

УДК 531.36 : 534.1 : 62–50

© 2001 г. Л.Д. Акуленко

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯМИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается новый класс задач управления и оптимизации движений колебательных систем посредством регулируемого изменения параметров. Предлагаются формы уравнений движения, удобные для применения асимптотических методов нелинейной механики и оптимального управления. Исследуются основные режимы управляющего воздействия посредством релейного изменения ускорения, скорости или значения параметра в относительно небольших пределах. Для нелинейных колебательных систем с регулируемым положением относительного равновесия и коэффициентом жесткости построены приближенные оптимальные и квазиоптимальные по быстродействию законы управления. Обнаружены и прокомментированы интересные особенности движений.

1. Постановка задачи. Рассматривается класс управляемых механических систем с конечными связями, зависящими от регулируемых параметров. Ради конкретности и определенности ограничимся пока случаем поступательного движения твердого тела (материальной точки) вдоль фиксированной кривой в инерциальной декартовой системе координат

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, s), \quad \mathbf{r} = (x, y, z)^T, \quad q \in Q, \quad s \in S \quad (1.1)$$

Здесь q – обобщенная скалярная координата, s – регулируемый параметр; Q, S – одномерные связные множества; x, y, z – достаточно гладкие функции q, s . Дифференцируя выражение (1.1) по t , получим представление для кинетической энергии K объекта постоянной массы m ($m = 1$) в виде стандартной квадратичной формы от $\dot{q}, \dot{s}$

$$K = K(q, \dot{q}, s, \dot{s}) = \frac{1}{2}(a^2(q, s)\dot{q}^2 + 2b(q, s)\dot{q}\dot{s} + c^2(q, s)\dot{s}^2) \quad (1.2)$$

$$a^2 = \mathbf{r}'_q{}^2, \quad b = (\mathbf{r}'_q, \mathbf{r}'_s), \quad c^2 = \mathbf{r}'_s{}^2$$

Во избежание особенностей в уравнениях движения предположим, что $a^2 > 0$.

Считается, что на объект действуют потенциальные силы, описываемые функцией W , зависящей от $\mathbf{r}, s$,

$$W(\mathbf{r}, s) = W(\mathbf{r}(q, s), s) \equiv U(q, s) \quad (1.3)$$

Здесь U – достаточно гладкая функция аргументов q, s в рассматриваемой области (1.1). Далее с помощью функции Лагранжа $L = K - U$ получаем уравнение движения для q

$$a^2\ddot{q} + aa'_q\dot{q}^2 + U'_q = -2aa'_s\dot{q}\dot{s} - b\ddot{s} + (cc'_q - b'_s)\dot{s}^2 \quad (1.4)$$

Предположим, что при $s = \text{const}$ уравнение (1.4) обладает устойчивой точкой покоя $\dot{q} = 0, q_*(s)$, т.е.

$$U'_q(q_*(s), s) = 0, \quad U''_{qq}(q_*(s), s) > 0, \quad s \in S$$

Тогда в некоторой окрестности этой точки система (1.4) будет совершать нелинейные колебания с постоянной энергии E , с амплитудами $q^\pm(E, s)$, периодом $T(E, s)$ и фазой φ

$$q = q_0(\varphi, E, s), \quad E = \frac{1}{2} a^2 \dot{q}^2 + U \geq \min_q U, \quad q^\pm = \text{Arg}_q(E - U)$$

$$t = \int \frac{dq}{\dot{q}} + \text{const}, \quad T = 2 \int_{q^-}^{q^+} \frac{dq}{\dot{q}^+}, \quad \omega(E, s) = \frac{2\pi}{T} \quad (1.5)$$

$$\dot{q} = \dot{q}^\pm(q, E, s) = \pm \sqrt{2(E - U)}^{1/2} a^{-1}, \quad \varphi = \omega t + \varphi^0$$

В выражениях (1.5) постоянные E , φ^0 определяются начальными значениями лагранжевых координат q , $\dot{q}$ и величиной параметра s .

Для приложений представляет естественный интерес постановка задачи управления о приведении системы (1.4) из произвольного начального состояния $q^0, \dot{q}^0, s^0, \dot{s}^0$ в требуемое конечное состояние, в частности, состояние покоя $q_*(s^f), \dot{q} = 0, s = s^f, \dot{s} = 0$, за ограниченное время t_f посредством выбора управляющего воздействия, например $\ddot{s}$, из допустимого класса функций. В случае управляемости формулируется задача оптимизации движений по отношению к некоторому критерию качества управления (функционалу), например по быстродействию, с учетом различного рода дополнительных условий и ограничений [1].

Далее с целью применения асимптотических методов оптимального управления колебательными системами [2–4] рассматривается ситуация, когда допустимая величина управляющей функции $\ddot{s}$ в некотором смысле мала: $\ddot{s} = \varepsilon w$, где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый числовой параметр, $w \sim 1$, а время процесса $t_f \sim \varepsilon^{-1}$ – асимптотически велико. Требуется изменить величину полной энергии $E(t_f) = E^f$ существенным образом (на относительную величину порядка единицы). При этом наряду с управляемыми колебательными движениями могут быть изучены также вращательно-колебательные; функции a, b, c и U должны быть периодическими по q . Этот естественный приближенный подход предполагает применение метода усреднения по быстрым переменным (по фазе φ [5, 6]).

