

УДК 531.381, 531.395

© 2001 г. В.Ю. Ольшанский

КВАДРАТИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРИВОДИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Рассматривается механическая система, состоящая из неизменяемого твердого тела (носителя) и подсистемы, конфигурация и состав которой могут изменяться со временем (движение ее элементов относительно носителя задано). Система движется в центральном поле сил на расстоянии от его центра, значительно превосходящем размеры системы. Влияние движения системы относительно центра масс на движение центра масс, которое считается известным, не учитывается (аналог ограниченной задачи [1] для твердого тела). Для случая отсутствия динамической симметрии получены необходимые и достаточные условия существования квадратичного интеграла (КИ) движения вокруг центра масс. Показано, что для существования КИ необходимо, чтобы траектория движения центра масс находилась на поверхности некоторого фиксированного в инерциальном пространстве кругового конуса с вершиной в центре силового поля. Если траектория не лежит на образующей конуса, то может существовать только один нетривиальный КИ и исходная система при наличии этого КИ приводится к автономному виду. При движении центра масс по образующей или движении системы вокруг неподвижного центра масс получены необходимые и достаточные условия существования нетривиального КИ, найдены условия, при которых этот интеграл распадается на три независимых интеграла, являющихся обобщениями интеграла энергии, интеграла де Бруна [2] и интеграла проекции кинетического момента. При существовании трех нетривиальных КИ указаны условия приводимости к автономной системе, описывающей вращение твердого тела вокруг центра масс и интегрируемой в квадратурах [3, 4].

1. Уравнения движения. Пусть E_0 – инерциальная система отсчета (СО) с началом в центре O силового поля, E_1 – орбитальная СО с началом в центре масс C механической системы, E_2 – СО, связанная с носителем, E_3 – главная СО с началом в точке C и осями, совпадающими с главными центральными осями инерции системы.

Выберем ортобазис $\{g_i\}$ СО E_1 следующим образом: $g_3 = r^0$, $r = OC$, $g_2 = (r \times (r)_0^0)^0$, $g_1 = g_2 \times g_3$. Здесь $(\cdot)_i^0$ – производная по времени в СО E_i , a^0 – орт вектора a . Для производных ортов g_i в СО E_0 можно получить формулы

$$(g_i)_0^0 = \Omega \times g_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \Omega = k_2 g_2 + k_3 g_3 \quad (1.1)$$

Здесь

$$k_2 = |r \times (r)_0^0| r^{-2}, \quad k_3 = \langle r, (r)_0^0, (r)_0^{00} \rangle |r \times (r)_0^0|^{-2} r \quad (1.2)$$

Можно также, обозначив $\gamma = g_3$, v – скорость центра масс, записать

$$k_2 = v |\gamma \times d\gamma / ds|, \quad k_3 = v |\gamma \times d\gamma / ds|^{-2} \langle \gamma, d\gamma / ds, d^2 \gamma / ds^2 \rangle \quad (1.3)$$

В сформулированной ограниченной задаче функция $\mathbf{r}(t)$ задана в СО E_0 , следовательно, и функции $k_2(t)$, $k_3(t)$ являются заданными. Положение СО E_1 относительно E_0 тоже известно в каждый момент времени.

Известны [5] уравнения вращательного движения носителя системы переменного состава. Другая, предложенная автором [6, 7], форма этих уравнений имеет вид

$$(\mathbf{y})_2^\bullet = \mathbf{y} \times \mathbf{x}_{20} + \Lambda \mathbf{x}_{20} + \mathbf{L}, \quad \mathbf{y} = J \mathbf{x}_{20} + \mathbf{G}_2 \quad (1.4)$$

Здесь J – оператор инерции системы в ее центре масс, $\mathbf{x}_{ij}$ – угловая скорость СО E_i относительно E_j ; $\mathbf{L} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_2^f + (\mathbf{G}_2)_2^\bullet$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^e + \mathbf{M}_r + \mathbf{M}^*$; $\mathbf{M}^e$ и $\mathbf{M}_r$ – главные моменты (относительно С) внешних и реактивных сил, $\mathbf{M}^*$ – некоторый заданный в E_2 управляющий момент,

$$\mathbf{G}_i = \sum m_n \mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n)_i^\bullet, \quad \mathbf{M}_i^f = -\sum m_n \mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n)_i^{\bullet\bullet} \quad (1.5)$$

Суммирование выполняется по всем элементам системы, m_n – масса материальной точки M_n , $\mathbf{r}_n = \mathbf{C}M_n$. Симметрический оператор Λ задается тождеством

$$\Lambda \mathbf{x} \equiv J^\bullet \mathbf{x} - \sum m_n [\mathbf{r}_n^\bullet \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}_n) + \mathbf{r}_n \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}_n^\bullet)]$$

Справедливы равенства [7]

$$J \mathbf{x}_{ij} = \mathbf{G}_j - \mathbf{G}_i, \quad \Lambda \mathbf{x}_{ij} = \mathbf{M}_j^f - \mathbf{M}_i^f + (\mathbf{G}_j)_j^\bullet - (\mathbf{G}_i)_i^\bullet \quad (1.6)$$

В случае, когда размеры системы значительно меньше расстояния от ее центра масс до центра O поля с потенциалом $U(r)$, главный момент внешних сил равен

$$\mathbf{M}^e = p \boldsymbol{\gamma} \times J \boldsymbol{\gamma}, \quad p = -r(r^{-1} U'(r))' \quad (1.7)$$

Система (1.4) в этом случае при учете свойств (1.6) может быть записана в виде

$$\mathbf{y}^\bullet = \mathbf{y} \times \mathbf{x} + \Lambda \mathbf{x} + p \boldsymbol{\gamma} \times J \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{N}, \quad \mathbf{y} = J \mathbf{x} + \mathbf{K} \quad (1.8)$$

$$(\cdot)^\bullet = (\cdot)_3^\bullet, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_{30}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{G}_3, \quad \mathbf{N} = \mathbf{M}_3^f + \mathbf{K}^\bullet + \mathbf{M}_r + \mathbf{M}^*$$

Для ньютоновского поля тяготения $p = 3\mu r^{-3}$.

Учитывая формулы (1.1), дополним систему уравнениями Пуассона

$$\mathbf{g}_i^\bullet = \mathbf{g}_i \times (\mathbf{x} - \boldsymbol{\Omega}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.9)$$

Систему уравнений (1.8), (1.9) в случае отсутствия динамической симметрии будем называть основной динамической системой (ОДС).

