

УДК 533.6

© 2001 г. И.Б. Бахолдин

СКАЧОК С ИЗЛУЧЕНИЕМ В МОДЕЛЯХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОБОБЩЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА

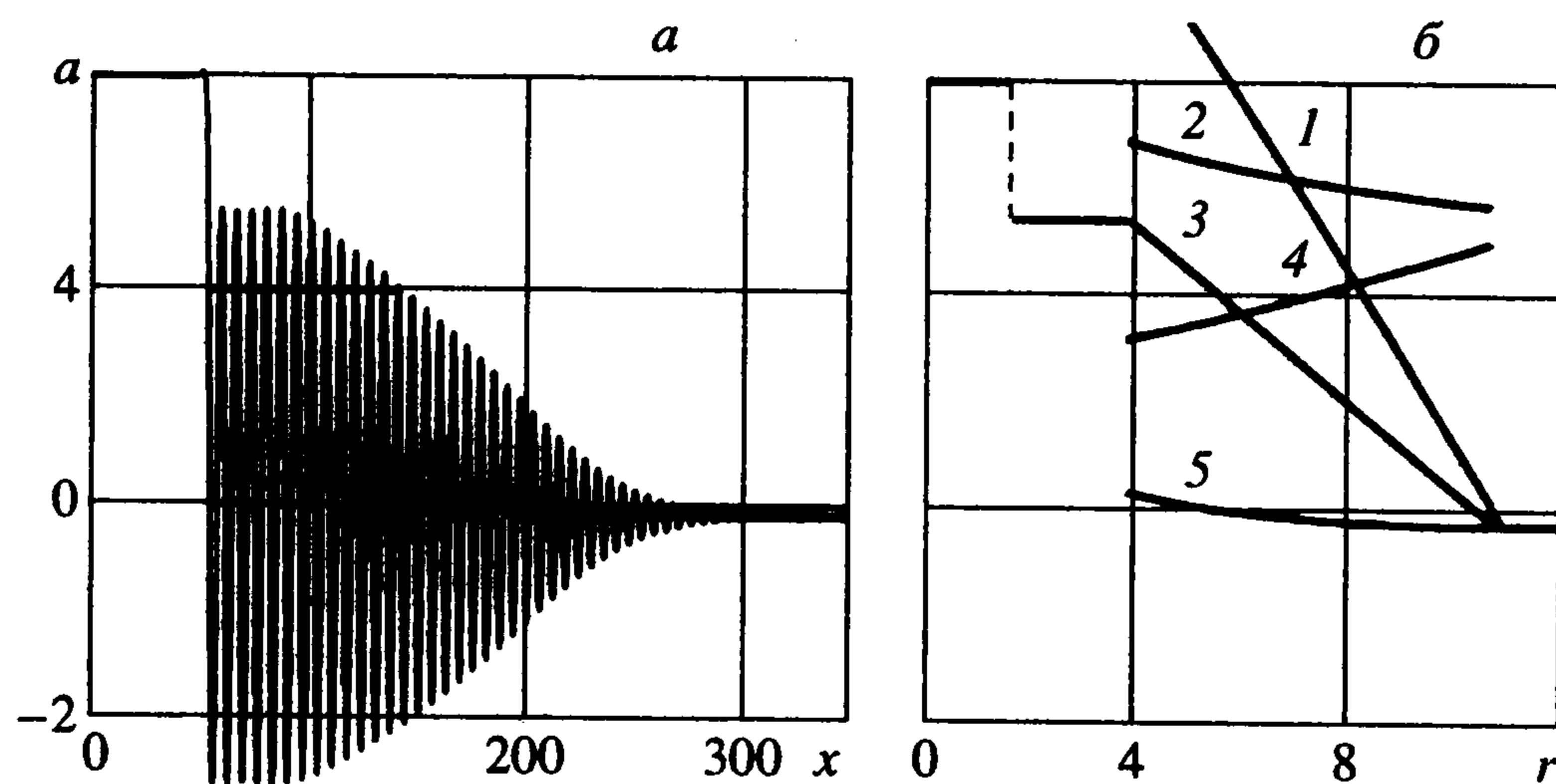
На примере обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза детально исследуется один из основных типов скачков в обратимых системах – скачок с излучением. Указывается способ получения соотношений на скачке без анализа его структуры. Выводятся усредненные уравнения и уравнения для центрированной простой волны огибающей, дающие достаточно простое и эффективное описание скачка в нелокальном смысле. Описывается способ их численного решения. Анализируются способы исследования структуры скачка. Один из способов состоит в том, что структура скачка с излучением рассматривается как часть уединенной волны особого типа – мультисолитона с бесконечным числом элементарных уединенных волн.

Общая теория скачков в обратимых системах была описана ранее [1] и конкретизирована на примере обобщенных уравнений Кортевега – де Вриза [2].

1. Введение. При решении задачи о распаде произвольного разрыва в моделях без диссипации в общем случае возникают расширяющиеся со временем волновые зоны, описываемые некоторыми усредненными уравнениями. На границах этих зон или внутри них могут иметься локализованные (нерасширяющиеся) переходы между однородными, периодическими, квазипериодическими состояниями. Эти переходы рассматриваются как скачки. Один из них – переход между однородным и периодическим состоянием был назван скачком с излучением. Именно такой тип скачка показан на фиг. 1, а. Будем называть область справа от скачка областью перед скачком, а слева – областью за скачком и обозначать соответствующие величины индексами 1 и 2. Заметим, что под скачком (в нелокальном смысле) можно понимать и переход между двумя однородными состояниями, разделенными расширяющейся волновой зоной [3].

Были сформулированы [1] условия существования скачка с излучением. Пусть U – скорость скачка, $\omega = \omega(k)$ – дисперсионное соотношение для линеаризованной модели. Требуется, чтобы для состояния за скачком прямая $U = \omega/k$ не пересекала дисперсионную кривую, кроме как при $k = 0$. А для состояния перед скачком должно иметься одно пересечение. Эти условия обеспечивают одновременно и эволюционность скачка, т.е. устойчивость, а значит, и наблюдаемость в численном эксперименте. В качестве дополнительного условия существования выдвигалось предположение, что для состояния за скачком решения уравнения $U = \omega(k)/k$ комплексны. Справедливость этих утверждений была подтверждена численными экспериментами с обобщенным уравнением Шредингера [4], Кортевега – де Вриза [2], Буссинеска [5], а также в холодной плазме и плазме с горячими электронами [6].