К управляемой системе вида (1.4) приводится также более общий случай объекта, когда некоторая фиксированная точка, например центр масс твердого тела, может перемещаться вдоль кривой $\mathbf{r}(q, s)$ (1.1) и, кроме того, тело принимает ориентацию, зависящую от переменных q, s . Тогда вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ в проекциях на связанные с телом оси и кинетическая энергия Ω вращений имеют вид

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Phi}(q, s)\dot{q} + \boldsymbol{\Psi}(q, s)\dot{s} \quad (1.6)$$

$$\Omega = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, I\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(A^2(q, s)\dot{q}^2 + 2B(q, s)\dot{q}\dot{s} + C^2(q, s)\dot{s}^2)$$

Здесь I – тензор (матрица) инерции тела относительно указанной точки, векторы $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}$ определяются через кинематические связи между $\boldsymbol{\omega}$ и переменными, характеризующими ориентацию тела относительно инерциальной системы. Обычно это связи между $\boldsymbol{\omega}$ и углами Эйлера, Крылова – Эйлера, кватернионами, направляющими косинусами и др. и их производными. Например, в углах Крылова – Эйлера (α, β, γ) имеем связи [7]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \equiv \Phi_1 \dot{q} + \Psi_1 \dot{s}, & \alpha &= \alpha(q, s) \\ \omega_2 &= -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \equiv \Phi_2 \dot{q} + \Psi_2 \dot{s}, & \beta &= \beta(q, s) \\ \omega_3 &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \equiv \Phi_3 \dot{q} + \Psi_3 \dot{s}, & \gamma &= \gamma(q, s) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\dot{\alpha} = \alpha'_q \dot{q} + \alpha'_s \dot{s}, \quad \dot{\beta} = \beta'_q \dot{q} + \beta'_s \dot{s}, \quad \dot{\gamma} = \gamma'_q \dot{q} + \gamma'_s \dot{s}$$

Аналогичные (1.7) выражения для Φ, Ψ получаются на основе классических углов Эйлера и других переменных [7].

Если при поворотах на тело действуют обобщенные потенциальные силы (моменты сил), описываемые функцией N , то сходным с (1.3) образом получим выражение для потенциальной энергии вращений M

$$N = N(\mathbf{r}, \alpha, \beta, \gamma, s) \equiv M(q, s) \quad (1.8)$$

Составляя для твердого тела функцию Лагранжа с учетом вращений, стандартным манером получим уравнение движения в переменных q, s типа (1.4). Соответствующие коэффициенты для a^2, b, c^2 и функции K, U являются суммами величин, определяемых выражениями (1.2), (1.6) и (1.3), (1.8).

Уточнение постановок задач управления и оптимизации для различных режимов регулирования параметра s дано в разд. 2.

2. Гамильтонова форма уравнений движения и постановки задачи оптимального управления. Построение приближенных оптимальных управлений непосредственно для системы вида (1.4) с помощью асимптотических подходов затруднено, поскольку параметр s , вообще говоря, не является медленной переменной и может за время $t_f \sim \varepsilon^{-1}$ измениться на аналогичную величину. Поэтому для упрощения постановки задачи обычно полагают, что уравнение не содержит явно переменной s ; тогда E и $v = \dot{s}$ будут медленными, так как $\dot{v} = \varepsilon w$, что позволяет применить методы усреднения [2–4]. Требуемое значение s^f может быть достигнуто затем без изменения E^f, v^f в пределах заданной точности $O(\varepsilon)$.

В других конкретных ситуациях может отсутствовать явная зависимость правой части уравнения (1.4) от $\ddot{s}$ (при $b \equiv 0$), что имеет место, если векторы $\mathbf{r}'_q$ и $\mathbf{r}'_s$ ортогональны. Тогда естественно поставить задачу изменения переменных E, s посредством регулируемого в сравнительно малых пределах значения $v, v = \varepsilon u, u \sim 1$ [2–4].

Прикладные задачи управления динамическими объектами посредством электро-механических, пневматических, гидравлических и др. приводов часто приводят к модели, когда скорость $\dot{s}$ по существу является управляющим воздействием релейного типа сравнительно малой величины, а ускорение $\ddot{s}$ аппроксимируется обобщенной импульсной функцией (δ – функцией Дирака) малой интенсивности. В этом практически важном случае использование нелинейных уравнений движения в форме Лагранжа (1.4) приводит к значительным аналитическим и вычислительным трудностям. Применение условий оптимальности принципа максимума [1] и асимптотических методов нелинейной механики [2–6] проблематично. Важно, однако, заметить, что множитель $b = b(q, s)$ перед $\ddot{s}$ и не зависит от $\dot{q}, \dot{s}$ явно, т.е. соответствующая квадратура по t будет определенной, несмотря на разрывы (скачки) производных $\dot{q}, \dot{s}$.

