quad A \rightarrow A + \mathcal{D}, \quad K_\infty \rightarrow K_\infty - \mathcal{D} \quad (6.4)$$

позволяет без ограничения общности в классе решений типа бегущей волны (6.2) исключить из уравнения (3.22) время (т.е. перейти в систему координат, движущуюся со скоростью c , положив в (6.4) $\mathcal{D} = -c$), а также рассматривать 2π -периодические по пространству решения, выбрав в (6.3) $\mathcal{B} = k^{-1}$. Избавившись таким образом от двух параметров в семействе решений (6.2), любое решение из данного четырехпараметрического семейства можно получить из более узкого класса применением преобразований (6.3), (6.4). Уравнение (3.22) не инвариантно относительно преобразования Галилея, так как, согласно (6.4), наряду с преобразованием зависимых и независимых переменных меняется также входящий в уравнение параметр K_∞ .



Фиг. 2

Итак, положим в равенстве (6.2) $c = 0, k = 1$ и обозначим

$$\frac{1 + \sigma^2}{1 - \sigma^2} = \frac{(-K_\infty)^{1/2}}{v}$$

Тогда

$$A = \frac{1}{v} - \frac{2v}{|K_\infty|} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{v^2}{|K_\infty|} \right]^{1/2} \cos x \right\}^{-1} \quad (6.5)$$

Здесь $K_\infty < 0, v > 0$, причем два параметра играют различную роль: K_∞ входит в (3.22) и фактически меняет исходное уравнение, а v определяет множество решений когда уравнение задано.

Остановливаясь на вопросе о различных характерных формах периодического решения, удобно переписать равенство (6.5) в виде

$$A = \frac{1}{v} \left[1 - \frac{2\Omega}{1 - (1 - \Omega)^{1/2} \cos x} \right], \quad \Omega = \frac{v^2}{|K_\infty|}, \quad 0 < \Omega < 1 \quad (6.6)$$

График функции (6.6) изображен на фиг. 2 для $v = 4, \Omega = 0,99$ (штриховая линия) и $v = 4, \Omega = 0,01$ (сплошная линия).

7. Распространение волнового фронта для $c < K_\infty$. Возможность представления уравнения (3.22) в виде (5.4) позволяет сразу указать на существование точного решения

$$A = -|c| \left\{ 1 + \operatorname{th} \left[\frac{|c|}{2} (K_\infty + |c|)^{1/2} (x + |c|t) \right] \right\} \quad (7.1)$$

Бегущая вверх по потоку по нулевому фону волна (7.1) реализует механизм передачи возмущений из области внизу по потоку:

$$A \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty), \quad A \rightarrow -2|c| \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Условием существования решения вида (7.1) служит неравенство

$$c < \min [0, K_\infty] \quad (7.2)$$

Неравенство (7.2) допускает существование решений вида (7.1) даже в докритических режимах, а именно

$$-|c| < K_\infty < 0$$

Поскольку функция (7.1) соответствует волне отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке [26], возможность решений аналогичного вида при числах Маха, меньших критического ($K_\infty < 0$), отражает специфику рассматриваемого класса околозвуковых течений: целый ряд качественных особенностей отрывных (или предотрывных) режимов, свойственных картине обтекания вне трансзвукового диапазона скоростей и существенно различных для $M_\infty < 1$ и $M_\infty > 1$, присутствуют в предложенной асимптотической модели.

Наряду с (7.1) в качестве точных решений уравнения (3.22) можно указать волны, распространяющиеся вниз по потоку. Они описываются решением, отличающимся от (7.1) заменой $|c|$ на $-|c|$. В этом случае фронт волны асимптотически соединяет два стационарных состояния вверх и вниз по потоку:

$$A \rightarrow +2|c| \quad (x \rightarrow -\infty), \quad A \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Такие решения существуют при условии $K_\infty > |c|$, т.е. в закритических режимах трансзвукового обтекания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00341).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
2. Нейланд В.Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ, 1974. Вып. 1529. 125 с.
3. Stewartson K., Williams P.G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
4. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies // Advances in Applied Mechanics. N.Y.: Acad. Press, 1974. V. 14. P. 145–239.
5. Messiter A.F. Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.
6. Сычев В.В. О ламинарном отрыве // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 47–59.
7. Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.В. Сычева. М.: Наука, 1987, 255 с.
8. Schneider W. Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. № 3. P. 465–485.
9. Brown S.N., Daniels P.G. On the viscous flow about the trailing edge of a rapidly oscillating plate // J. Fluid Mech. 1975. V. 67. Pt. 4. P. 743–761.

10. Рыжов О.С. Уравнение нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 4. С. 780–783.
11. Рыжов О.С., Терентьев Е.Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 6. С. 1007–1023.
12. Messiter A.F., Feo A., Melnik R. Shock-wave strength for separation of a laminar boundary layer at transonic speeds // AIAA J. 1971. V. 9. № 6. P. 1197–1198.
13. Рыжов О.С. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околосвуковых скоростях внешнего потока // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
14. Рыжов О.С., Савенков И.В. Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока // ПМТФ. 1990. № 2. С. 65–71.
15. Жук В.И., Рыжов О.С. О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 1. С. 56–59.
16. Smith F.T., Burggraf O.R. On the development of large-sized short-scaled disturbances in boundary layers // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1985. V. 399. № 1816. P. 25–55.
17. Benjamin T.B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. Pt. 3. P. 559–592.
18. Ono H. Algebraic solitary waves in stratified fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 39. № 4. P. 1082–1091.
19. Жук В.И. Нелинейные возмущения, индуцирующие собственный градиент давления в пограничном слое на пластине в трансзвуковом потоке // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 68–78.
20. Guderley K.G. Theorie Schallnacher Stromungen. B., etc.: Springer, 1957. = Гудерлей К.Г. Теория околосвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 421 с.
21. Cole J.D., Cook L.P. Transonic Aerodynamics. Amsterdam etc.: North-Holland, 1986. = Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М., Мир, 1989. 360 с.
22. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1969. 800 с.
23. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
24. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
25. Miles J.W. The Potential Theory of Unsteady Supersonic Flow. Cambridge: Univ. Press, 1959. = Майлс Дж.У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М.: Физматгиз, 1963. 272 с.
26. Жук В.И. Асимптотическая модель замкнутой срывной зоны в сверхзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 2. С. 76–84.