Наиболее простым для анализа уравнением, в котором встречается скачок с излучением, является обобщенное уравнение Кортевега – де Вриза. Оно описывает распространение волн на поверхности жидкости с ледовым или иным упругим покрытием [7]. Приведем это уравнение в виде закона сохранения (с физической точки зрения это



Фиг. 1

закон сохранения импульса)

$$a_t + (a^2/2 + b_3 a_{xx} + b_5 a_{xxx})_x = 0 \quad (1.1)$$

Закон сохранения энергии в линейном приближении имеет вид

$$(a^2/2)_t + [a^3/3 + b_3(aa_{xx} - a_x^2/2) + b_5(aa_{xxx} - a_x a_{xx} + a_{xx}^2/2)]_x = 0 \quad (1.2)$$

В данной модели имеется еще один закон сохранения – нелинейная поправка к закону сохранения энергии [2]. Однако было обнаружено, что при получении соотношений на скачке (см. ниже разд. 2) этот закон сохранения оказывается зависимым от первых двух, поэтому он использован не был. Таким образом, применяемые ниже методы следует считать стандартными для многих моделей, поскольку в типичных полных, неасимптотических, моделях без диссипации имеется именно один дополнительный физический закон сохранения – закон сохранения энергии.

Были приведены [2] и [5] результаты динамических (нестационарных) расчетов скачков для рассматриваемого уравнения. Удобно исследовать исходное уравнение в нормированном виде: $b_3 = \pm 1$, $b_5 = 1$. Такая нормировка соответствует случаю волн на поверхности жидкости с ледовым покрытием [5]. Пусть $\Delta = a_2 - a_1$ – амплитуда скачка в нелокальном понимании, U – скорость локального скачка. Качественно вид решений со скачком с излучением при $b_3 = -1$ и $b_3 = 1$ одинаков, он показан на фиг. 1, а. При $b_3 = -1$ скачок с излучением осуществляется, если $\Delta > \Delta_{*-} \approx 0,4$ (здесь и ниже имеются в виду значения k и ω для области за скачком). Как и предсказывает теория, указанная амплитуда соответствует переходу от действительных значений k к комплексным. При $b_3 = 1$ скачок с излучением осуществляется, если $\Delta > \Delta_{*+} \approx 0,69$. Теория же предсказывает диапазон значений $\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$, в котором может осуществляться как скачок со стационарной, так и с нестационарной структурой, т.е. не дает точного критического значения; $\Delta_1 < \Delta_{*+} < \Delta_2$, значение Δ_1 – случаю $U = \partial^2 \omega / \partial k^2$ при $k > 0$. Значение Δ_2 соответствует случаю $U = \max_k \partial^2 \omega / \partial k^2$. Факторы, определяющие значения Δ_{*+} , обсуждаются в разд. 6.

В данной работе рассматриваются методы исследования скачка, основанные на анализе стационарных решений уравнения (1.1). Пусть $(u_0, u_1, u_2, u_3) \equiv (a, a_x, a_{xx}, a_{xxx})$. Предполагается, что доступны для анализа численные решения системы уравнений, описывающей бегущие волны,

$$u'_0 = u_1, \quad u'_1 = u_2, \quad u'_2 = u_3, \quad u'_3 = (P - b_3 u_2 - u_0^2/2 + V u_0)/b_5 \quad (1.3)$$

P – постоянная интегрирования, V – фазовая скорость. В разд. 2 описывается способ нахождения параметров периодического состояния перед скачком без нахождения фазовой траектории, описывающей его структуру. В разд. 3 выводятся усредненные

уравнения для огибающей волновой зоны. В разд. 4 описывается способ расчета центрированных простых волн. Результаты разд. 2–4 позволяют дать полное количественное описание скачка в нелокальном понимании. В разд. 5 дается простейший способ нахождения структуры локального скачка с излучением, т.е. решения, описывающего переход от однородного состояния к периодическому. В разд. 6 описан систематический подход к поиску структуры, позволяющий связать такие скачки с решениями солитонного типа, обосновать их существование, выявить все возможные решения.

2. Периодическое состояние перед скачком. Найдем начальные данные для решения системы (1.3), соответствующие горбу на графике $a(x)$ для периодического состояния перед скачком. Данное действие эквивалентно поиску двух дополнительных соотношений на скачке [1], поскольку при этом находятся значения a и a_{xx} .

Имеем $a_x = a_{xxx} = 0$. Из интегралов импульса и энергии получаем соотношения

$$f(a_{1*}, U) + b_3 a_{xx1*} + b_5 a_{xxxx1*} = f(a_2, U), \quad f \equiv -Ua + a^2 / 2$$

$$F(a_{1*}, U) + b_3 a_{1*} a_{xx1*} + b_5 a_{1*} a_{xxxx1*} + b_5 a_{xx1*}^2 / 2 = F(a_2, U), \quad F \equiv -Ua^2 / 2 + a^3 / 3$$

$$a_{xx1*} = -\{2[F(a_2, U) - F(a_{1*}, U) - a_{1*}(f(a_2, U) - f(a_{1*}, U))]\} / b_5\}^{1/2}$$

U – скорость скачка, индексами 1 и 2 отмечены состояния до скачка и за ним, звездочка указывает на то, что имеется в виду периодическое состояние локального скачка, а не однородное нелокального; $P = f(a_2, U)$, $V = U$.

Способ нахождения периодического решения перед скачком состоит в следующем. Задаются начальные условия: $a = a_0$ (неизвестная варьируемая величина), $a_x = 0$, a_{xx} – по формуле выше, $a_{xxx} = 0$. Для любого a_0 в некотором интервале значений можно найти точку x_l , такую, что $a_x(x_l) = 0$. Затем выбираем значение $a = a_{1*}$, такое, что $a_{xxx}(x_l) = 0$. Участок $[0, x_l]$ составляет полупериод, решение на втором полупериоде можно получить симметризацией.

В случаях, когда динамический расчет показывает наличие скачка с излучением, такое периодическое решение по заданным значениям a_2 и U действительно находится. Заметим, что указанное периодическое решение находится и тогда, когда скачка с излучением при динамическом расчете нет, поэтому анализ существования и устойчивости структуры скачка необходим.

Таким образом, как и в случае скачка типа кинка [2], одного дополнительного закона сохранения оказывается достаточно, чтобы найти необходимые соотношения на скачке с излучением без анализа его структуры.

3. Усредненные уравнения. Имеем интегралы импульса и энергии:

$$-Va + a^2 / 2 + b_3 a_{xx} + b_5 a_{xxxx} = P \quad (3.1)$$

$$-Va^2 / 2 + a^3 / 3 + b_3 (aa_{xx} - a_x^2 / 2) + b_5 (aa_{xxxx} - a_x a_{xxx} + a_{xx}^2 / 2) = E \quad (3.2)$$

Интеграл импульса положен в основу уравнений (1.3). Рассмотрим все возможные периодические решения уравнений (1.3).

Способ нахождения периодических решений в общем случае состоит в следующем. Задаются начальные условия: $u_0(0) = z$, $u_1(0) = 0$, $u_3(0) = 0$. Вариацией параметра $u_2(0)$ находим траекторию $u(x)$, такую, что существует значение x_l , такое, что $u_1(x_l) = u_3(x_l) = 0$ (вначале находим x_l : $u_1(x_l) = 0$, затем выбираем $u_2(0)$: $u_3(x_l) = 0$). Участок $[0, x_l]$ составляет полупериод, решение на втором полупериоде можно получить симметризацией.