Как оказывается, эти трудности являются искусственными; они вызваны неудачным выбором переменных $q, \dot{q}$ для описания динамики, приводящим к сингулярности уравнений. Переход от этих переменных к гамильтоновым q, p , где p – импульс, посредством преобразования Рауса вида

$$p = \partial L / \partial \dot{q}, \quad H(q, p, s, \dot{s}) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, s, \dot{s}) \quad (2.1)$$

позволяет получить уравнения управляемого движения, не содержащие $\ddot{s}$. Действительно, из (1.2), (1.3), (2.1) следует

$$\begin{aligned} \dot{q} &= H'_p = a^{-2}(p - bv), & H &= \frac{1}{2}a^{-2}(p - bv)^2 - \frac{1}{2}c^2v^2 + U \\ \dot{p} &= -H'_q = a'_q a^{-3}(p - bv)^2 + b'_q a^{-2}(p - bv)v + c'_q cv^2 - U'_q \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\dot{s} = v, \quad v = \varepsilon u, \quad u^- \leq u \leq u^+, \quad u^- < 0, \quad u^+ > 0$$

Здесь и в (2.1) H – функция Гамильтона системы, которая определяет первый интеграл (энергию) при $\varepsilon = 0$, т.е. $\dot{s} \equiv 0$. В уравнениях движения (2.2) принято, что $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, а управляющая функция u может принимать значения из отрезка $[u^-, u^+]$. Как и выше, см. разд. 1, для неуправляемой (при $\varepsilon = 0$) системы (2.2) имеют место соотношения типа (1.5), определяющие колебательные движения. Для медленных переменных E, s при достаточно малых значениях ε стандартным образом ставятся задачи управления и оптимизации [2–4]. Уравнения управляемого движения в стандартной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{E} &= pa^{-5}(b'_q a - a'_q b)(p - bv)v + pa^{-2}c'_q cv^2 - a^{-2}bU'_q v - \\ &- p^2 a^{-3}a'_s v + U'_s v \equiv \varepsilon Fu + O(\varepsilon^2), \quad E = \frac{1}{2}a^{-2}p^2 + U \\ \dot{s} &= v, \quad v = \varepsilon u, \quad u^- \leq u \leq u^+ \end{aligned} \quad (2.3)$$

Переменная p в (2.3) связана с E, q, s (и v) соотношениями (2.1), (1.5). Это позволяет выполнять усреднение по фазе φ правых частей управляемой системы (после определения u) интегрированием по q на основе интегралов невозмущенной системы [2–4]. Поэтому явные выражения для возмущенной фазы φ в дальнейшем не потребуются; более того, она определяется недостаточно точно, см. ниже.

Уравнения типа (2.3) могут быть получены и использованы также в случае управления $\ddot{s} = \varepsilon w$, когда уравнение (1.4) не содержит явно переменную s . Тогда в качестве медленной переменной принимается $v = \dot{s}$. Напомним, что переменная s не будет медленной; это в случае явной зависимости a, b, c, U от s принципиально затрудняет применение асимптотических методов [3, 4]. Итак, если $K = K(q, \dot{q}, v)$, $U = U(q)$, то для E, v получим уравнения

$$\dot{E} = -\varepsilon(a^{-2}b(p - bv) + c^2 v)w \equiv \varepsilon Gw, \quad \dot{v} = \varepsilon w, \quad w^- \leq w \leq w^+, \quad E = H(q, p, v) \quad (2.4)$$

Отметим, что в (1.4) слагаемые, содержащие a'_s, b'_s , исчезают. Функция K не зависит от s , если a^2, b, c^2 не зависят от s ; например, это выполняется при условии $\mathbf{r} = \mathbf{p}(q) + \mathbf{n}s$, где $\mathbf{n}$ – постоянный вектор; в приложениях часто $\mathbf{r} = \mathbf{p}(q) + \mathbf{v}(s)$. Переменная p в (2.4) выражается через $\dot{q}, q, v$, а обобщенная скорость $\dot{q}$ связана с переменными E, q, v согласно соотношениям (2.2), что позволяет, как и в случае уравнений (2.3), проводить усреднение уравнений управляемого движения на основе первого интеграла посредством квадратуры по q .

Далее для систем (2.3), (2.4) ставятся и приближенно исследуются задачи оптимального по быстродействию изменения переменной E и переменных s или v соответственно:

$$E(t_f) = E^f, \quad s(t_f) = s^f, \quad t_f \rightarrow \min_u, \quad u^- \leq u \leq u^+ \quad (2.5)$$

$$E(t_f) = E^f, \quad v(t_f) = v^f, \quad t_f \rightarrow \min_w, \quad w^- \leq w \leq w^+$$

Предполагается построение оптимального синтеза для u в зависимости от $q, \dot{q}(p), s$ или для w как функции $q, \dot{q}(p), v$, а также вычисление усредненных медленных переменных E, s или E, v , см. ниже. Эти постановки задачи оптимального управления являются основными. Они представляют определенный интерес для приложений.

На практике, однако, может иметь место ситуация, когда кинетическая энергия $K(q, \dot{q})$ или не зависит от $s, \dot{s}$, т.е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q)$, или отвечает случаю $\mathbf{r} = \mathbf{n}(q + s) + \mathbf{r}_0$, где $\mathbf{n}, \mathbf{r}_0$ – постоянные векторы, см. разд. 4. Зависимость от параметра s или допускается в U , или вводится переменная $l = q + s$ [2–4]. Тогда в рамках предлагаемого подхода возможна постановка задачи оптимального управления колебаниями системы посредством релейного изменения параметра s в некоторых малых пределах. Значения пара-

метра s могут определять положения равновесия или коэффициент упругости [3, 4], см. разд. 4.

