

УДК 531.381

© 2001 г. А.П. Маркеев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ КОВАЛЕВСКОЙ

Решена задача об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Ковалевской.

1. Постановка задачи. Формулировка основного результата. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Движение отнесем к неподвижной системе координат $OXYZ$, ось OZ которой направим вертикально вверх. С телом свяжем систему координат $Oxyz$, образованную главными осями инерции тела для точки O . Моменты инерции тела относительно осей Ox , Oy и Oz обозначим соответственно через A , B и C . Пусть mg – вес тела, l – расстояние от центра тяжести до неподвижной точки O , а x_* , y_* , z_* – координаты центра тяжести в системе $Oxyz$. В случае Ковалевской $A = B = 2C$, $z_* = 0$. Не ограничивая общности, можно положить $x_* = l$, $y_* = 0$.

В качестве обобщенных координат, задающих ориентацию тела в пространстве, примем углы Эйлера ψ , θ , φ . Уравнения движения имеют вид [1]

$$\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt} - qr &= 0, \quad 2\frac{dq}{dt} + rp = \lambda^2\gamma_3, \quad \frac{dr}{dt} = -\lambda^2\gamma_2 \\ \frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2, \\ p &= \frac{d\psi}{dt}\gamma_1 + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi, \quad q = \frac{d\psi}{dt}\gamma_2 - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi, \quad r = \frac{d\psi}{dt}\gamma_3 + \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta$$

В (1.1) введено обозначение $\lambda^2 = mgl/C$.

Помимо трех алгебраических первых интегралов, всегда существующих в случае движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки – интеграла энергии, интеграла площадей и интеграла $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, уравнения (1.1) допускают еще и четвертый алгебраический интеграл (интеграл Ковалевской):

$$(p^2 - q^2 - \lambda^2\gamma_1)^2 + (2pq - \lambda^2\gamma_2)^2 = \text{const} \quad (1.2)$$

При этом уравнения (1.1) интегрируемы [2]. Но так как их общее решение имеет довольно сложное математическое выражение, то представляет интерес исследование частных решений.

Уравнения (1.1) имеют решения, для которых $\psi = 0$, $\theta = \pi/2$. При этом

$$p = q = 0, \quad r = d\varphi/dt, \quad \gamma_1 = \sin\varphi, \quad \gamma_2 = \cos\varphi, \quad \gamma_3 = 0.$$

Для упомянутых решений постоянная интеграла площадей (проекция кинетического момента тела на вертикаль) равна нулю, ось симметрии тела Oz неподвижна и

занимает горизонтальное положение, а движение тела вокруг этой оси описывается дифференциальным уравнением математического маятника. В общем случае это движение представляет собой вращение с произвольной по величине, периодически меняющейся со временем, угловой скоростью или колебания произвольной амплитуды. Цель статьи состоит в решении задачи об орбитальной устойчивости этих маятникообразных движений тела. При этом величину проекции кинетического момента на вертикаль считаем невозмущаемой, т.е. и в возмущенном движении она предполагается равной нулю. Основным результатом статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Если амплитуда плоских колебаний волчка Ковалевской вокруг оси динамической симметрии не превышает $\pi/2$, то эти колебания орбитально устойчивы; если же амплитуда больше $\pi/2$, то имеет место неустойчивость. Плоские вращения всегда неустойчивы.

2. Функция Гамильтона. Описание невозмущенного движения. Пусть p_ψ , p_θ , p_ϕ – обобщенные импульсы, соответствующие углам Эйлера. Угол ψ – циклическая координата, p_ψ – постоянная по величине проекция кинетического момента на вертикаль. По предположению $p_\psi = 0$. Положим

$$\phi = 3\pi/2 + q_1, \quad \theta = \pi/2 + q_2, \quad p_\phi = C\lambda p_1, \quad p_\theta = C\lambda p_2$$

и введем безразмерное время $\tau = \lambda t$. Тогда движение твердого тела в случае Ковалевской может быть (при $p_\psi = 0$) описано каноническими уравнениями, задаваемыми безразмерным гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} p_1^2 - \cos q_1 \cos q_2 + \frac{1}{4} p_2^2 + \frac{1}{4} p_1^2 \operatorname{tg}^2 q_2 \quad (2.1)$$