Замечание. В разд. 2, 3 подразумевается, что при $x > 0$ на отрезке $[0, x_l]$ имеется только одно значение x : $u_1 = 0$, т.е. по достижении этого значения расчет по уравнениям (1.3) останавливается. Это исключает из рассмотрения двоякопериодические решения и ветвление

траекторий, которое имеет место в исследованиях, представленных в разделах 5, 6, где расчет во избежание переполнения останавливается, если $|\mu_0| > M$, M – некоторое большое значение.

Пусть $P = f(a_2, U) = \text{const}$. Размножим найденные периодические решения подстановкой $a \rightarrow a + \delta$. Сделаем такую же подстановку в соотношения (1.1) и (1.2) и усредним по периоду полученные уравнения. Получим

$$\langle a + \delta \rangle_t + \langle \delta^2 / 2 + \delta a + Va \rangle_x = 0$$

$$\langle (a^2 + 2\delta a + \delta^2) / 2 \rangle_t + \langle \delta^3 / 3 + \delta^2 a + \delta a^2 + \delta(P + Va - a^2 / 2) + Va^2 / 2 + E \rangle_x = 0$$

$$k_t + [k(V + \delta)]_x = 0 \quad (k_t + \omega_x = 0)$$

(угловые скобки означают операцию усреднения). Для удаления из первых двух уравнений высших производных были использованы интегралы (3.1), (3.2). Уравнения записаны в компактном виде, подразумевается, что $\langle \delta a \rangle = \delta \langle a \rangle$, $\langle \delta a^2 \rangle = \delta \langle a^2 \rangle$ и т.д. Последнее из уравнений этой системы – уравнение совместности [8], в скобках записан более привычный его вид; k – величина обратно пропорциональная длине волны. Независимые неизвестные: $V, \delta, z = u_0(0)$. Зависимые вычисляемые величины, входящие в усредненные уравнения:

$$k = x_l^{-1}, \quad \langle a \rangle = \int_0^{x_l} u_0(x) dx / x_l, \quad \langle a^2 \rangle = \int_0^{x_l} u_0^2(x) dx / x_l \quad (3.3)$$

$$E = -Vz^2 / 2 + z^3 / 3 + z(P + Vz - z^2 / 2) + b_5 u_2(0)^2 / 2$$

Физически осмысленные величины: $z + \delta$ – огибающая сверху, $V + \delta$ – фазовая скорость, $\langle a \rangle + \delta$ – среднее течение, $2x_l$ – длина волны, $z = a(x_l)$ – размах колебаний.

Система усредненных уравнений имеет достаточно простой вид, это связано с тем, что не требуется делать усреднение высших производных; кроме того, величины (3.3) зависят только от двух неизвестных: V и z .

4. Центрированные простые волны. Предположим, что все неизвестные зависят только от одной переменной $r = x/t$, и найдем уравнения для центрированных простых волн

$$r \frac{d}{dr} \frac{\langle a^2 \rangle + 2\delta \langle a \rangle + \delta^2}{2} - \frac{d}{dr} \left[\frac{\delta^3}{3} + \delta^2 \langle a \rangle + \delta \langle a^2 \rangle + \delta \left(P + V \langle a \rangle - \frac{\langle a^2 \rangle}{2} \right) + V \frac{\langle a^2 \rangle}{2} + E \right] = 0$$

$$r \frac{d}{dr} (\langle a \rangle + \delta) - \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta^2}{2} + \delta \langle a \rangle + V \langle a \rangle \right) = 0, \quad r \frac{d}{dr} - \frac{d}{dr} [(V + \delta)k] = 0$$

Преобразуем их к виду

$$D \frac{d}{dr} (\delta, V, z)^T = 0$$

$$d_{11} = r(\langle a \rangle + \delta) - (\delta^2 + 2\delta \langle a \rangle + P + V \langle a \rangle - \langle a^2 \rangle / 2)$$

$$d_{21} = r - (\langle a \rangle + \delta), \quad d_{31} = -k$$

$$d_{12} = r(\langle a^2 \rangle_v / 2 + \delta \langle a \rangle_v) - [\delta^2 \langle a \rangle_v + \delta \langle a^2 \rangle_v + \delta(\langle a \rangle + V \langle a \rangle_v - \langle a^2 \rangle_v / 2) + \langle a^2 \rangle / 2 + V \langle a^2 \rangle_v / 2 + E_v]$$

$$d_{22} = r \langle a \rangle_v - (\delta \langle a \rangle_v + \langle a \rangle + V \langle a \rangle_v), \quad d_{32} = r k_v - [k + (V + \delta)k_v]$$

$$d_{13} = r(\langle a^2 \rangle_z / 2 + \delta \langle a \rangle_z) - [\delta^2 \langle a \rangle_z + \delta \langle a^2 \rangle_z + \delta(V \langle a \rangle_z + \langle a^2 \rangle_z +$$

$$+\delta(V\langle a \rangle_z - \langle a^2 \rangle_z / 2) + V\langle a^2 \rangle_z / 2 + E_z]$$

$$d_{23} = r\langle a \rangle_z - (\delta\langle a \rangle_z + V\langle a \rangle_z), \quad d_{33} = rk_z - (V + \delta)k_z$$

Найдем характеристические скорости c_i перед скачком и значение $r = r_0$ в начале централизованной простой волны, выразим δ через остальные неизвестные и переменную r

$$\det D = b_{r0} + b_{r1}r + b_{r2}r^2 + b_{r3}r^3 = b_{\delta 0} + b_{\delta 1}\delta + b_{\delta 2}\delta^2 + b_{\delta 3}\delta^3$$

$$c_i = R_{3i}(b_{r0}, b_{r1}, b_{r2}, b_{r3})$$

$$c_1 < c_2 = r_0 < c_3, \quad \delta = R_{3j}(b_{\delta 0}, b_{\delta 1}, b_{\delta 2}, b_{\delta 3})$$

R_3 – корень кубического полинома по формуле Кардано. В качестве значения δ выбирается тот из трех корней, при котором $\delta(r_0) = 0$. Знание характеристических скоростей позволяет формально проверить выполнение условий эволюционности на скачке с излучением [1]: $c_1 < U < c_2 < c_3$ перед скачком, $U < c = a_2$ за скачком. Очевидно, что в более сложных моделях порядок полинома будет выше. Для обобщенных уравнений Буссинеска он будет четвертым, т.е. корни все еще находятся аналитически. Для более сложных моделей типа плазмы [6] корни придется искать численно. Это единственный момент, специфичный именно для данной модели.