2. Основные результаты. Уравнения (1.9) имеют шесть тривиальных интегралов

$$g_i^2 = \text{const}, \quad (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j) = \text{const}$$

Известно [1], что в случае движения гиростата в ньютоновском поле по круговой орбите ОДС имеет квадратичный интеграл (интеграл (2.2) при постоянных r , k_2 , $p = 3\mu r^{-3}$ и $k_3 \equiv 0$), а движение твердого тела вокруг закрепленного центра масс обладает тремя нетривиальными квадратичными интегралами (КИ): интегралом энергии, интегралом проекции кинетического момента и интегралом де Бруна [2] (интегралы (2.28) – (2.30) при $p = 3\mu r^{-3}$ и $r = \text{const}$).

Произвольный квадратичный интеграл ОДС можно записать в виде

$$(\mathbf{y}, F\mathbf{y}) + \sum_{i=1}^3 [(\mathbf{g}_i, P_i \mathbf{g}_i) + (Q_i \mathbf{y}, \mathbf{g}_i) + (\mathbf{n}_i, \mathbf{g}_i)] + (\mathbf{m}, \mathbf{y}) + h(t) + \\ + (R_1 \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) + (R_2 \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_1) + (R_3 \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = \text{const} \quad (2.1)$$

Ниже решается задача получения условий существования нетривиальных КИ и нахождения явного вида симметричных операторов F , P_i , операторов Q_i , R_i , параметров n_i , m , h . Перечисленные здесь операторы и параметры считаем дифференцируемыми функциями времени.

Отдельно рассмотрены случаи $k_2 \equiv 0$, соответствующий покою центра масс в СО E_0 , либо его движению по фиксированной в E_0 прямой, проходящей через центр поля, и случай $k_2 \neq 0$.

Теорема 1. Для существования нетривиального квадратичного интеграла ОДС в случае $k_2 \neq 0$ необходимо и достаточно выполнения условий:

1) центр масс системы движется по поверхности произвольного неподвижного в инерциальном пространстве кругового конуса с вершиной в центре силового поля;

2) скорость v центра масс изменяется по закону

$$v = c_2 |p|^{1/2} r^2 |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/ds|^{-1}, \quad c_2 = \text{const}$$

3) оператор инерции системы подобно изменяется, $J = \eta J_0$;

4) $\Lambda = (\ln \zeta)^* J$, $\zeta = k_2 \eta$;

5) $\mathbf{N} = \mathbf{K}^*$;

6) $\mathbf{K} = \zeta \mathbf{K}_0$.

Здесь J_0 , $\mathbf{K}_0$ – некоторые постоянные в главной СО оператор и вектор. Интеграл при этом записывается в виде

$$p^{-1}[(\mathbf{x}, J_0 \mathbf{x}) + p(\gamma, J_0 \gamma) - 2(J_0 \mathbf{x} + k_2 \mathbf{K}_0, \boldsymbol{\Omega})] = \text{const} \quad (2.2)$$

или, в эквивалентной форме,

$$p^{-1}[(\mathbf{x}_{31}, J_0 \mathbf{x}_{31}) + p(\gamma, J_0 \gamma) - (\boldsymbol{\Omega}, J_0 \boldsymbol{\Omega}) - 2k_2(\mathbf{K}_0, \boldsymbol{\Omega})] = \text{const} \quad (2.3)$$

Условие 1 выполнено, в частности, для любой траектории в плоскости, содержащей центр силового поля.

Отметим, что при движении центра масс C системы по поверхности указанного в условии 1 конуса выбранная выше орбитальная СО E_1 имеет следующую ориентацию: орт $\mathbf{g}_1$ направлен по касательной к круговому сечению конуса, проходящему через точку C , орт $\mathbf{g}_2$ направлен по нормали к поверхности конуса и орт $\mathbf{g}_3$ – по образующей конуса.

При свободном движении материальной точки в центральном поле по кеплеровой орбите со скоростью v_k имеем $v_k |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/ds| = \text{const}$ и условие 2 для скорости v управляемого движения центра масс можно записать в виде

$$v = \text{const} |p|^{1/2} r^2 v_k$$

При выполнении условий теоремы 1 система приводится к следующему автономному виду:

$$J_0 d\mathbf{u}/d\tau = (J_0 \mathbf{u} + \mathbf{K}_0) \times \mathbf{u} + c_3 \mathbf{g}_3 \times J_0 \mathbf{g}_3 \quad (2.4)$$

$$d\mathbf{g}_i/d\tau = \mathbf{g}_i \times (\mathbf{u} - \mathbf{g}_2 - c_1 \mathbf{g}_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

Здесь дифференцирование – в СО E_3 , $c_3 = (c_2)^{-2}$ и

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}/k_2, \quad d\tau = k_2 dt = |\mathbf{r}^0 \times d\mathbf{r}^0| \quad (2.6)$$

Непосредственно проверяется, что интегралом системы (2.4), (2.5) является следующий, совпадающий с интегралом (2.2) (предложение 32), интеграл:

$$(\mathbf{u}, J_0 \mathbf{u}) + c_3(\mathbf{g}_3, J_0 \mathbf{g}_3) - 2(J_0 \mathbf{u} + \mathbf{K}_0, \mathbf{g}_2 + c_1 \mathbf{g}_3) = \text{const} \quad (2.7)$$

Из теоремы 1 следует, что в частном случае движения системы постоянного состава ($\Lambda \equiv 0$) в ньютоновском поле ($p = 3\mu r^{-3}$) для существования КИ при $k_2 \neq 0$ необходимо и достаточно выполнения условия 1 теоремы 1 и условий

$$J = k_2^{-1} J_0, \quad N = 0, \quad K = K_0, \quad v = c_2 r^{1/2} |r \times dr / ds|^{-1}$$

Теорема 2. Если при $k_2 \equiv 0$ существует нетривиальный квадратичный интеграл ОДС, то он может быть представлен в форме

$$(Jx, FJx) + (\gamma, P_3 \gamma) + v(Jx + K, \gamma) = \text{const} \quad (2.8)$$