Уравнение движения в переменных $q, \dot{q}$ или $l, \dot{l}$ имеет вид (1.4) с равной нулю тождественно правой частью. Уравнения в форме Гамильтона (2.2) не содержат функций b, c и их производных. Для медленной переменной E , отвечающей некоторому заданному значению $s = s^*$, задача оптимального быстрогодействия имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{E} &= (U'_q(q, s^*) - U'_q(q, s))\dot{q} = -\varepsilon U''_{qs}(q, s^*)\dot{q}\sigma + O(\varepsilon^2) \\ E &= \frac{1}{2}a^2(q)\dot{q}^2 + U(q, s^*), \quad s = s^* + \varepsilon\sigma (\dot{E} \equiv 0, \quad s = s^*) \\ E(t_f) &= E^f, \quad t_f \rightarrow \min_{\sigma}, \quad \sigma^- \leq \sigma \leq \sigma^+\end{aligned}\tag{2.6}$$

Без ограничения общности можно положить $\sigma^\pm = \pm 1$. Для постановки задачи (2.6) допускается практически мгновенное относительно малое изменение величины возвращающей силы $-U'_q$. Представляется интересным сравнение различных режимов управления по $\ddot{s}, \dot{s}, s$.

3. Схемы приближенного решения задач оптимального быстрогодействия. Следуя общему подходу принципа максимума [1] и асимптотической методике [2–4], для систем (2.3), (2.4), (2.6) вводятся сопряженные переменные, составляются функции Гамильтона задач управления и проводится их максимизация по u, w, σ в соответствующих пределах. Максимальные значения функций Гамильтона (функций Понтрягина) Π усредняются по фазе φ , относительно которой они 2π -периодичны. В результате получаются выражения первого приближения по ε для функций Понтрягина и канонические (гамильтоновы) уравнения, не содержащие быстрых переменных. Усредненные уравнения принципа максимума допускают первый интеграл и введение медленного времени $\tau = \varepsilon t$, изменяющегося на относительно коротком интервале $\tau_f \sim 1$. В этом состоит основное упрощение аналитического или численного решения краевых задач принципа максимума [2–4].

Рассмотрим сперва режим управления посредством регулируемого изменения скорости $\dot{s} = \varepsilon u$ согласно (2.3), (2.5). Оптимальное управление u^* , максимальное значение Π^* гамильтониана и его среднее $\varepsilon\Pi_0$ описываются выражениями (угловые скобки означают усреднение)

$$\begin{aligned}u^* &= d^+ + d^- \operatorname{sign} \Psi, \quad \Psi \equiv \xi F + \eta, \quad d^\pm = \frac{1}{2}(u^+ \pm u^-), \quad d^- > 0, \quad d^- > |d^+| \\ \Pi^* &= \varepsilon(d^+ \Psi + d^- |\Psi|), \quad \langle \Pi^* \rangle = \varepsilon\Pi_0 = \varepsilon(d^+ \langle \Psi \rangle + d^- \langle |\Psi| \rangle)\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\langle \Pi^* \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi^* d\varphi = \frac{1}{T} \oint \Pi^* \frac{dq}{\dot{q}} = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_{q^-}^{q^+} \Pi^* \frac{adq}{\sqrt{E-U}}$$

Здесь ξ, η – сопряженные соответственно E, s медленные переменные; величины $T(E, s), q^\pm(E, s)$ определяются согласно (1.5); они находятся на основе неуправляемого движения, т.е. свободных колебаний системы при $s = \text{const}$. Без ограничения общности в (3.1) можно положить $d^- = 1$; тогда $|d^+| < 1$. Для приложений обычно характерна ситуация, когда $d^+ = 0$, т.е. $|u| \leq u_0$ ($u_0 = 1$), а первые слагаемые в функциях u, Π^*, Π_0 отсутствуют.

С помощью выражения (3.1) для $\Pi_0(E, s, \xi, \eta)$ выписывается усредненная краевая задача принципа максимума с сохранением старых обозначений

$$E' = \Pi'_{0\xi}, \quad s' = \Pi'_{0\eta}, \quad \xi' = -\Pi'_{0E}, \quad \eta' = -\Pi'_{0s}\tag{3.2}$$

$$E(0) = E^0, \quad E(\tau_f) = E^f, \quad s(0) = s^0, \quad s(\tau_f) = s^f, \quad \Pi_0 = 1$$

Задача (3.2) содержит пять неизвестных параметров (включая τ_f) и такое же число краевых условий для их определения. В общем случае для ее решения могут быть применены численные методы. В конкретных задачах выражение Π_0 имеет определенную структуру, что позволяет применять аналитические методы [2–4].