Освободимся от неизвестной δ . Имеем

$$\begin{vmatrix} d_{21}\delta_v + d_{22} & d_{21}\delta_z + d_{23} \\ d_{31}\delta_v + d_{32} & d_{31}\delta_x + d_{33} \end{vmatrix} \left\| \frac{d}{dr} \right\| \left\| \frac{V}{z} \right\| = -\delta_r \begin{vmatrix} d_{21} \\ d_{31} \end{vmatrix}, \quad \delta_r = 1$$

Система интегрируется численно от $r = r_0$ до тех пор, пока $z \neq \langle a \rangle$; начальные условия: $V(r_0) = U$, $z(r_0) = a_{1*}$.

Пример расчета нелокального скачка с помощью усредненных уравнений и сопоставление с динамическим расчетом приведены на фиг. 1. Показаны график решения со скачком с излучением при нестационарном расчете (а) и графики характерных физических величин, полученные с применением усредненных уравнений (б): 1 – размах колебаний, 2 – длина полуволны, 3 – огибающая сверху, 4 – фазовая скорость, 5 – среднее течение (показано также и на фиг. 1, а жирной линией); $b_3 = -1$, $b_5 = 1$.

5. Структура скачка. На найденной выше в разд. 2 циклической траектории u_* , совместимой со скачком, возьмем начальную точку $Q(a_{1*}, 0, a_{xx1*}, 0)$. Линеаризуем уравнение (1.1) в окрестности состояния за скачком, $a = a_2 + a'$, и найдем волны, растущие при $x \rightarrow +\infty$ [1]. Подставив $a' \sim e^{\kappa x}$, получим

$$-U + a_2 + b_3\kappa^2 + b_5\kappa^4 = 0$$

$$\kappa = [(-b_3 + [b_3^2 - 4(a_2 - U)b_5]^{1/2}) / (2b_5)]^{1/2}, \quad \text{Re}(\kappa) > 0$$

Здесь подразумевается случай, когда $\text{Im}(\kappa) \neq 0$.

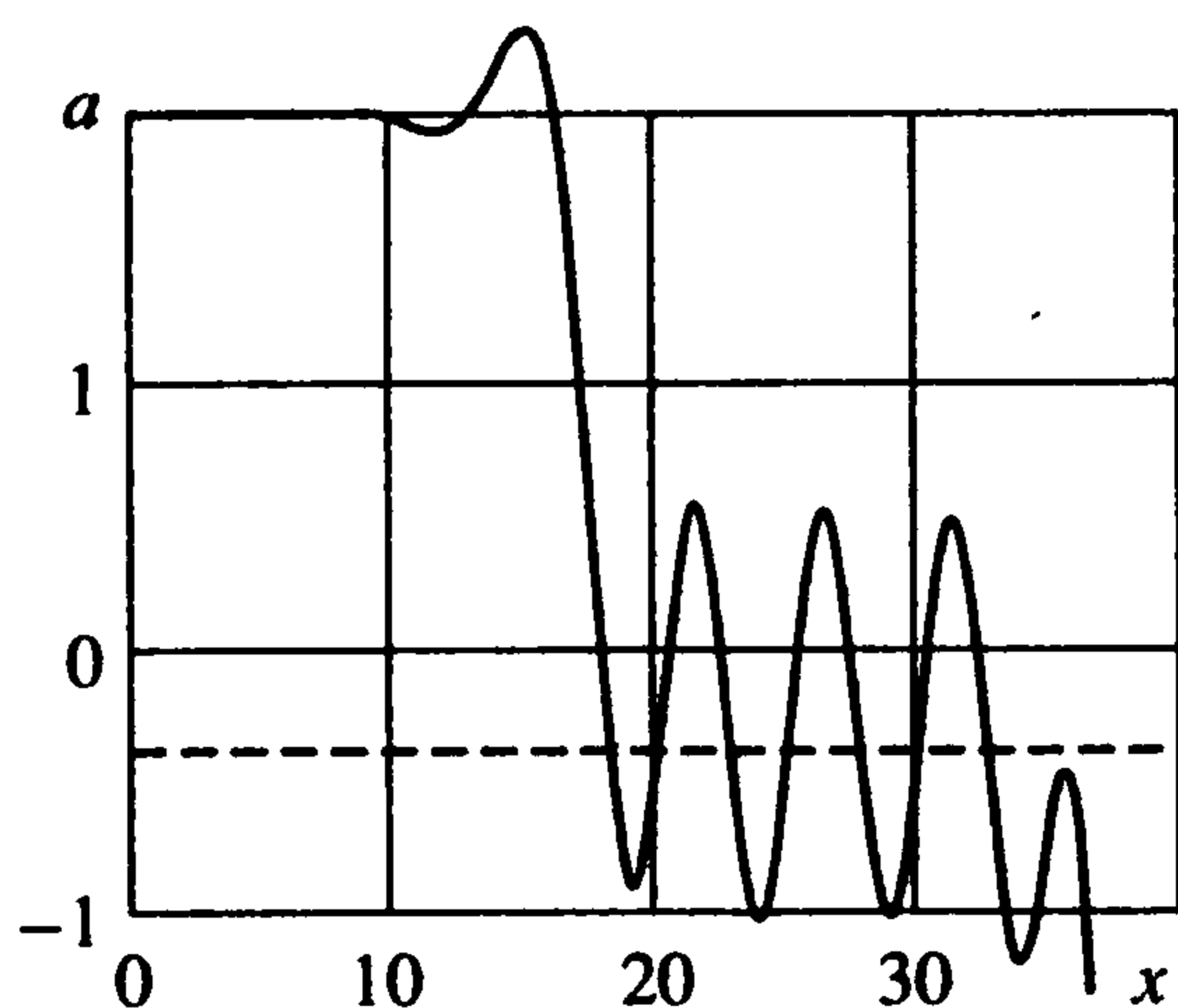
Рассмотрим модель двумерного фазового подпространства S_2 траекторий, стремящихся при $x \rightarrow -\infty$ к однородному состоянию $(a_2, 0, 0, 0)$ – траектории с начальными данными

$$u_0 = a_2 + \varepsilon \sin \phi, \quad u_1 = \varepsilon(R \sin \phi + I \cos \phi)$$

$$u_2 = \varepsilon(R^2 \sin \phi + 2RI \cos \phi - I^2 \sin \phi)$$

$$u_3 = \varepsilon(R^3 \sin \phi + 3R^2I \cos \phi - 3RI^2 \sin \phi - I^3 \cos \phi) \quad (5.1)$$

$$R = \text{Re}(\kappa), \quad I = \text{Im}(\kappa)$$



Фиг. 2

Траектория, соответствующая структуре скачка, удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{\phi \in [0, 2\pi]} \min_x \|u(x) - Q\|_3 = 0$$

$$\| \|_3 = |u_0 - a_{1*}| + |u_1| + |u_3|$$

На фиг. 2 показан пример численного решения ($b_3 = 1$, $b_5 = 1$), отобранного как фазовая траектория, минимально удаленная от точки Q по указанному выше правилу. Число периодов ограничено машинной точностью.