Интеграл Ковалевской (1.2) можно представить в виде

$$[(p_1^2 \operatorname{tg}^2 q_2 - p_2^2) + 4 \cos q_1 \cos q_2]^2 + 4[p_1 p_2 \operatorname{tg} q_2 - 2 \sin q_1 \cos q_2]^2 = \text{const} \quad (2.2)$$

Плоским движениям тела отвечает решение, в котором $q_2 = p_2 = 0$, а переменные q_1 , p_1 описываются уравнениями с гамильтонианом

$$H^{(0)} = \frac{1}{2} p_1^2 - \cos q_1 \quad (2.3)$$

Эти уравнения имеют интеграл $H^{(0)} = h = \text{const}$. При $-1 < h < 1$ тело совершает плоские колебания в окрестности устойчивого положения равновесия, для которого центр тяжести тела лежит на вертикали OZ ниже неподвижной точки O . При $h > 1$ осуществляется режим плоских вращений: угол ϕ поворота тела вокруг его горизонтальной оси Oz монотонно возрастает или убывает со временем.

Для целей дальнейшего исследования устойчивости плоских движений целесообразно записать гамильтониан (2.3) в переменных действие – угол I, w [1]. В случае колебаний положим $k_1 = \sin(\beta/2)$, где β – амплитуда колебаний ($0 < \beta < \pi$). Каноническая унивалентная замена переменных $q_1, p_1 \rightarrow I, w$ задается равенствами

$$q_1 = 2 \arcsin[k_1 \operatorname{sn}(u, k_1)], \quad p_1 = 2k_1 \operatorname{cn}(u, k_1), \quad u = 2\pi^{-1} K(k_1) w \quad (2.4)$$

Здесь $k_1 = k_1(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = 8\pi^{-1} [E(k_1) - (1 - k_1^2) K(k_1)] \quad (2.5)$$

В (2.4), (2.5) и ниже используются стандартные обозначения для эллиптических функций и интегралов [3].

Частота колебаний вычисляется по формуле

$$\omega_1 = \pi/(2K(k_1)) \quad (2.6)$$

В переменных I, w функция Гамильтона (2.3) принимает вид

$$H^{(0)} = 2k_1^2 - 1 \quad (2.7)$$

В случае вращений положим $k_2^2 = 2(1+h)^{-1}$. Переменные I, w вводятся по формулам

$$q_1 = 2 \operatorname{am}(u, k_2), \quad p_1 = 2k_2^{-1} \operatorname{dn}(u, k_2), \quad u = \pi^{-1} K(k_2) w \quad (2.8)$$

Здесь $k_2 = k_2(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = 4\pi^{-1} k_2^{-1} E(k_2) \quad (2.9)$$

Для частоты вращений имеем выражение

$$\omega_2 = \pi / (k_2 K(k_2)) \quad (2.10)$$

Функция Гамильтона (2.3) в переменных I, w имеет вид

$$H^{(0)} = 2k_2^{-2} - 1 \quad (2.11)$$

В невозмущенном движении имеем $q_2 = p_2 = 0, I = I_0 = \text{const}$, а переменные q_1, p_1 при заданном допустимом значении I_0 определяются формулами (2.4)–(2.6) в случае колебаний и формулами (2.8)–(2.10) в случае вращений. При этом $w = \omega_1 \tau + w(0)$ в случае колебаний и $w = \omega_2 \tau + w(0)$ в случае вращений.

Введем возмущение переменной действие $r_1 = I - I_0$. Задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений тела эквивалентна задаче об их устойчивости по отношению к переменным q_2, p_2, r_1 .

3. Исследование линеаризованных уравнений возмущенного движения. Из (2.1) и (2.3)–(2.11) находим квадратичную относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ часть H_2 гамильтониана возмущенного движения:

$$H_2 = \omega r_1 + \frac{1}{4} p_2^2 + \frac{1}{4} (p_1^2 + 2 \cos q_1) q_2^2 \quad (3.1)$$

В (3.1) величины ω и q_1, p_1 соответствуют невозмущенному движению и определяются при $I = I_0$ по формулам (2.6), (2.4) в случае колебаний и по формулам (2.10), (2.8) в случае вращений.