Рассмотрим теперь режим управления по ускорению $\dot{v} = \varepsilon w$, $w^- \leq w \leq w^+$, см. (2.4), (2.5). Выражения типа (3.1) для построения усредненной краевой задачи, аналогичной (3.2), имеют тот же вид с заменами

$$\begin{aligned} u^* &\rightarrow w^*, \quad \Psi = \xi G + \eta, \quad s \rightarrow v, \quad \dot{q} = \pm \sqrt{2a(E + \frac{1}{2}c^2 v^2 - U)}^{\frac{1}{2}} \\ q^{\pm}(E, v) &= \text{Arg}_q(E + \frac{1}{2}c^2(q)v^2 - U(q)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь ξ, η – сопряженные E, v медленные переменные. Структура усредненной краевой задачи для определения приближенного решения задачи оптимального быстрогодействия по переменным E, v совпадает с (3.2), однако выражение для функции G (2.4) существенно проще, чем для F (2.3). В частности, если $\mathbf{r} = \mathbf{p}(q) + \mathbf{n}s$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, то $\mathbf{b} = (\mathbf{p}', \mathbf{n})$, $c^2 = 1$, а импульс $p = a^2 \dot{q} + b v$, в котором добавка $b v$ имеет смысл проекции скорости $\mathbf{p} v$ на направление $\mathbf{p}'$ (с точностью до множителя a).

Режим управления посредством регулируемого изменения параметра $s = s^* + \varepsilon \sigma$, $|\sigma| \leq 1$, входящего только в выражение для возвращающей силы $-U'_q(q, s)$ (2.6), приводит к более простым соотношениям, чем (3.1)–(3.3), так как медленные переменные типа s, v и соответствующие им сопряженные отсутствуют. В результате получаются явные выражения для управления σ^* и конечные формулы для E, τ_f

$$\begin{aligned} \sigma^* &= -\text{sign}(\Delta E U''_{qs} \dot{q}), \quad E^* = D(E) \text{sign} \Delta E, \quad \Delta E = E^f - E \\ \tau &= \tau(E, E^0, E^f) = \text{sign} \Delta E^0 \int_{E_0}^E \frac{d\chi}{D(\chi)}, \quad D(E) = \frac{1}{T} \int_0^T |U''_{qs} \dot{q}| dt = \frac{2}{T} \int_{q^-}^{q^+} |U''_{qs}| dq \\ \tau_f &= \tau_f(E^0, E^f) = \tau(E^f, E^0, E^f), \quad q^{\pm}(E) = \text{Arg}_q(E - U(q, s^*)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Определяя на интервале $q^- \leq q \leq q^+$ участки знакопостоянства функции $U''_{qs}(q, s^*)$, выражение для функции $D(E)$ можно представить в явной форме через значения U'_s , см. разд. 4.1. Период колебаний $T(E)$ в (3.4) определяется согласно (1.5).

Следует отметить, что для существенно нелинейных систем, когда период колебаний зависит от энергии и медленных переменных, управление должно иметь форму синтеза, поскольку быстрые переменные, в том числе фаза φ , вычисляются с погрешностью $O(1)$ [2–4]. После нахождения сопряженных переменных ξ, η как функций τ, E^0 и s^0 или v^0 совершаются замены: $\tau \rightarrow 0, E^0 \rightarrow E$ и $s^0 \rightarrow s$ или $v^0 \rightarrow v$, что приводит к управлению в форме синтеза, т.е. в зависимости от $q, \dot{q}$ (или p) и s или v , которые предполагаются измеряемыми.

4. Конкретные модели нелинейных осцилляторов с регулируемыми параметрами.

4.1. Одномерный осциллятор с регулируемым положением равновесия. Рассмотрим прямолинейное движение тела массы $m = 1$ под действием нелинейной упругой силы в окрестности устойчивого положения равновесия, см. разд. 1, 2. Могут быть рассмотрены три режима управления движением

$$\begin{aligned} x &= q + s, \quad K = \frac{1}{2}(\dot{q} + \dot{s})^2, \quad U = U(q), \quad U(0) = U'(0) = \dots = U^{(2n-1)}(0) = 0 \\ \ddot{q} + U'(q) &= -\varepsilon w, \quad \dot{v} = \varepsilon w \quad (\dot{s} = v), \quad w^- \leq w \leq w^+ \\ \dot{q} &= p - \varepsilon u, \quad \dot{p} = -U'(q), \quad \dot{s} = \varepsilon u, \quad u^- \leq u \leq u^+ \\ \ddot{x} + U'_q(x - s) &= 0, \quad s = s^* + \varepsilon \sigma, \quad |\sigma| \leq 1 \quad (U^{(2n)}_{(q)} > 0, \quad q \in Q) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Согласно (4.1) $q = 0, \dot{q} = 0$ – точка покоя системы при $\varepsilon = 0$. Управление по ускорению εw позволяет привести систему в относительное состояние покоя или колебаний с заданной энергией E^f (или амплитудами $q^\pm(E)$) и требуемой скоростью v^f перемещения как целого, см. (2.4), (2.5). Если скорость $\dot{s} = \varepsilon u$ перемещения положения равновесия является регулируемой, то в переменных q, p может быть решена задача приведения системы в положение E^f, s^f , см. (2.3), (2.5). И, наконец, если положение s – регулируемый параметр ($\varepsilon \sigma$ – управляющее воздействие), то осциллятор приводится в состояние E^f , см. (2.6). Таким образом, модели (4.1) управляемых движений осциллятора позволяют рассмотреть три описанных выше режима регулирования: по ускорению, скорости и смещению положения равновесия. Задачи оптимального управления медленными переменными согласно соотношениям (3.1)–(3.5) в общем случае требуют привлечения численных методов для решения соответствующих краевых задач принципа максимума [2–4].