Собственные значения ϕ_i, p_{3i} операторов F, P_3 имеют вид

$$\phi_i = (pa_i)^{-1} \sigma_i, \quad a_i = A_i \Delta A_i \quad (2.9)$$

$$p_{3i} = -\frac{1}{3} \Delta \sigma_i \quad (2.10)$$

и постоянные σ_i связаны условием

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (2.11)$$

Для существования интеграла необходимо и достаточно выполнения условий

$$v\Lambda + v^* J = 0 \quad (2.12)$$

$$vN + v^* K = 0 \quad (2.13)$$

$$\lambda_{ij}(\sigma_i \Delta A_j + \sigma_j \Delta A_i) = K^{(k)}(\sigma_i \Delta A_j - \sigma_j \Delta A_i) \delta_{ijk} \quad (i, j, k) \quad (2.14)$$

$$\sigma_i(N - K^*)^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

$$\sigma_i[(\ln pa_i)^* - 2\lambda_{ii} A_i^{-1}] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.16)$$

Здесь и далее

$$\Delta A_i = (A_j - A_k) \delta_{ijk}, \quad (m)^{(i)} = (m, e_i)$$

Отметим, что для КИ в полной форме (все $\sigma_i \neq 0$) условие (2.15) принимает тот же вид, что и в задаче о движении системы вокруг неподвижной точки носителя в однородном поле тяжести [8] и в задаче о свободном движении [7], $N = K^*$. Это условие можно записать в форме

$$M_3^f + M_r + M^* = 0$$

Ниже показано (предложение 21), что интеграл (2.8) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} & \psi_1[x, Jx] + p(\gamma, J\gamma) + \psi_2[(Jx)^2 - pA_1 A_2 A_3 (\gamma, J^{-1} \gamma)] + \\ & + v(Jx + K, \gamma) = \text{const} \end{aligned} \quad (2.17)$$

При определенных условиях этот интеграл распадается на три нетривиальных квадратичных интеграла, являющихся обобщениями интеграла энергии, интеграла де Бруна и интеграла проекции кинетического момента.

При существовании интеграла проекции кинетического момента система приводится (предложение 28) к виду

$$v^* = v \times x + p\gamma \times J'\gamma, \quad \gamma^* = \gamma \times x, \quad v = J'x + K' \quad (2.18)$$

Теорема 3. Если при $k_2 \equiv 0$ существуют три независимых нетривиальных квад-

ратичных интеграла ОДС, то они могут быть записаны в виде

$$v^2(Jx, J_0^{-1}Jx) + (\gamma, J_0\gamma) = \text{const} \quad (2.19)$$

$$(vJx)^2 - A_{10}A_{20}A_{30}(\gamma, J_0^{-1}\gamma) = \text{const} \quad (2.20)$$

$$v(Jx, \gamma) = \text{const} \quad (2.21)$$

Для существования этих интегралов необходимо и достаточно выполнения условий

$$\Lambda = -(\ln v)^* J, \quad K = 0, \quad N = 0, \quad pv^2 a_i = a_{i0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.22)$$

При выполнении условий данной теоремы или, что то же самое, при наличии трех нетривиальных КИ система может быть приведена к виду

$$J_0 \frac{dw}{d\tau} = (J_0 w) \times w + \lambda J^{-1} J_0 (\gamma \times J_0 \gamma), \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \lambda \gamma \times J^{-1} J_0 w \quad (2.23)$$

где дифференцирование – в СО E_3 и

$$w = vJ_0^{-1}Jx, \quad d\tau = \frac{dt}{\lambda v}, \quad \lambda = pv^2 \frac{A_1 A_2 A_3}{A_{10} A_{20} A_{30}} \quad (2.24)$$

В случае, когда $J = \lambda J_0$, отсюда получаем известную, интегрируемую в квадратурах [3, 4] автономную систему, описывающую вращение твердого тела вокруг неподвижного центра масс.

Теорема 4. ОДС в случае $k_2 \equiv 0$ при выполнении условий $K = 0$, $N = 0$ и условий

$$J = (pv^2)^{-1/2} J_0, \quad \Lambda = -(pv^2)^{-1/2} (\ln v)^* J_0 \quad (2.25)$$

приводима к автономной системе

$$J_0 \frac{dz}{d\tau} = (J_0 z) \times z + \gamma \times J_0 \gamma, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma \times z \quad (2.26)$$

$$z = p^{-1/2} x, \quad d\tau = p^{1/2} dt \quad (2.27)$$

При выполнении условий теоремы 4 интегралы (2.19) – (2.21) могут быть записаны в виде

$$p^{-1}(J_0 x, x) + (\gamma, J_0 \gamma) = \text{const} \quad (2.28)$$

$$p^{-1}(J_0 x)^2 - A_{10}A_{20}A_{30}(\gamma, J_0^{-1}\gamma) = \text{const} \quad (2.29)$$

$$p^{-1/2}(J_0 x, \gamma) = \text{const} \quad (2.30)$$

3. Доказательство теоремы 1.

Предложение 1. Операторы P_1, P_2 пропорциональны тождественному оператору E .

Доказательство. Дифференцируя интеграл (2.1) в силу ОДС, получим тождество, которое назовем основным (оно не выписано из-за громоздкости). Выделив в этом тождестве члены с $g_1^2 x$, получим тождество $\langle P_1 g_1, g_1, x \rangle \equiv 0$, которое выполнено только при $P_1 = \varphi(t)E$. Равенство нулю слагаемых с $g_2^2 x$ приводит к условию $P_2 = \nu(t)E$.

Предложение 2. Операторы R_i ($i = 1, 2, 3$) пропорциональны тождественному оператору.

Доказательство. Выделив в основном тождестве члены с $g_1 g_2 x$ (учитывая, что $g_1 \times g_2 = g_3$), получим тождество $(B^* - \text{оператор, сопряженный } B)$

$$(R_3^* g_2) \times g_1 + (R_3 g_1) \times g_2 \equiv 0$$

Это тождество выполнено, только если $R_3 = kE$. Аналогично получаются подобные представления для операторов R_1, R_2 .

Предложение 3. Операторы Q_i имеют вид

$$Q_1 = 0, \quad Q_i = v_i E, \quad i = 2, 3$$

Доказательство. Следующее тождество получается из основного при выделении членов с $x^2 g_1$:

$$\langle Q_1^* g_1, Jx, x \rangle + \langle Q_1 Jx, g_1, x \rangle \equiv 0$$

что эквивалентно тождеству

$$Q_1(Jx \times x) + x \times Q_1 Jx \equiv 0$$

которое выполнено, только если $Q_1 = v_1 E$. Равенство нулю в основном тождестве слагаемых с $x^2 g_2$ и $x^2 g_3$ приводит к условиям $Q_i = v_i E$ ($i = 2, 3$). Если теперь в основном тождестве выделить члены с $g_2 g_3$, то получим тождество

$$p v_1 g_2 \times Jg_3 \equiv 0$$

которое при $p \neq 0$ выполнено, только если $v_1 \equiv 0$.