6. Систематический подход к поиску структуры. Скачок рассматривается как предел последовательности решений, описывающих серию

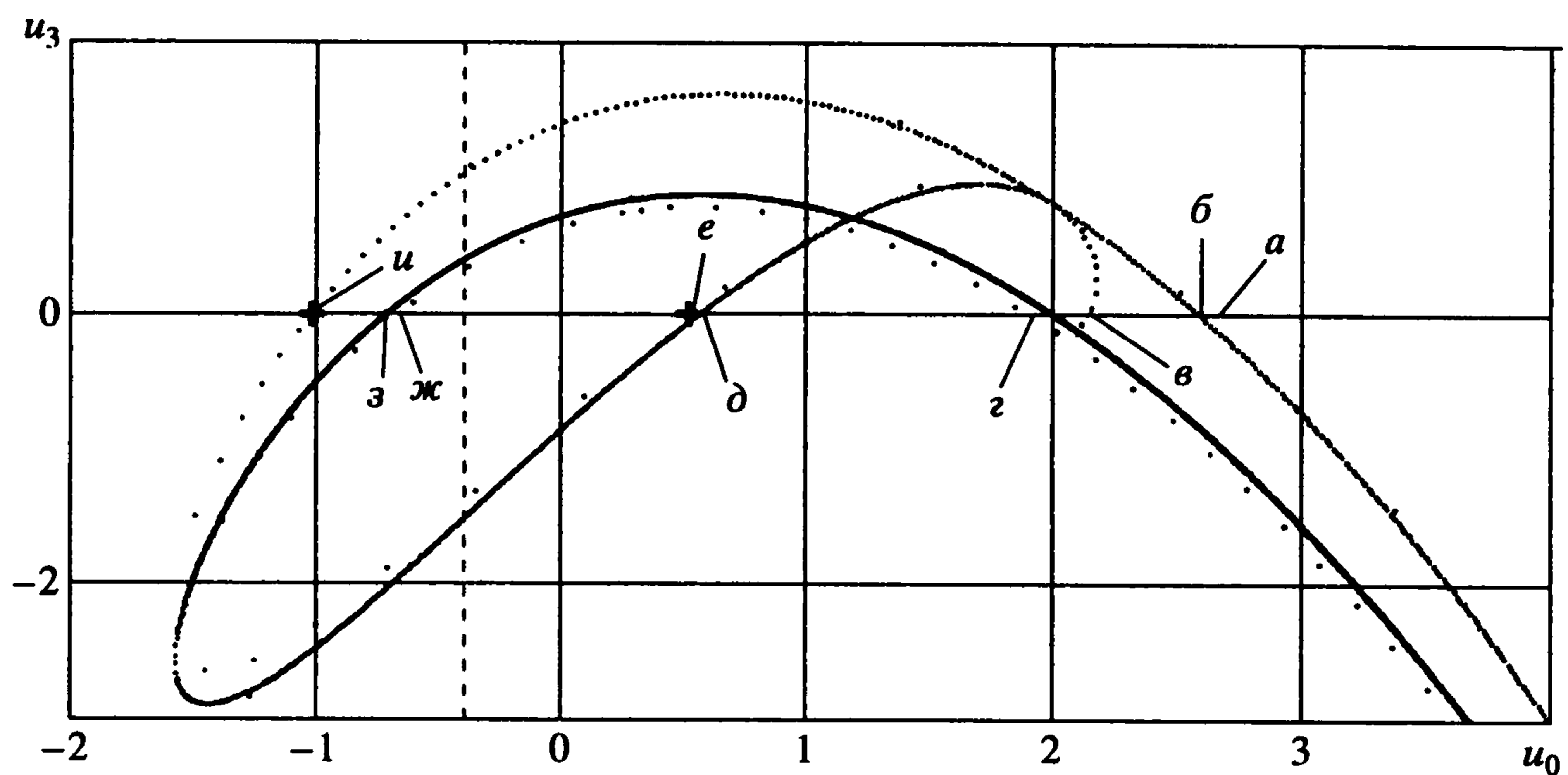
уединенных волн, получаемых симметризацией относительно точки на любом горбе или впадине для периодического состояния перед скачком. Выявим все возможные уединенные волны, исследовав пересечения подпространства S_2 с подпространством S : $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, т.е. используя критерий существования уединенных волн, сформулированный в [1].

Способ нахождения решения типа уединенной волны состоит в следующем. Возьмем начальные данные (5.1) и достаточно малое значение ε . Вариацией ϕ находим траекторию на участке $[0, x_l]$: $u_1(x_l) = 0$, $u_3(x_l) = 0$, далее на участке $[x_l, 2x_l]$ траектория находится симметризацией, при $x < 0$ и $x > 2x_l$ решение пропорционально $\exp x$ и $\exp -x$ соответственно.