В квазилинейной трактовке режим управления по скорости исследован аналитически достаточно подробно [3, 4]. Установлено переходом к амплитуде A и фазе φ , что соответствующие медленным переменным A, s сопряженные ξ, η во времени не изменяются. Искомое решение задачи целиком определяется через корень κ трансцендентного уравнения; имеем соотношения

$$\begin{aligned} \Delta s / |\Delta A| &= [(\pi/2)(d^+ / d^-) + \text{sign } \Delta A \arcsin \kappa] / \sqrt{1 - \kappa^2}, \quad \kappa = \eta / \xi, \quad |\kappa| < 1 \\ \tau_f &= (\pi / (2d^-)) |\Delta A| / \sqrt{1 - \kappa^2}, \quad \Delta A = A^f - A \neq 0, \quad \Delta s = s^f - s \\ u^* &= d^+ + d^- \text{sign}(\Delta A(\kappa - q/A)), \quad A = A^0 + \Delta A^0 \tau / \tau_f^0, \quad s = s^0 + \Delta s^0 \tau / \tau_f^0 \\ q &= A \sin \varphi, \quad \dot{q} = A \cos \varphi, \quad p = \dot{q} + \varepsilon u^*, \quad \varphi = t + O(1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь приближенное оптимальное управление u^* представлено в форме синтеза; для построения программного управления требуется более точно вычислить фазу φ [3]. Неизвестная κ определяется из первого соотношения (4.2) численно или графически через заданные величины $\Delta A, \Delta s$ и d^+/d^- .

В нелинейном случае, как отмечалось, требуется привлечение численных методов решения нелинейной краевой задачи типа (3.2), что приводит к существенным трудностям. Можно, однако, применить процедуру квазиоптимального разделения процесса управления: изменить оптимальным образом энергию (амплитуды) относительных колебаний, а затем осуществить наискорейшее перемещение осциллятора в требуемое положение. Оценки свидетельствуют, что относительное увеличение времени невелико.

Кратко изложим решение задачи оптимального по быстродействию изменения энергии колебаний. Согласно соотношениям (2.3), (3.1), (3.2) имеем выражения

$$\begin{aligned} u^* &= d^+ + d^- \text{sign}(\Delta E F(q)), \quad F = -U'(q), \quad \Delta E = E^f - E \\ \tau &= \tau(E, E^0, E^f) = \text{sign } \Delta E^0 \frac{1}{d^-} \int_{E^0}^E \frac{d\chi}{F_0(\chi)}, \quad \tau_f = \tau(E^f, E^0, E^f) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$F_0(E) = \frac{1}{T} \int_0^T |F| dt = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_{q^-}^{q^+} \frac{|F|}{\sqrt{E - U}} dq = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{E}}{T(E)}$$

При вычислении среднего $F_0(E)$ учтено выражение для $F(q)$ [2–4]. Из (4.3) следует, что величина τ_f будет конечной для $E^f = 0$, если $F_0(E) \sim E^\delta$, $\delta < 1$, т.е. если $\gamma > -1/2$, где γ – показатель степени оценки $T(E) \sim E^\gamma$ при малых E . Например, если $U = 1/2 q^2$, то $T = 2\pi$, и получаем неравенство $\gamma = 0 > -1/2$; величина $\tau_f = \pi \sqrt{E^0 / 2} / d^-$. Аналогично

рассматривается вопрос об управляемости при $E^0 = 0$. В случае степенной нелинейности $U = k|q|^\rho$, $\rho > 0$, получим соотношения

$$T(E) = \theta(k, \rho) E^{1/\rho - 1/2}, \quad \theta = (2\sqrt{2\pi}/\rho) \Gamma(1/\rho) \Gamma^{-1}(\frac{1}{2} + 1/\rho) k^{-1/\rho} \quad (4.4)$$

$$E(\tau) = [(E^0)^{1/\rho} + ((E^f)^{1/\rho} - (E^0)^{1/\rho}) \tau / \tau_f]^\rho, \quad \tau_f = (\rho \theta / (4\sqrt{2} d^-)) |(E^f)^{1/\rho} - (E^0)^{1/\rho}|$$

Здесь Γ – гамма-функция Эйлера. Для степенной функции U свойство конечности величины τ_f для $E^0 = 0$ (гашение или раскачка относительных колебаний) согласно (4.4) всегда имеет место.