В линеаризованных уравнениях возмущенного движения $r_1 = \text{const}$, а изменение переменных q_2 и p_2 , если за независимую переменную принять величину w , описывается уравнениями

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial h_2}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial h_2}{\partial q_2} \quad (3.2)$$

где

$$h_2 = \frac{1}{4\omega} [p_2^2 + (p_1^2 + 2 \cos q_1) q_2^2] \quad (3.3)$$

Интеграл Ковалевской (2.2) для уравнений возмущенного движения можно записать при помощи следующего ряда по степеням q_2, p_2, r_1 :

$$K = k_2 + k_4 + \dots + k_n + \dots = \text{const} \quad (3.4)$$

где k_n – форма степени n относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ с коэффициентами, зависящими от q_1, p_1 , которые соответствуют невозмущенному движению. При этом

$$k_2 = (p_1^2 \cos q_1 - 2) q_2^2 - 2 p_1 \sin q_1 q_2 p_2 - \cos q_1 p_2^2 \quad (3.5)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что k_2 является первым интегралом линейных уравнений (3.2).

Пусть $X(w)$ – матрица фундаментальных решений системы (3.2), нормированная условием $X(0) = E$, где E – единичная матрица второго порядка. Элементы $x_{ij}(w)$

матрицы X удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_{1j}}{dw} = \frac{1}{2\omega} x_{2j}, \quad \frac{dx_{2j}}{dw} = -\frac{1}{2\omega} (p_1^2 + 2 \cos q_1) x_{1j}; \quad j = 1, 2 \quad (3.6)$$

и начальным условиям

$$x_{11}(0) = x_{22}(0) = 1, \quad x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0 \quad (3.7)$$

Правые части уравнений (3.6) имеют период T относительно w , причем, как видно из (2.4) и (2.8), $T = \pi$ в случае колебаний и $T = 2\pi$ в случае вращений. В силу гамильтоновости системы (3.6) при любом w имеет место равенство

$$x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} = 1 \quad (3.8)$$

Характеристическое уравнение матрицы $X(T)$ записывается в виде

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0 \quad (3.9)$$

где $2a = x_{11}(T) + x_{22}(T)$. Если $|a| < 1$, то корни уравнения (3.9) по модулю равны единице и различны. В этом случае имеет место [4] устойчивость в линейном приближении. Если же $|a| > 1$, то уравнение (3.9) имеет корень, модуль которого больше единицы, и имеет место неустойчивость рассматриваемого периодического движения, причем не только в линейном приближении, но и в рамках полных нелинейных уравнений возмущенного движения [4].

В соответствии с соотношениями (3.2), (3.5) и (3.7), решения уравнений (3.6) при любом значении w удовлетворяют равенствам

$$(p_1^2 \cos q_1 - 2)x_{1j}^2 - 2p_1 \sin q_1 x_{1j}x_{2j} - \cos q_1 x_{2j}^2 = c_j = \text{const}, \quad j = 1, 2 \quad (3.10)$$

$$c_1 = p_1^2(0) \cos q_1(0) - 2, \quad c_2 = -\cos q_1(0)$$

Здесь $q_1(0)$, $p_1(0)$ – значения функций q_1 , p_1 при $w = 0$, вычисляемые по формулам (2.4) в случае колебаний и по формулам (2.8) в случае вращений. Положив в (3.10) $w = T$, найдем, что справедливы следующие равенства:

$$2(2b^2 - 1)x_{11}^2(T) - x_{21}^2(T) = 2(2b^2 - 1), \quad 2(2b^2 - 1)x_{12}^2(T) - x_{22}^2(T) = -1 \quad (3.11)$$

где $b = k_1$ в случае колебаний и $b = k_2^{-1}$ в случае вращений.