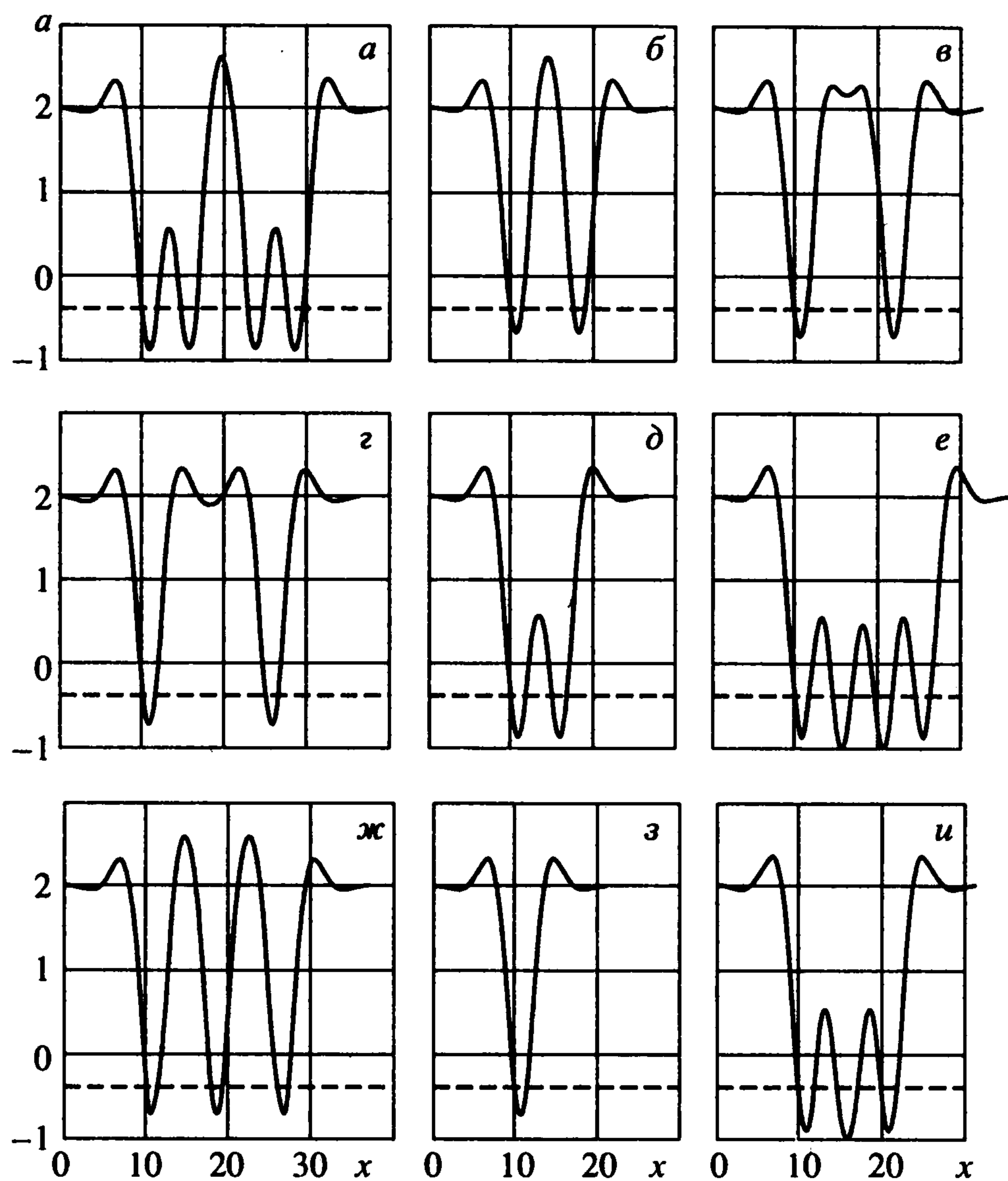
В силу интеграла энергии u_2 выражается через u_0 , u_1 , u_3 , поэтому фактически все исследование можно проводить в трехмерном фазовом пространстве (u_0, u_1, u_3) . Удобно исследовать пересечение S_2 (двумерная поверхность в трехмерном пространстве) с плоскостью S : $u_1 = 0$. Пересечение представляет собой некоторую кривую на плоскости (u_0, u_3) . Каждой точке пересечения этой кривой с осью u_0 соответствует уединенная волна. Моделирование этой кривой состоит в том, что при начальных данных (5.1) варьируется ϕ с некоторым шагом $\Delta\phi$. Если при некотором значении x $u_1 = 0$, то соответствующие значения u_0 и u_3 записываются в некоторый файл, который в дальнейшем графическими средствами интерпретируется как некоторое множество точек на плоскости (u_0, u_3) .

Наибольший интерес представляет случай $b_3 > 0$, $b_5 > 0$, поскольку здесь имеется диапазон значений $\Delta_1 < \Delta = a_2 - a_1 < \Delta_2$, в котором может осуществляться как скачок со стационарной, так и с нестационарной структурой (см. введение).

На фиг. 3 представлено сечение, а на фиг. 4 – соответствующие уединенные волны для случая, когда амплитуда скачка достаточно велика, т.е. известно из динамического расчета, что структура скачка существует. Сечение представляет собой некоторую кривую в пространстве S со счетным числом ветвей. В силу очень сложного строения она представлена на фиг. 4 в виде отдельных точек (а не связных кривых), из которых легко визуально составить некоторые ветви. Видны только ветви, соответствующие наиболее простым типам траекторий. При увеличении точности расчета и уменьшении шага $\Delta\phi$, применяемого при построении рисунка сечения, густота точек на ветвях, число наблюдаемых ветвей и соответственно число уединенных волн может быть увеличено. Здесь же видно только девять пересечений, которым соответствуют уединенные волны различных типов. На фиг. 3 и 4 этим пересечениям присвоены буквенные обозначения $a - u$, пересечение при $u_0 = 2$ в расчет не берется, там точка равновесия. Значение $u_0 \equiv a_{1e} = 2U - a_2$, соответствующее другой точке равновесия (1.3), т.е. точке равновесия для области перед скачком, отмечается на фиг. 2–6 штриховой линией. Точка равновесия, соответствующая состоянию за скачком, хорошо заметна на фиг. 3 и в