Отметим, что $\text{sign } Fq = -1$, т.е. управление "стремится" переместить точку равновесия в сторону отклонения с целью уменьшения возвращающей силы. И наоборот, для увеличения энергии относительных колебаний (раскачка осциллятора) управление сводится к увеличению возвращающей силы, т.е. направлено в противоположную отклонению осциллятора сторону. Таким образом, управление относительными колебаниями имеет характер резонансного воздействия. Перемещение осциллятора в требуемое положение s^f осуществляется посредством постоянного управления $u^{**} = d^+ + d^- \text{sign } \Delta s$, которое не повлияет на величину энергии относительных колебаний в пределах рассматриваемой точности (погрешности $O(\epsilon)$). При $d^+ = 0$ может оказаться более предпочтительным перемещение осциллятора в конечную точку s^f с последующим изменением энергии колебаний. Управление будет глобально оптимальным по быстродействию, если осуществляется одновременное приведение медленных переменных в терминальную точку E^f , s^f , что связано с решением краевой задачи типа (3.2).

Рассмотрим процесс управления движениями осциллятора посредством регулируемого по ускорению перемещения положения равновесия. На основе (4.1) для энергии E относительных колебаний и скорости v получим уравнения, см. (2.4), (2.5),

$$\dot{E} = -\epsilon \dot{q} w, \quad \dot{v} = \epsilon w, \quad w^- \leq w \leq w^+, \quad w^\pm \geq 0 \quad (4.5)$$

Решение для системы (4.5) краевой задачи типа (3.2), (3.3) требует привлечения численных методов в общем случае нелинейных колебаний. При квазилинейной трактовке решение задачи оптимального быстродействия в переменных A , v строится совершенно аналогично изложенному выше случаю управления по скорости. Напомним, $A = \sqrt{2E}$ – амплитуда относительных квазилинейных колебаний. Отличие состоит в том, что в формуле (4.2) для управления u^* ($u^* \rightarrow w^*$) следует совершить замену $\sin \varphi \rightarrow \cos \varphi$. Это означает, что управляющее ускорение положения равновесия должно быть направлено по скорости относительного движения осциллятора для задачи уменьшения энергии (гашения колебаний), т.е. "сила инерции" направлена против скорости относительных колебаний. И наоборот, ускорение положения равновесия направлено против скорости, а "сила инерции" вдоль – для задачи раскачки колебаний.

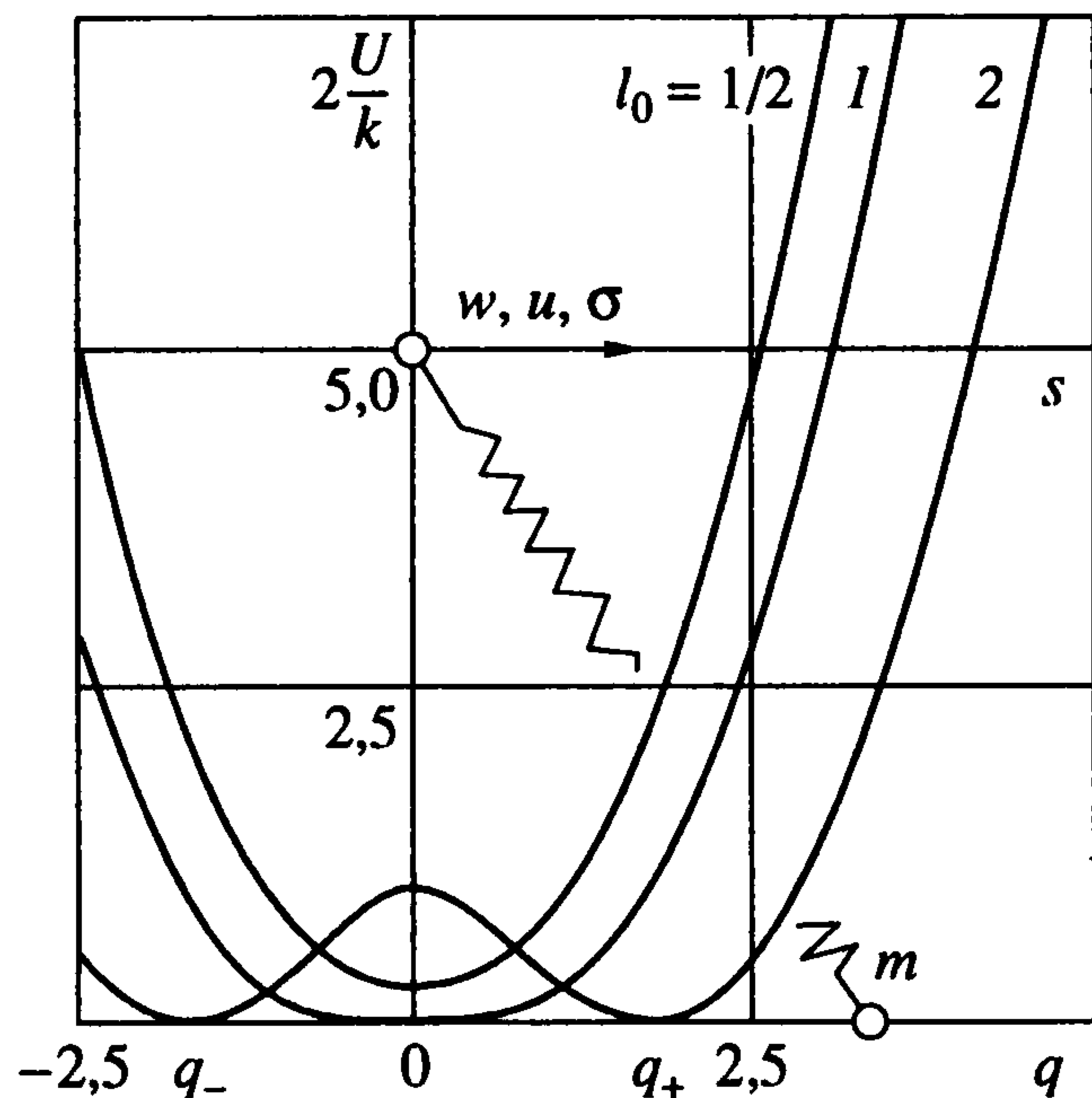
Оптимальное по быстродействию управление нелинейными колебаниями без учета скорости v осуществляется сходным манером, как и выше, см. (4.3), (4.4),