Из (3.11) и (3.8) находим, что $x_{11}(T) = x_{22}(T)$, и следовательно, величина a в уравнении (3.9) удовлетворяет равенству

$$a^2 = x_{22}^2(T) = 1 + 2(2b^2 - 1)x_{12}^2(T) \quad (3.12)$$

Из рассмотрения асимптотики решений уравнений (3.6) можно получить, что в случае колебаний малой амплитуды ($k_1 \rightarrow 0$) имеем $x_{12}(w) \rightarrow (\sqrt{2}/2) \sin(\sqrt{2}w/2)$, а в случае быстрых вращений ($k_2 \rightarrow 0$) $x_{12}(w) \rightarrow 1/2k_2 \sin(w/2)$. Численный анализ показал, что $x_{12}(T)$ – монотонно возрастающая функция (от k_1 в случае колебаний и от k_2 в случае вращений). Поэтому содержащаяся в равенстве (3.12) величина $x_{12}(T)$ всегда отлична от нуля: в случае колебаний $x_{12}(T) > (\sqrt{2}/2) \sin(\pi\sqrt{2}/2)$, а в случае вращений $x_{12}(T) > 0$.

Так как в случае вращений величина $b > 1$, то на основании вышесказанного из равенства (3.12) сразу видно, что $|a| > 1$. Следовательно, плоские вращения волчка Ковалевской вокруг оси динамической симметрии всегда орбитально неустойчивы.

Колебания же в зависимости от их амплитуды β (т.е. от величины максимального отклонения оси Ox тела, на которой лежит центр тяжести, от ее устойчивого равновесного положения на вертикали) могут быть орбитально устойчивыми или не-

устойчивыми. Из равенства (3.12) видно, что если $\beta > \pi/2$ (т.е. $\sqrt{2}/2 < k_1 < 1$), то $|a| > 1$. Поэтому колебания с амплитудой, превосходящей $\pi/2$, орбитально неустойчивы. Если же амплитуда колебаний не превышает $\pi/2$ (т.е. $0 < k_1 \leq \sqrt{2}/2$), то $|a| \leq 1$ и линейного приближения недостаточно для получения строгих выводов об их орбитальной устойчивости.

4. Нелинейный анализ устойчивости колебаний в случае $\beta \leq \pi/2$. Примем в качестве независимой переменной величину $\omega_1 \tau$. Из соотношений (2.4)–(2.7) при помощи известных [3] правил действий с эллиптическими функциями и интегралами можно получить гамильтониан возмущенного движения в виде следующего ряда:

$$H = r_1 + h_2 + H_4 + \dots \quad (4.1)$$

Величина h_2 задается равенством (3.3), в котором $\omega = \omega_1$, а q_1, p_1 соответствуют невозмущенному движению. Функция H_4 определяется равенствами

$$H_4 = \omega_1^{-1} (f_0 r_1^2 + 1/24 f_1 q_2^4 + 1/4 f_2 r_1 q_2^2) \quad (4.2)$$

$$f_0 = -\frac{\pi^2 [E(k_1) - (1 - k_1^2) K(k_1)]}{32 k_1^2 (1 - k_1^2) K^3(k_1)}, \quad f_1 = 4 p_1^2 - \cos q_1 = 14 k_1^2 \operatorname{cn}^2 u + 2 k_1^2 - 1$$

$$f_2 = \frac{\partial}{\partial I} (p_1^2 + 2 \cos q_1) = \frac{\pi}{(1 - k_1^2) K(k_1)} [1 - k_1^2 + 2 \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u (\operatorname{cn} u \operatorname{zn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u)]$$

Величина u определена в (2.4), k_1 соответствует невозмущенному движению. Многоточием в (4.1) обозначена совокупность членов выше пятой степени относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$.

Доказательство орбитальной устойчивости при $\beta < \pi/2$. При $\beta < \pi/2$ имеем $0 < k_1 < \sqrt{2}/2$. Согласно равенству (3.12), величина a в характеристическом уравнении (3.9) удовлетворяет неравенству $|a| < 1$, и следовательно, имеет место устойчивость в линейном приближении. Элементы $x_{ij}(w)$ матрицы фундаментальных решений системы (3.6) будут ограниченными функциями.