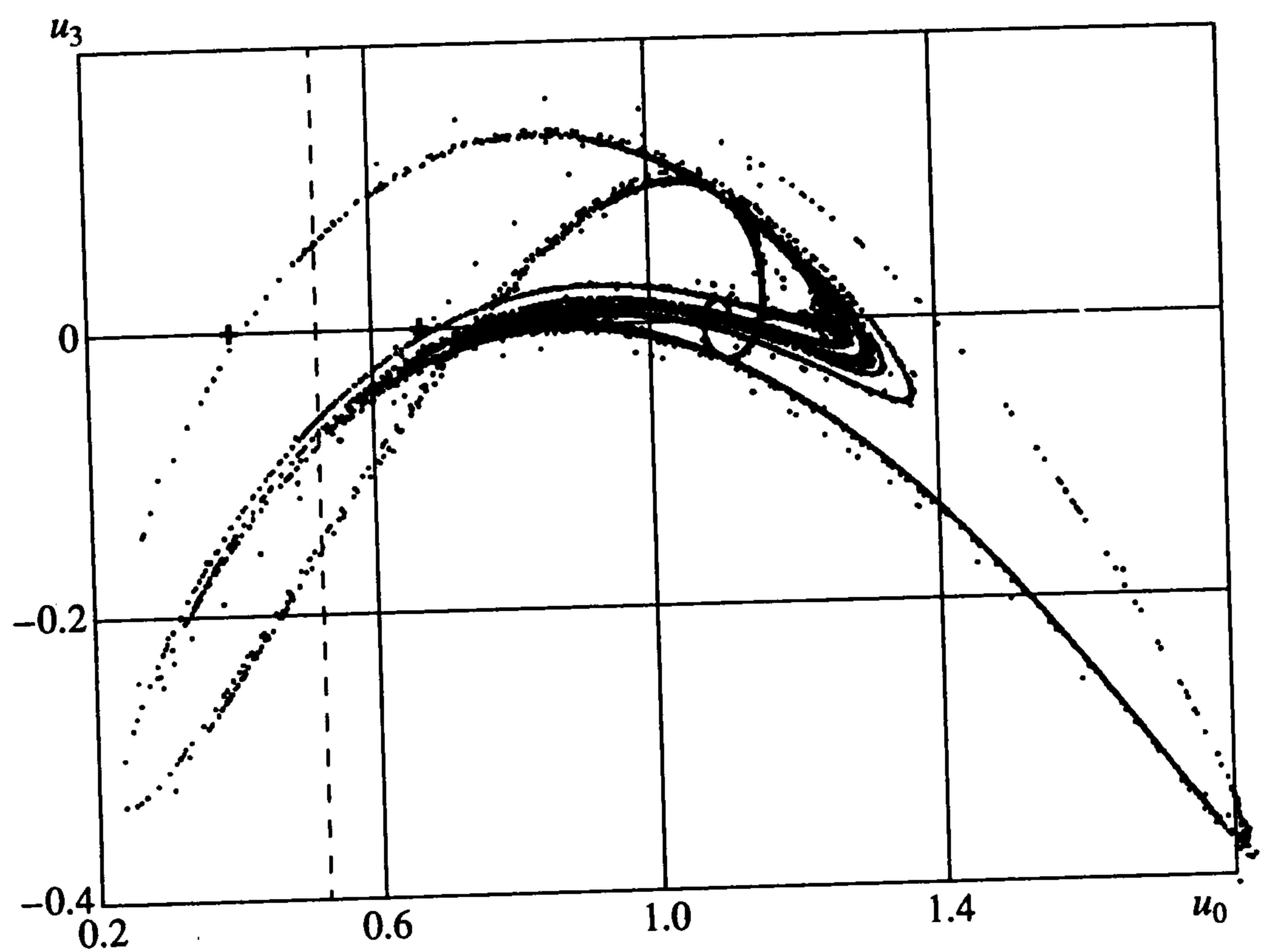
Фиг. 3



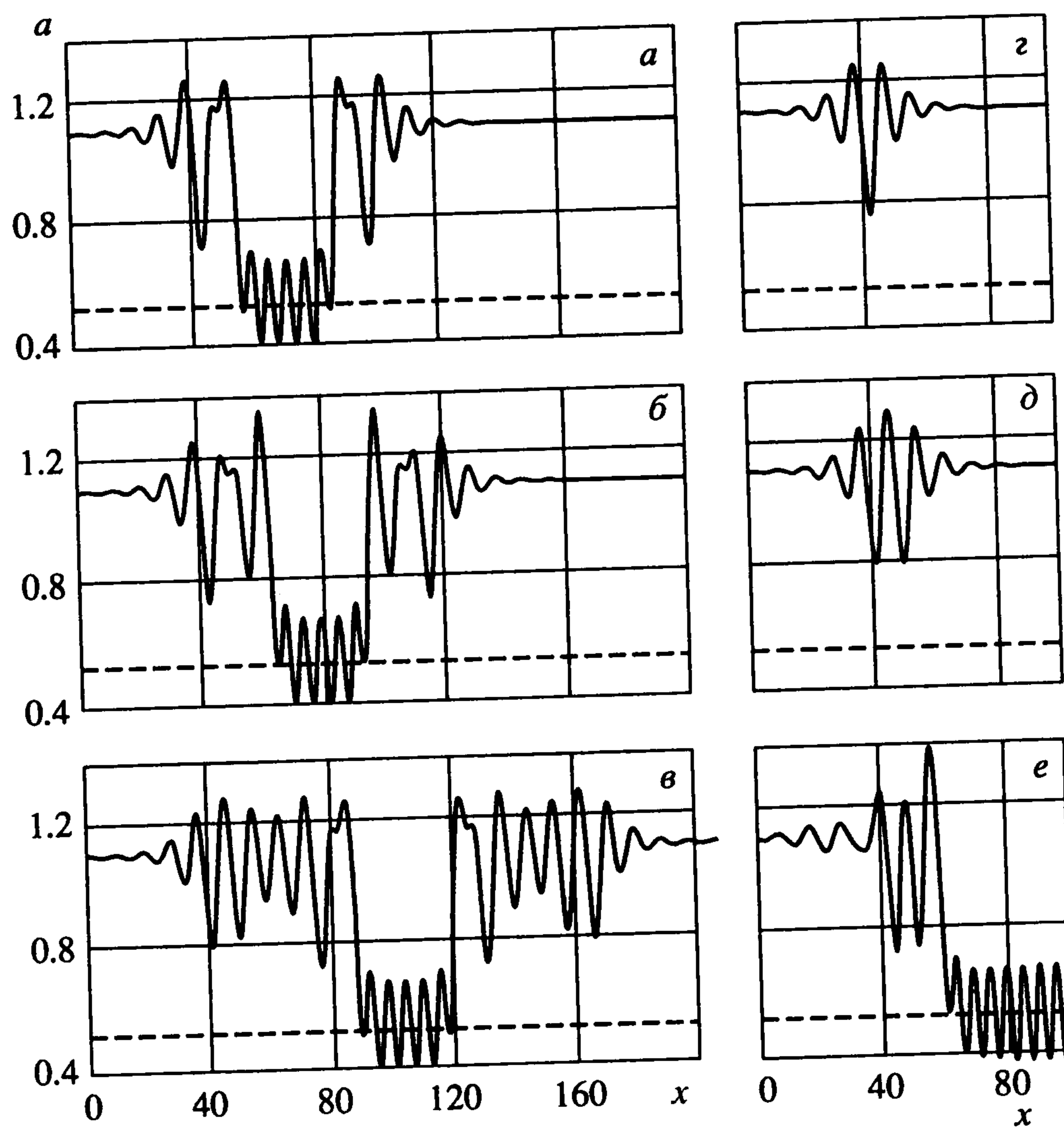
Фиг. 4

особенности на аналогичной фиг. 5, поскольку вокруг этой точки закручивается спиральная ветвь.

Очевидно, что собственно уединенной волной является волна, показанная на фиг. 4, з, все остальные представляют собой комбинации из нескольких уединенных волн, удаленных друг от друга на некоторые фиксированные расстояния, т.е. мульти-солитоны. На сечении двумя жирными крестами показаны точки, соответствующие



Фиг. 5



Фиг. 6

горбу и впадине для периодического состояния перед скачком. Ветви сгущаются вблизи этих точек. Соответственно уединенные волны δ , ϵ образуют начало последовательности уединенных волн, сходящейся к решению, которое можно интерпретировать как комбинацию из эволюционного скачка с излучением и обратного ему неэволюционного скачка.