Отметим, что при наличии тривиальных интегралов слагаемые $(g_1, P_1 g_1), (g_2, P_2 g_2)$ в интеграле (2.1) равны в силу предложения 1 $\varphi(t)$ и $v(t)$ соответственно и они могут быть включены в слагаемое $h(t)$. Слагаемые вида $(R_i g_j, g_k)$ равны нулю в силу предложения 2.

Интеграл (2.1) и основное тождество можно теперь записать в виде

$$(y, Fy) + (g_3, P_3 g_3) + (y, v_2 g_2 + v_3 g_3) + \sum_{i=1}^3 (n_i, g_i) + (m, y) + h = \text{const} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & (2Fy + m, y \times x + \Lambda x + p g_3 \times Jg_3 + N) + p v_2 (g_1, Jg_3) + \\ & + \langle 2P_3 g_3 + n_3, g_3, x \rangle + (v_2 g_2 + v_3 g_3, \Lambda x + N) + \\ & + k_2 (2P_3 g_3 + n_3, g_1) + \langle n_2, g_2, x \rangle - k_3 (n_2, g_1) - \langle n_1, g_1, x \rangle - \\ & - k_2 (n_1, g_3) + k_3 (n_1, g_2) + (v_3 k_2 - v_2 k_3)(y, g_1) + (y, F^* y) + \\ & + (g_3, P_3^* g_3) + (y, v_2^* g_2 + v_3^* g_3) + \sum_{i=1}^3 (n_i^*, g_i) + (m^*, y) + h^* \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Предложение 4. Оператор F можно представить в виде

$$F = \psi_1 J^{-1} + \psi_2 E \quad (3.3)$$

Доказательство. Выделив из тождества (3.2) слагаемые с x^3 , получим тождество

$$\langle FJx, Jx, x \rangle \equiv 0$$

которое при неравных между собой собственных значениях A_i оператора J выполнено тогда и только тогда, когда оператор F имеет вид (3.3).

Предложение 5. Оператор P_3 можно представить в виде

$$P_3 = p(\psi_1 J - \psi_2 A_1 A_2 A_3 J^{-1}) \quad (3.4)$$

Доказательство. Группируя в тождестве (3.2) слагаемые с $x g_3^2$, получим тождество

$$p \langle FJx, g_3, Jg_3 \rangle + \langle P_3 g_3, g_3, x \rangle \equiv 0$$

которое можно записать в эквивалентной форме

$$pJF(\mathbf{g}_3 \times J\mathbf{g}_3) \equiv \mathbf{g}_3 \times P_3\mathbf{g}_3 \quad (3.5)$$

Полагая $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_i$, получим $(P_3\mathbf{e}_i) \times \mathbf{e}_i = 0$, и тогда $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) – собственные векторы оператора P_3 . Тожество (3.5), учитывая предложение 4, перепишем в виде

$$p[\psi_1\mathbf{g}_3 \times J\mathbf{g}_3 + \psi_2(J^2\mathbf{g}_3) \times \mathbf{g}_3 + \psi_2 \operatorname{tr} J(\mathbf{g}_3 \times J\mathbf{g}_3)] \equiv \mathbf{g}_3 \times P_3\mathbf{g}_3 \quad (3.6)$$

Здесь использовано равенство

$$D(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (D^*\mathbf{b}) \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times D^*\mathbf{a} + \operatorname{tr} D(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Тожество (3.6) выполнено, только если оператор P_3 имеет вид

$$P_3 = p(\psi_1 J - \psi_2 J^2 + \psi_2 J \operatorname{tr} J) + kE$$

Так как

$$J^2 - J \operatorname{tr} J = A_1 A_2 A_3 J^{-1} - (A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3)E \quad (3.7)$$

то для оператора P_3 получаем представление (3.4). Слагаемое kE дает функцию $k(t)$, которая может быть включена в слагаемое $h(t)$ в интеграле (2.1).

Предложение 6. Параметр $\mathbf{m}$ имеет вид

$$\mathbf{m} = -2F\mathbf{K} \quad (3.8)$$

Предложение 7. Оператор P_3 постоянен в СО E_3 .

Доказательство. Учитывая, что $\mathbf{y} = J\mathbf{x} + \mathbf{K}$, соберем в тождестве (3.2) члены с g_3^2 :

$$p\langle 2F\mathbf{K} + \mathbf{m}, \mathbf{g}_3, J\mathbf{g}_3 \rangle + (\mathbf{g}_3, P_3^* \mathbf{g}_3) \equiv 0$$

Из предложения 5 следует, что собственными векторами оператора P_3 являются $\mathbf{e}_i$. Подставив в последнее тождество $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_i$, получим $(\mathbf{e}_i, P_3^* \mathbf{e}_i) = 0$ ($i = 1, 2, 3$), откуда следует предложение 7. Рассматриваемое тождество примет вид

$$\langle 2F\mathbf{K} + \mathbf{m}, \mathbf{g}_3, J\mathbf{g}_3 \rangle \equiv 0$$

что возможно при попарно различных A_i , только если $2F\mathbf{K} + \mathbf{m} = 0$.

Предложение 8. Справедливо следующее представление

$$(\mathbf{y}, F\mathbf{y}) + (\mathbf{m}, \mathbf{y}) + h(t) = (J\mathbf{x}, FJ\mathbf{x}) + \operatorname{const} \quad (3.9)$$

Доказательство. Выделим в тождестве (3.2), учитывая предложение 6, слагаемые, не содержащие $\mathbf{x}, \mathbf{g}_i$:

$$(\mathbf{K}, F^* \mathbf{K}) + (\mathbf{m}^*, \mathbf{K}) + h^* \equiv 0$$

Отсюда

$$h^* = -(\mathbf{K}, F^* \mathbf{K}) + 2((F\mathbf{K})^*, \mathbf{K}) = (\mathbf{K}, F\mathbf{K})^* \text{ и } h = (\mathbf{K}, F\mathbf{K}) + \operatorname{const}$$

Левую часть равенства (3.9) можно теперь записать в виде

$$(J\mathbf{x} + \mathbf{K}, FJ\mathbf{x} + F\mathbf{K}) - 2(F\mathbf{K}, J\mathbf{x} + \mathbf{K}) + (\mathbf{K}, F\mathbf{K}) + \operatorname{const}$$

что совпадает с правой частью этого равенства.