Лемма 1. Если сделать замену переменных $q_2, p_2 \rightarrow \tilde{q}_2, \tilde{p}_2$ по формулам

$$q_2 = x_{11}(w) \tilde{q}_2 + x_{12}(w) \tilde{p}_2, \quad p_2 = x_{21}(w) \tilde{q}_2 + x_{22}(w) \tilde{p}_2 \quad (4.3)$$

то гамильтониан $\tilde{h}_2$ преобразованной системы (3.2) будет тождественно равен нулю, а функция (3.5) преобразуется к виду

$$\tilde{k}_2 = 2(2k_1^2 - 1) \tilde{q}_2^2 - \tilde{p}_2^2 \quad (4.4)$$

Первое утверждение леммы сразу следует из теории вариации произвольных постоянных в системах гамильтоновых дифференциальных уравнений ([1], п. 187). Чтобы показать справедливость второго утверждения, заметим, что квадратичная форма $\tilde{k}_2$, получаемая из (3.5) заменой (4.3), – интеграл преобразованной системы. Но так как $\tilde{h}_2 = 0$, то коэффициенты формы $\tilde{k}_2$ должны быть постоянными величинами. Подставляя выражения (4.3) в правую часть равенства (3.5) и полагая $w = 0$, находим выражение (4.4) для $\tilde{k}_2$.

Пусть $S(q_2, \tilde{p}_2, w)$ – производящая функция канонического унивалентного преобразования (4.3). Сделаем в уравнениях возмущенного движения, определяемых гамильтонианом (4.1), каноническую унивалентную замену переменных $q_2, p_2, r_1, w \rightarrow \tilde{q}_2, \tilde{p}_2, \tilde{r}_1, \tilde{w}$, задав ее при помощи производящей функции $\tilde{r}_1 w + S$. Тогда

$$r_1 = \tilde{r}_1 + \frac{\partial S}{\partial w} = \tilde{r}_1 - \frac{1}{4\omega_1} [p_2^2 + (p_1^2 + 2 \cos q_1) q_2^2], \quad w = \tilde{w} \quad (4.5)$$

а q_2, p_2 должны быть заменены согласно формулам (4.3).

Замена (4.3), (4.5) уничтожает в гамильтониане квадратичную форму относительно $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2$, и приводит его к виду

$$\tilde{H} = \tilde{r}_1 + \tilde{H}_4 + \dots \quad (4.6)$$

Функция $\tilde{H}_4$ в (4.6) получается из функции (4.2), если в последней q_2, p_2, r_1 заменить по формулам (4.3), (4.5).

Интеграл Ковалевской (3.4) в новых переменных запишется в виде

$$\tilde{K} = \tilde{k}_2 + \tilde{k}_4 + \dots + \tilde{k}_n + \dots = \text{const} \quad (4.7)$$

где $\tilde{k}_n$ – форма степени n относительно $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2$, $|\tilde{r}_1|^{1/2}$, причем $\tilde{k}_2$ задается формулой (4.4).

Задача об орбитальной устойчивости рассматриваемых колебаний тела эквивалентна задаче об их устойчивости по отношению к переменным $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2, \tilde{r}_1$.

Для доказательства устойчивости при $0 < k_1 < \sqrt{2}/2$ рассмотрим функцию $V = \tilde{H}^2 + \tilde{K}^2$. Так как $\tilde{H}$ и $\tilde{K}$ – интегралы уравнений возмущенного движения, то $dV/d\tau = 0$. Но, в силу отрицательной определенности функции (4.4) относительно переменных $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2$, система уравнений $\tilde{H} = 0, \tilde{K} = 0$ при малых $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2, \tilde{r}_1$ имеет только нулевое решение $\tilde{q}_2 = \tilde{p}_2 = \tilde{r}_1 = 0$. Поэтому функция V определено – положительна относительно $\tilde{q}_2, \tilde{p}_2, \tilde{r}_1$, и следовательно [5], колебания твердого тела с амплитудой, не превосходящей $\pi/2$, орбитально устойчивы.