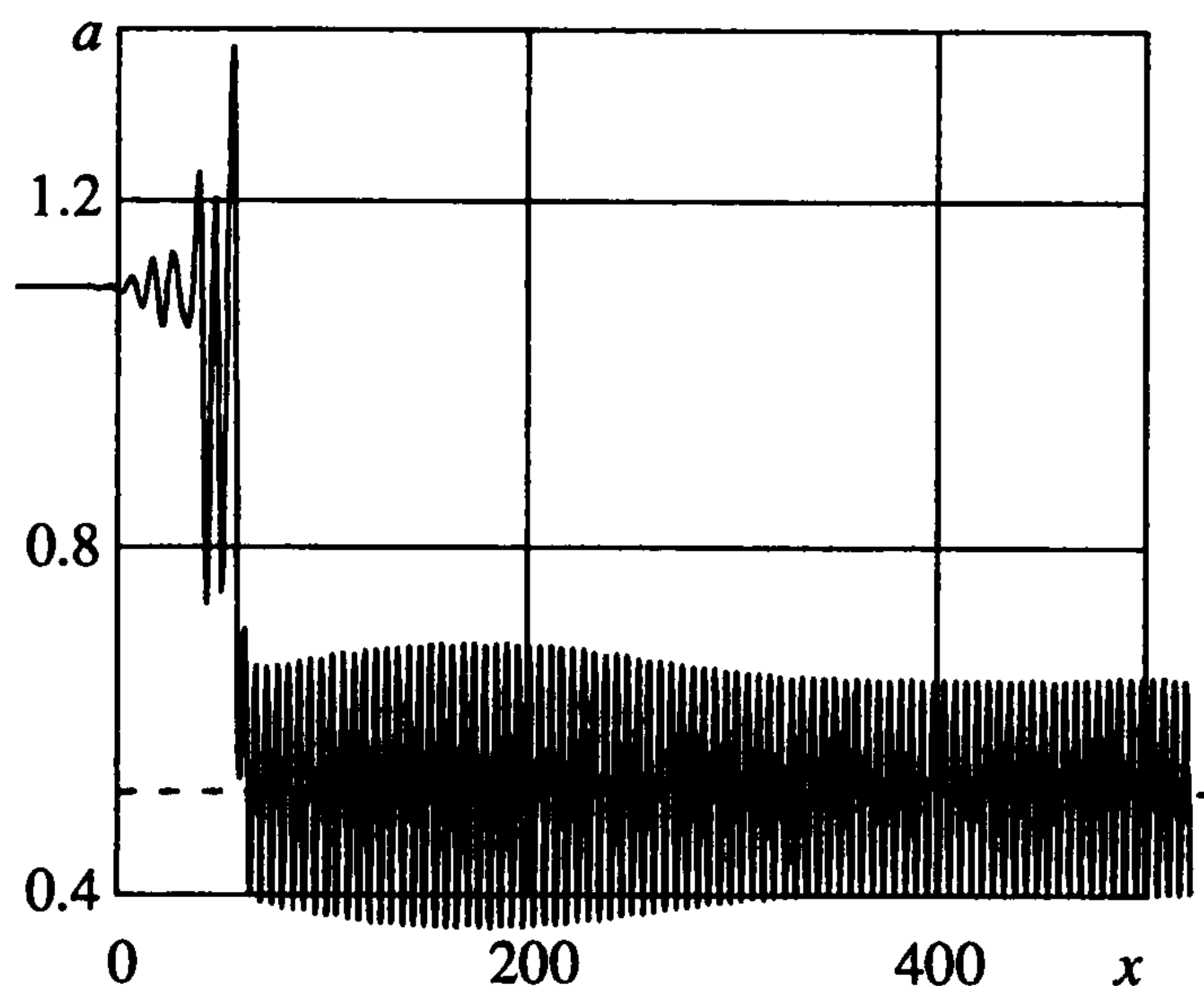
Следует отметить следующий эмпирически выявленный факт: если фазовая траектория сделала несколько оборотов вокруг нижней точки равновесия и прошла вблизи точек, соответствующих горбу и впадине для состояния перед скачком, то число этих оборотов можно произвольно увеличить подбором значения ϕ , все ограничено лишь машинной точностью, поскольку если $|\phi_1 - \phi_2|$ меньше некоторой малой величины, то траектория в силу машинного округления может оказаться одной и той же.

На фиг. 5 представлено сечение для случая, когда динамический расчет показывает отсутствие решения со скачком со стационарной структурой, но теория [1] допускает существование такого скачка. Здесь число ветвей очень велико и исследовать все видимые пересечения уже невозможно. Однако хорошо видно, что к точкам, соответствующим горбу и впадине для периодического состояния, способ нахождения которого описан в разд. 2, идут ветви, что указывает на то, что структура скачка существует. На фиг. 6 представлены несколько мультисолитонов скачкообразного вида ($a-v$), собственно уединенная волна, так называемый 1 : 1 солитон-впадина (z), 1 : 1 солитон-горб (δ) [9], и результаты динамического расчета для сравнения (e).

Решение, соответствующее структуре скачка, очевидно, неединственно, это справедливо и для предыдущего случая. Однако проблемы отбора решения нет. При динамическом расчете с начальными данными типа $\tanh$ отбирается решение с наиболее простой структурой, остальные, видимо, можно наблюдать только при специальном выборе начальных данных с функциями колебательного типа.

Сравнивая фиг. 4 и фиг. 6, можно прийти к выводу, что основным отличием случая скачков с умеренной амплитудой от случая скачков с достаточно большой амплитудой является то, что 1 : 1 солитон целиком находится выше нижней точки равновесия (1.3). В то же время у мультисолитонов имеется периодический участок, порожденный этим положением равновесия. Кроме того, структура скачка содержит немонотонно изменяющиеся при изменении x колебания, причем положение локальных максимумов и минимумов таково, что $a_{max} > a_2$, $a_{min} > a_{1e}$, т.е., по крайней мере, одна уединенная волна, составляющая структуру, лежит целиком выше нижнего положения равновесия. Можно предполагать, что такое образование из уединенных волн неустойчиво. В динамическом расчете встречаются только структуры с монотонным убыванием колебаний за скачком.

Пример графика динамического расчета, соответствующего данному случаю, приведен на фиг. 6, e в том же масштабе, что и уединенные волны. На фиг. 7 дан график с более мелким масштабом по x , позволяющий представить себе, как проходил процесс излучения волны в различные моменты времени: сначала наблюдается излучение волны постоянной амплитуды, что указывает на то, что структура скачка все же существует, затем амплитуда излучаемой волны начинает хаотически колебаться со временем, что указывает на неустойчивость структуры.



Фиг. 7

Автор благодарит А.Г. Куликовского и А.А. Бармина за обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01150) и гранта ведущих научных школ (96-15-96035).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахолдин И.Б. Структуры эволюционных скачков в обратимых системах // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 52–62.
2. Бахолдин И.Б. Скачки в моделях, описываемых обобщенными уравнениями Кортевега – де Вриза // Изв. РАН МЖГ. 1999. № 4. С. 95–109.
3. Гуревич А.В., Питаевский Л.П. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 2. С. 590–604.
4. Бахолдин И.Б. Волновые скачки, описываемые модифицированным уравнением Шредингера // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1329–1348.
5. Бахолдин И.Б. Структуры гидравлических прыжков при наличии ледового покрытия // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 139–146.
6. Бахолдин И.Б. Бездиссипативные скачки для магнитозвуковой ветви движения холодной плазмы // Физика плазмы. 2000. Т. 26. № 1. С. 65–72.
7. Ильичев А.Т., Марченко А.В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 88–95.
8. Whitham J.B. Linear and nonlinear waves. N.Y., etc.: Wiley, 1974 = Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
9. Bakholdin I.B., Il'ichev A.T. Radiation and modulational instability described by the fifth-order Korteweg – de Vries equation // Contemporary Mathematics. 1996. V. 200. P. 1–15.

Москва
e-mail: bakh@orc.ru

Поступила в редакцию
21.III.2000