Предложение 9. Для существования интеграла (2.1) необходимо выполнение условий

$$v_2 = -2k_2\psi_1 \quad (3.10)$$

$$k_2\psi_2 = 0 \quad (3.11)$$

Доказательство. Выделив в тождестве (3.2) члены с $g_1 g_3$, получим

$$p v_2 (g_1, J g_3) + 2 k_2 (P_3 g_3, g_1) \equiv 0$$

Это тождество выполнено, только если $p v_2 J + 2 k_2 P_3 = 0$. Учитывая предложение 5, получим условие

$$v_2 J + 2 k_2 (\psi_1 J - \psi_2 A_1 A_2 A_3 J^{-1}) = 0$$

Так как все собственные значения оператора J различны, то это равенство возможно только при выполнении условий (3.10), (3.11).

Предложение 10. При $k_2 \neq 0$ операторы F, P_3 имеют вид

$$F = \psi_1 J^{-1}, \quad P_3 = p \psi_1 J \quad (3.12)$$

Доказательство следует из предложений 4, 5, 9.

Предложение 11. Для существования интеграла (2.1) необходимо выполнение условий

$$n_1 = 0 \quad (3.13)$$

$$k_3 v_2 = k_2 v_3 \quad (3.14)$$

Доказательство. Выделив в тождестве (3.2) члены с $g_1 x$, получим тождество

$$\langle n_1, g_1, x \rangle + (k_2 v_3 - k_3 v_2) (J x, g_1) \equiv 0$$

которое выполнено только при условиях (3.13), (3.14).

Предложение 12. Для существования интеграла (2.1) необходимо выполнение условий (для $i = 2, 3$)

$$n_i = 0 \quad (3.15)$$

$$v_i \Lambda + v_i^* J = 0 \quad (3.16)$$

Доказательство. Группируя в тождестве (3.2) члены с $g_2 x, g_3 x$, получим тождества

$$v_i (g_i, \Lambda x) + \langle n_i, g_i, x \rangle + v_i^* (J x, g_i) \equiv 0, \quad i = 2, 3$$

Эти тождества эквивалентны следующим:

$$v_i \Lambda x + v_i^* J x + x \times n_i \equiv 0$$

Так как операторы Λ, J – симметрические, то последние тождества выполнены только при условиях (3.15), (3.16).

Предложение 13. При $k_2 \neq 0$ справедливо представление

$$v_i = -2 k_i \psi_1, \quad i = 2, 3$$

Доказательство следует из условий (3.10), (3.14).

Предложение 14. Для существования интеграла (2.1) необходимо выполнение условия 4 теоремы 1 и условия

$$k_3 = c_1 k_2 \quad (3.17)$$

Доказательство. Из условий (3.16) и предложения 13 следует, что $(k_3/k_2)^* J = 0$, откуда получаем условие (3.17). При выполнении этого условия два условия (3.16) эквивалентны условию 4 теоремы 1, где

$$\eta = (k_2^2 \psi_1)^{-1} \quad (3.18)$$

Предложение 15. Условие (3.17) выполнено тогда и только тогда, когда угловая скорость орбитальной СО имеет вид

$$\Omega = k_2 \sin^{-1} \alpha e \quad (3.19)$$

где e – орт произвольного фиксированного в СО E_0 и E_1 направления. При выполнении данного условия центр масс перемещается по поверхности неподвижного в инерциальном пространстве прямого кругового конуса с вершиной в центре силового поля и углом α между образующей и осью конуса, направление которой задано ортом e .

Доказательство. Пусть $k_3 = c_1 k_2$ и $k_2 \neq 0$. Тогда, учитывая формулы (1.1), получим

$$(\Omega/k_2)_0^\bullet = (g_2 + c_1 g_3)_0^\bullet = \Omega \times (g_2 + c_1 g_3) = \Omega \times (\Omega/k_2) \equiv 0$$

Следовательно, при выполнении условия (3.17) можно записать

$$\Omega = k_2 a, \quad (a)_0^\bullet = 0 \quad (3.20)$$

Таким образом, угловая скорость Ω сохраняет свое направление в E_0 , но тогда она имеет постоянное направление и в E_1 . Орбитальная СО, смещаясь вместе с центром масс системы, вращается вокруг фиксированного направления a .

Умножив скалярно равенство (1.1) для $g_3 = \gamma$ на a , получим $(a, \gamma)^\bullet = 0$, следовательно, угол между γ и a постоянен и траектория центра масс лежит на конусе с вершиной в центре поля.

Обозначим $(a, \gamma) = a \cos \alpha = c$ и преобразуем условие (3.17). В силу формул (1.2) получим

$$k_2 = |\gamma \times (\gamma)_0^\bullet| = k_2 |\gamma \times (a \times \gamma)| = k_2 |a - c\gamma| = k_2 a \sin \alpha$$

Отсюда следует, что постоянные a и α связаны условием

$$a \sin \alpha = 1 \quad (3.21)$$

которое и позволяет представить угловую скорость Ω в виде (3.19). Далее,

$$k_3 = k_2^{-2} \langle \gamma, (\gamma)_0^\bullet, (\gamma)_0^{\bullet\bullet} \rangle = k_2 \langle \gamma, a \times \gamma, a \times (a \times \gamma) \rangle = k_2 (a - c\gamma, ca) = ck_2 (a^2 - c^2) = ck_2 a^2 \sin^2 \alpha$$

и, при учете связи (3.21), получаем $k_3 = c_1 k_2$. Следовательно, при выполнении условия (3.19) функции k_3, k_2 пропорциональны, причем $c_1 = c$.

С учетом доказанных предложений тождество (3.2) можно записать в виде

$$2\psi_1(x, \Lambda x + N) + (v_2 g_2 + v_3 g_3, N) + (Jx, (\psi_1 J^{-1})^\bullet Jx) + 2(K, (\psi_1 J^{-1})^\bullet Jx) + \\ + (v_2^\bullet g_2 + v_3^\bullet g_3, K) - 2((\psi_1 J^{-1} K)^\bullet, Jx) \equiv 0 \quad (3.22)$$

Предложение 16. Для существования интеграла (2.1) необходимо выполнение условия 5 теоремы 1.