Устойчивость при критическом значении амплитуды колебаний ($\beta = \pi/2$). При $\beta = \pi/2$ в гамильтониане (4.1) возмущенного движения и формуле (4.2) имеем

$$h_2 = \frac{K}{2\pi} (p_2^2 + 4 \operatorname{sn}^2 u \, q_2^2), \quad u = \frac{2K}{\pi} w \quad (4.8)$$

$$f_0 = -\frac{\pi^2(2E - K)}{16K^3}, \quad f_1 = 7 \operatorname{sn}^2 u, \quad f_2 = \frac{\pi}{K} [1 + 4 \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u (\operatorname{cn} u \operatorname{zn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u)] \quad (4.9)$$

Здесь и ниже модуль k_1 эллиптических функций и интегралов равен $\sqrt{2}/2$.

Оказалось, что при $k_1 = \sqrt{2}/2$ матрица фундаментальных решений системы (3.6) может быть выписана в явном виде:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \operatorname{cnu}, & x_{12} &= \operatorname{snudnu} - \operatorname{cnu} \, F(u) \\ x_{21} &= -2 \operatorname{snudnu}, & x_{22} &= \operatorname{cn}^3 u + 2 \operatorname{snudnu} F(u) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$F(u) = \operatorname{zn} u + \frac{2E - K}{2K} u$$

При $w = \pi$ имеем

$$X(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & x_{12}(\pi) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_{12}(\pi) = 2E - K$$

Корни характеристического уравнения (3.9) кратные: $\rho_1 = \rho_2 = -1$, а матрица $X(\pi)$ не приводится к диагональной форме. Поэтому в рамках линейных уравнений возмущенного движения имеет место орбитальная неустойчивость. Покажем, однако, что в полной нелинейной системе уравнений возмущенного движения колебания твердого тела с амплитудой, равной $\pi/2$, орбитально устойчивы. При доказательстве воспользуемся результатами, полученными ранее [6]. Для их применения надо гамильтониан возмущенного движения (4.1) привести к нормальной форме, по коэффициентам которой можно судить об устойчивости или неустойчивости.

В соответствии с алгоритмом из [6] предварительно нормализуем линейную систему с гамильтонианом (4.8) и независимой переменной w . Для этого сделаем замену $q_2, p_2 \rightarrow q_2^*, p_2^*$ по формулам

$$q_2 = n_{11}q_2^* + n_{12}p_2^*, \quad p_2 = n_{21}q_2^* + n_{22}p_2^* \quad (4.11)$$

$$n_{11} = cx_{11}, \quad n_{12} = cx_{11}w + c^{-1}x_{12}$$

$$n_{21} = cx_{21}, \quad n_{22} = cx_{21}w + c^{-1}x_{22} \quad (4.12)$$

$$c = [x_{12}(\pi)/\pi]^{1/2} = [(2E - K)/\pi]^{1/2}$$

Величины x_{ij} в (4.12) – это функции $x_{ij}(w)$ из (4.10).

Замена (4.11) унивалентная, каноническая и имеет период 2π по w . Преобразованным линейным уравнениям (3.2) отвечает гамильтониан $h_2^* = -\frac{1}{2}p_2^{*2}$.

Дополнив равенства (4.11) еще двумя соотношениями

$$r_1 = r_1^* - \frac{1}{2}p_2^{*2} - \frac{K}{2\pi}[(n_{21}q_2^* + n_{22}p_2^*)^2 + 4\operatorname{sn}^2 u (n_{11}q_2^* + n_{12}p_2^*)^2], \quad w = w^* \quad (4.13)$$

получим каноническое унивалентное преобразование $q_2, p_2, r_1, w \rightarrow q_2^*, p_2^*, r_1^*, w^*$ по всем четырем фазовым переменным.