Доказательство. Выделив из тождества (3.22) слагаемые с x , получим условие

$$\psi_1 N + (\psi_1 J^{-1})^\bullet JK - J(\psi_1 J^{-1} K)^\bullet = 0$$

которое приводится к виду $\psi_1(N - K^\bullet) = 0$. Отсюда получаем условие 5, так как случай $\psi_1 = 0$ при $k_2 \neq 0$ исключен. Действительно, при $\psi_1 = 0$ из предложений 3, 9–11 следует $F = P_3 = v_2 = v_3 = 0$, и КИ (3.1) не существует.

Предложение 17. Для существования интеграла (2.1) необходимо выполнение условия 6 теоремы 1.

Доказательство. Выделив из тождества (3.22) члены с g_2, g_3 , получим условия

$$v_i N + v_i^\bullet K = 0, \quad i = 2, 3$$

которые в силу предложения 16 записываются в виде $(v_i K)^* = 0$. Учитывая предложение 13 и формулы (3.17), (3.18), оба эти условия запишем в виде $((k_2 \eta)^{-1} K^*) = 0$, откуда следует необходимость условия 6.

Предложение 18. Для существования интеграла (2.1) необходимо выполнение условия 3 теоремы 1.

Доказательство. Выделив из тождества (3.22) слагаемые с x^2 , получим условие

$$2\psi_1 \Lambda + (\psi_1 J^{-1})^* J^2 = 0$$

Подставив сюда выражение Λ из условия 4, получим $(\eta^{-1} J)^* = 0$, откуда следует необходимость условия 3.

Предложение 19. Интеграл (2.1) существует, только если скорость центра масс системы удовлетворяет условию 2 теоремы 1.

Доказательство. В соответствии с предложениями 7, 10

$$(p\psi_1 J)^* = 0$$

Учитывая условие 3, где параметр η задан формулой (3.18), получим связь $pk_2^{-2} = \text{const}$, откуда и следует условие 2.

Предложение 20. Если интеграл (2.1) существует, то он может быть записан в форме (2.2) или (2.3).

Доказательство. Интеграл (2.1) приводится к виду (3.1), откуда, учитывая предложения 8, 10–13 и представление (1.1) для абсолютной угловой скорости Ω орбитальной системы, получим следующую форму записи интеграла:

$$\psi_1[(x, Jx) + p(\gamma, J\gamma) - 2(Jx + K, \Omega)] = \text{const} \quad (3.23)$$

Учитывая связь $x = x_{31} + \Omega$, этот интеграл запишем в виде

$$\psi_1[(x_{31}, Jx_{31}) + p(\gamma, J\gamma) - (\Omega, J\Omega) - 2(K, \Omega)] = \text{const} \quad (3.24)$$

К формам записи (2.2), (2.3) перейдем, если учтем условия, 3, 6 теоремы 1, выражение (3.18) и отмеченную в доказательстве предложения 18 связь $pk_2^{-2} = \text{const}$.

Выше показано, что условия 1–6 необходимы для существования нетривиального интеграла (2.1). Совокупность этих условий достаточна для существования интеграла, так как при их выполнении справедливо основное тождество. Достаточность указанных условий следует и из существования интеграла (2.7) у системы (2.4), (2.5), к которой приводится (предложение 32) исходная система при наличии нетривиального КИ. Теорема 1 доказана полностью.

4. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим теперь случай $k_2 \equiv 0$.

Предложение 21. Для существования нетривиального КИ в случае $k_2 \equiv 0$ необходимо, чтобы операторы F, P_3 имели вид (3.3), (3.4), выполнялось условие $P_3^* = 0$ и условие (3.16) (для $i = 3$). Интеграл при этом записывается в виде (2.8) или в виде (2.17).

Доказательство. Предложения 1–9, 11, 12 сохраняются и при $k_2 \equiv 0$. Из условия (3.10) следует $v_2 = 0$, и условие (3.16) для $i = 2$ тождественно выполнено. Интеграл (2.1), учитывая предложение 8, запишем в виде (2.8), обозначив $v = v_3$. Если использовать представления (3.3), (3.4) для операторов F, P_3 , то интеграл запишем в виде (2.17).

Тождество (3.2) при выполнении названных в предложении 21 условий приводится к виду

$$2(FJx, K \times x + \Lambda x + N) + (Jx, F^*(Jx + 2K) + m^*) + (vN + v^*K, \gamma) \equiv 0 \quad (4.1)$$

Предложение 22. Оператор F можно записать в виде $F = F_1 F_2$, где собственными векторами операторов F_1, F_2 являются e_i ($i = 1, 2, 3$), собственные значения φ_{2i} оператора F_2 постоянны, а собственные значения φ_{1i} оператора F_1 заданы равенствами (здесь $\lambda_{ij} = (e_i, \Lambda e_j)$)

$$\varphi_{1i} = \exp(-2 \int_0^t A_i^{-1}(\xi) \lambda_{ii}(\xi) d\xi), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Доказательство. Выделив из тождества (4.1) члены с x^2 , получим тождество

$$(Jx, F^* Jx) + 2(FJx, \Lambda x) + 2\langle FJx, K, x \rangle \equiv 0 \quad (4.3)$$

Полагая здесь $x = e_i$, получим

$$\varphi_i^* + 2\varphi_i A_i^{-1} \lambda_{ii} = 0 \quad (4.4)$$

откуда следует, что $\varphi_i = \varphi_{1i} \varphi_{2i}$, где $\varphi_{2i} = \text{const}$, а φ_{1i} задается формулой (4.2).

Представим оператор Λ в виде $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, где Λ_1 — оператор с собственными векторами и значениями e_i, λ_{ii} ($i = 1, 2, 3$), тогда $(e_i, \Lambda_2 e_j) = \lambda_{ij}(1 - \delta_{ij})$.

Предложение 23. В случае существования нетривиального КИ при $k_2 \equiv 0$ должно выполняться условие

$$\lambda_{ij}(A_i \varphi_i + A_j \varphi_j) = K^{(k)}(A_i \varphi_i - A_j \varphi_j) \delta_{ijk} \quad (i, j, k) \quad (4.5)$$

Доказательство. Тождество (4.3) при учете предложения 22 принимает вид

$$(FJx, \Lambda_2 x) + \langle FJx, K, x \rangle \equiv 0$$

Это тождество эквивалентно системе условий (4.5), что можно проверить, раскладывая, например, x в главном базисе.

Предложение 24. Для существования нетривиального КИ при $k_2 \equiv 0$ должно выполняться условие

$$F_2(N - K^*) = 0 \quad (4.6)$$

и если оператор F_2 невырожденный, то

$$N = K^* \quad (4.7)$$

Доказательство. Выделение линейных по x слагаемых из тождества (4.1) приводит, с учетом предложения 6, к условию

$$FN + F^*K - (FK)^* = 0$$

или

$$F(N - K^*) = 0$$

Отсюда получаем условие (4.6), так как в соответствии с предложением 22 $F = F_1 F_2$, где F_1 — невырожденный оператор.

Предложение 25. Для существования КИ при $k_2 \equiv 0$ должно выполняться условие

$$vN + v^*K = 0 \quad (4.8)$$

и если оператор F_2 невырожденный, то

$$(\nu \mathbf{K})^* = 0 \quad (4.9)$$

Доказательство. Обращение в нуль слагаемых с γ в тождестве (4.1) приводит к условию (4.8). В силу предложения 24 для невырожденного оператора F_2 получаем условие (4.9).

Предложение 26. Собственные значения ϕ_i , p_i операторов F , P_3 в КИ при $k_2 \equiv 0$ могут быть представлены в виде (2.9), (2.10).

Доказательство. Из формулы (3.3) получим представление для собственных значений ϕ_i оператора F

$$\phi_i = A_i^{-1} \psi_1 + \psi_2, \quad i = 1, 2, 3$$

Условие совместности данной системы трех уравнений для ψ_1 , ψ_2 имеет вид

$$\phi_1 a_1 + \phi_2 a_2 + \phi_3 a_3 = 0 \quad (4.10)$$

Это условие эквивалентно представимости оператора F в виде (3.3).

Заменив векторное тождество (3.5) тремя скалярными, получим, что это тождество выполнено только при условиях

$$\Delta p_i = r \phi_i a_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.11)$$

Обозначим

$$\sigma_i = r \phi_i a_i$$

Из условия (4.10) следует, что σ_i связаны условием (2.11). В силу предложения $7p_i = \text{const}$ и тогда $\sigma_i = \text{const}$. Система линейных уравнений (4.11) относительно p_1 , p_2 , p_3 совместна при выполнении условия (4.10); множество ее решений записывается в виде

$$p_i = -\frac{1}{3} \Delta \sigma_i + \chi$$

Здесь $\chi = \text{const}$ (в силу постоянства p_i , σ_i) и это слагаемое в p_i можно опустить, так как оно дает в КИ постоянное слагаемое χg_3^2 .

Предложение 27. Для существования КИ при $k_2 \equiv 0$ должны выполняться условия (2.16).

Доказательство. Подставив представление ϕ_i (2.9) в связь (4.4), получим условие (2.16).

Отметим, что условия (2.14), (2.15) получаются из условий (4.5), (4.6) при использовании представления (2.9). Таким образом, необходимость перечисленных в теореме 2 условий и представимость интеграла в виде (2.8) или (2.17) доказаны. Достаточность совокупности этих условий следует из выполнимости, при их соблюдении, основного тождества.

5. Доказательство теоремы 3.

Предложение 28. Интеграл проекции кинетического момента, если он существует в случае $k_2 \equiv 0$, может быть записан в виде

$$\nu(J\mathbf{x} + \mathbf{K}, \gamma) = \text{const} \quad (5.1)$$

Для его существования необходимо и достаточно выполнения условия (2.22) и условия

$$\mathbf{N} = -(\ln \nu)^* \mathbf{K} \quad (5.2)$$

Система при выполнении этих условий приводится к виду (2.18).

Доказательство. Положив в интеграле (2.17) $\psi_1 = \psi_2 = 0$, выделим интеграл (5.1). Условия (2.12), (2.13) при $v \neq 0$ записываются в виде (2.22), (5.2), остальные условия теоремы 2 при $\sigma_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) выполнены. Приводимость системы к виду (2.18), где принято $J' = vJ$, $K' = vK$, проверяется непосредственно.

Предложение 29. Для существования в случае $k_2 \equiv 0$ двух квадратичных по компонентам угловой скорости интегралов необходимо выполнение второго и третьего условий (2.22) и условий

$$\Lambda_2 = 0, (\ln pa_i)^* = 2\lambda_{ii}A_i^{-1}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.3)$$

Доказательство. В силу теоремы 2 указанные интегралы могут быть записаны в виде (2.8). Учитывая представление (2.9) для собственных значений оператора F , получим, что независимым квадратичным интегралам соответствуют независимые наборы постоянных σ_i , удовлетворяющих условию (2.11). Базисом множества решений уравнения (2.11) с тремя переменными являются решения $\{\sigma_i^{(1)}\}$, $\{\sigma_i^{(2)}\}$, причем

$$\sigma_i^{(1)} = \Delta A_{i0}, \quad \sigma_i^{(2)} = A_{i0} \Delta A_{i0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.4)$$

Здесь $A_{i0} = A_i(0)$.

Требуя, чтобы условие (2.14) было выполнено как для $\sigma_i = \sigma_i^{(1)}$, так и для $\sigma_i = \sigma_i^{(2)}$, получим $K = 0$ и $\lambda_{ij} = 0$ при $i \neq j$, т.е. $\Lambda_2 = 0$. Из условий (2.15), (2.16) теперь получим третье условие (2.22) и второе условие (5.3).

Предложение 30. Для существования трех независимых нетривиальных КИ ОДС необходимо выполнение последнего условия (2.22). Интегралы могут быть записаны в виде (2.19)–(2.21).

Доказательство. В соответствии с теоремой 2 любой нетривиальный КИ записывается в форме (2.8) и определяется функцией $v(t)$ и набором постоянных σ_i , связанных условием (2.11). Тогда из существования трех независимых КИ следуют существование интеграла проекции кинетического момента (5.1) и в соответствии с предложением 28 необходимость выполнения первого условия (2.22). Из этого условия и второго условия (5.3) получим $pv^2a_i = \text{const}$. Полагая, без ограничения общности, $p_0v_0^2 = 1$, получим последнее условие (2.22).

Для заданного формулой (5.4) набора $\sigma_i^{(1)}$ из условий (2.9), (2.10) и последнего условия (2.22) получим для собственных значений операторов F , P_3 выражения

$$\varphi_i = v^2 A_{i0}^{-1}, \quad p_i = A_{i0} - (A_{10} + A_{20} + A_{30})/3$$

что дает интеграл (2.19).

Для набора $\sigma_i^{(2)}$ получим аналогично

$$\varphi_i = v^2, \quad p_i = -A_{10}A_{20}A_{30}A_{i0}^{-1} + (A_{10}A_{20} + A_{10}A_{30} + A_{20}A_{30})/3$$

и интеграл записывается в форме (2.20).