В новых переменных гамильтониан возмущенного движения принимает вид

$$H^* = r_1^* - \frac{1}{2}p_2^{*2} + H_4^* + \dots \quad (4.14)$$

Гамильтониан (4.14) имеет период 2π по w . Согласно изложенному ранее [6] при решении вопроса об устойчивости из коэффициентов формы четвертой степени H_4^* относительно $q_2^*, p_2^*, |r_1^*|^{1/2}$, как правило, достаточно знать только коэффициент g_{40} при q_2^{*4} . Из соотношений (4.1) и (4.8)–(4.13) для него можно получить следующее выражение:

$$g_{40} = \frac{(2E - K)^2}{12\pi^3} \{7K \operatorname{sn}^6 u - 6(2E - K)(\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u + \operatorname{cn}^4 u)^2 - \\ - 12K[1 + 4\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u (\operatorname{cn} u \operatorname{zn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u)](\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u + \operatorname{cn}^4 u) \operatorname{cn}^2 u\} \quad (4.15)$$

При помощи канонической замены переменных $q_2^*, p_2^*, r_1^*, w \rightarrow \xi_2, \eta_2, \eta_1, \xi_1$ в гамильтониане (4.14) можно [6] нормализовать члены четвертой степени, и он примет вид

$$\Gamma = \eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2^2 + h_{40}\xi_2^4 + h_{20}\xi_2^2\eta_1 + h_{00}\eta_1^2 + O_6$$

где через O_6 обозначена 2π – периодическая по ξ_1 совокупность членов выше пятой степени относительно $\xi_2, \eta_2, |\eta_1|^{1/2}$. Коэффициенты h_{ij} – постоянные величины, причем $h_{40} = \langle g_{40} \rangle$, где $\langle g_{40} \rangle$ – среднее значение функции (4.15) на ее периоде 2π по w .

Исследуемое периодическое движение орбитально устойчиво, если знаки коэффициента h_{40} и коэффициента при η_2^2 в нормализованном гамильтониане одинаковы, и неустойчиво, если эти знаки противоположны [6].

Используя тождества, связывающие эллиптические функции [3], свойства их четности и нечетности и применяя интегрирование по частям, выражение для коэффициента h_{40} можно представить в следующем виде:

$$h_{40} = \frac{K(2E - K)^2}{24\pi^3} (9\langle \operatorname{sn}^2 u \rangle - 4\langle \operatorname{sn}^6 u \rangle - 27\langle \operatorname{sn}^{10} u \rangle)$$

где $\langle \operatorname{sn}^m u \rangle$ – среднее по u значение функции $\operatorname{sn}^m u$ на ее периоде.

Но при $k_1 = \sqrt{2}/2$ имеем $K = 1.85407$, $E = 1.35064$, а

$$\langle \operatorname{cn}^2 u \rangle = 0.45695, \quad \langle \operatorname{cn}^6 u \rangle = 0.27417, \quad \langle \operatorname{cn}^{10} u \rangle = 0.21324$$

Поэтому $h_{40} = -0,0049 < 0$, и следовательно, колебания с амплитудой, равной $\pi/2$, орбитально устойчивы.

Тем самым доказательство теоремы 1 об устойчивости плоских колебаний и вращений волчка Ковалевской вокруг оси динамической симметрии завершено.

Замечание. В случае Ковалевской существуют также плоские колебания и вращения тела вокруг оси Oy , лежащей в экваториальной плоскости эллипсоида инерции для неподвижной точки O . При этом ось Oy занимает неизменное горизонтальное положение, а ось Ox , на которой лежит центр тяжести тела и ось динамической симметрии Oz движутся в фиксированной вертикальной плоскости, проходящей через точку O . Исследование показало, что выводы об устойчивости этих движений совершенно аналогичны выводам, которые получены выше при анализе устойчивости колебаний и вращений вокруг оси динамической симметрии: вращения и колебания с амплитудой, превышающей $\pi/2$, орбитально неустойчивы, а колебания с амплитудой, не большей, чем $\pi/2$, орбитально устойчивы. Отметим, что устойчивость колебаний с амплитудой, меньшей $\pi/2$, была доказана ранее [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00405).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 569 с.
2. Сулов Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
3. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
5. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
6. Маркеев А.П. Исследование устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы в одном критическом случае // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 833–847.
7. Иртегов В.Д. Об устойчивости маятниковых колебаний гироскопа С.В. Ковалевской // Тр. Казан. авиац. ин-та. Математика и механика. 1968. Вып. 97. С. 38–40.

Москва

Поступила в редакцию
20.VI.2000