Теорема 3 доказана полностью, так как доказаны необходимость условий (2.22) для существования трех независимых нетривиальных КИ и достаточность совокупности этих условий для существования интегралов (2.19) – (2.21). Любой нетривиальный КИ есть линейная комбинация этих интегралов.

Приведем еще описание допустимых законов изменения главных моментов инерции при существовании трех КИ.

Предложение 31. При существовании трех независимых нетривиальных КИ оператор инерции системы может быть представлен в виде

$$J = \theta(C + \eta E)^{-1} \quad (5.5)$$

где $\text{tr } C = 0$.

Доказательство. Обозначив

$$\zeta_k = -A_i A_j p v^2 \quad (i \neq j \neq k, \quad i \neq k) \quad (5.6)$$

последнее условие (2.22) запишем в виде

$$\Delta \zeta_i = a_{i0}, \quad i = 1, 2, 3$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\zeta_i = -\frac{1}{3} \Delta a_{i0} + \eta \quad (5.7)$$

Из формул (5.6) получим

$$A_k = -A_1 A_2 A_3 p v^2 \zeta_k^{-1}$$

что и дает представление (5.5), где $\theta = -A_1 A_2 A_3 p v^2$, и в соответствии с формулой (5.7) собственными значениями оператора S являются $-\frac{1}{3} \Delta a_{i0}$ ($i = 1, 2, 3$).

6. Упрощение динамической системы при наличии интегралов. Укажем здесь приведение к автономной системе (2.4), (2.5) – при выполнении условий теоремы 1, к системе (2.23) – при выполнении условий теоремы 3 и докажем теорему 4, дающую условия приведения к интегрируемой в квадратурах системе (2.26).

Предложение 32. При выполнении условий теоремы 1 ОДС приводится к автономному виду (2.4), (2.5). Интеграл (2.2) исходной системы в этом случае записывается в виде (2.7).

Доказательство. В доказательстве предложения 19 отмечено, что условие 2 теоремы 1 эквивалентно условию $p k_2^{-2} = \text{const}$ и можно записать $p = c_3 k_2^2$, где $c_3 = c_2^{-2}$. Уравнение (1.8) при учете условий 2–6 теоремы 1 запишется в виде

$$J_0(\dot{\mathbf{x}} - (\ln k_2) \cdot \mathbf{x}) = (J_0 \mathbf{x} + k_2 \mathbf{K}_0) \times \mathbf{x} + c_3 k_2^2 \mathbf{g}_3 \times J_0 \mathbf{g}_3$$

Переходя к заданным формулами (2.6) переменным $\mathbf{u}$, τ , получим уравнение (2.4). Так как условие 1 можно представить в виде (3.17), то уравнения (1.9) записываются в виде (2.5).

Интеграл (2.2) при переходе к переменным (2.6), учете представления (1.1) для угловой скорости Ω и связей $k_3 = c_1 k_2$, $p = c_3 k_2^2$ преобразуется к виду (2.7).

Предложение 33. При выполнении условий теоремы 3 ОДС приводится к виду (2.23).

Доказательство. В соответствии с предложением 28 ОДС приводится к виду (2.18), откуда, учитывая второе условие (2.22) и переходя к заданной первой формулой (2.24) переменной $\mathbf{w}$, получим

$$\begin{aligned} J_0 \dot{\mathbf{w}} &= v^{-1} (J_0 \mathbf{w}) \times (J^{-1} J_0 \mathbf{w}) + p v \mathbf{g}_3 \times J \mathbf{g}_3 \\ \dot{\mathbf{g}}_3 &= v^{-1} \mathbf{g}_3 \times (J^{-1} J_0 \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Отметим, что последнее условие (2.22) эквивалентно выполнению тождества

$$p v^2 J(J \mathbf{x} \times \mathbf{x}) \equiv J_0 (J_0 \mathbf{x} \times \mathbf{x}) \quad (6.2)$$

Это утверждение можно проверить, записав тождество (6.2) в координатной форме.

Используя тождество (6.2), первое уравнение системы (6.1) приведем к виду

$$J_0 \dot{\mathbf{w}} = p^{-1} v^{-3} B (J_0 B \mathbf{w} \times B \mathbf{w}) + v^{-1} B (\gamma \times J_0 \gamma), \quad B = J_0 J^{-1} \quad (6.3)$$

Для симметрического оператора B с собственными значениями β_i и для произвольных векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ справедливо равенство

$$B(B\mathbf{b}_1 \times B\mathbf{b}_2) = \beta_1\beta_2\beta_3\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$$

учитывая которое, уравнение (6.3) и второе уравнение системы (6.1) запишем в виде (2.23).

Теорема 4 является следствием теоремы 3 для случая подобного изменения оператора инерции. Действительно, полагая $J = \lambda J_0$, формулы (2.24) запишем в виде

$$\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v} \mathbf{x}, \quad d\tau = dt/(\lambda v), \quad p(\lambda v)^2 = 1$$

откуда $\lambda v = p^{-1/2}$, и система (2.23) приводится к виду (2.26), а интегралы (2.19) – (2.21) записываются в виде (2.28) – (2.30). Условие $J = \lambda J_0$ при $p(\lambda v)^2 = 1$ записывается в виде первого условия (2.25), последнее условие (2.22) при этом тождественно выполнено. Первое условие (2.22) принимает форму последнего условия (2.25).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. Brun F. de. Rotation kring en fix punkt // Ofversigt. Kongl Svenska Vetenskaps – Akad. Vorhandl. Stookholm. 1893. № 7. P. 455–468.
3. Koob G. Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixé // Bull. Soc. Mat. 1895. V. 23. P. 210–216.
4. Харламова Е.И. О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил // Изв. Сиб. отд. АН СССР. 1959. № 6. С. 7–17.
5. Гантмахер Ф.Р., Левин Л.М. Об уравнениях движения ракеты // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 3. С. 301–312.
6. Ольшанский В.Ю. Свободное движение сложной механической системы с квадратичными интегралами // Космич. исслед. 1996. Т. 34. № 2. С. 145–149.
7. Ольшанский В.Ю. О приводимости уравнений свободного движения сложной механической системы // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 768–777.
8. Ольшанский В.Ю. Линейный и квадратичный интегралы сложной механической системы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 37–46.

Саратов
e-mail: bmm@techn.renet.ru

Поступила в редакцию
28.III.2000