$$w^* = d^+ - d^- \text{sign}(\Delta E \dot{q}), \quad \Delta E = E^f - E, \quad \dot{q} = \pm \sqrt{2(E - U(q))}^{1/2}$$

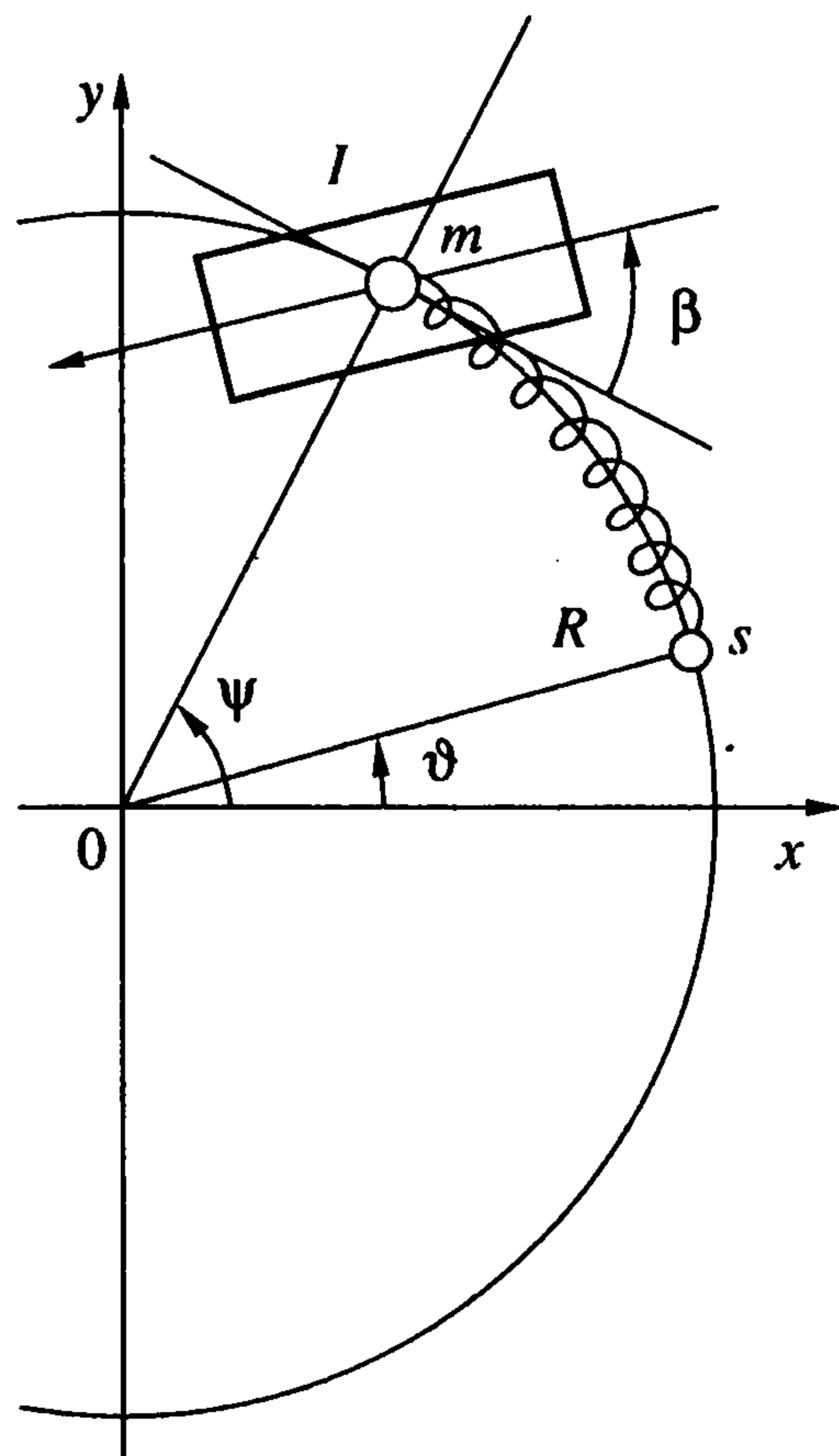
$$\tau = \tau(E, E^0, E^f) = \text{sign } \Delta E \frac{1}{d^-} \int_{E^0}^E \frac{d\chi}{\langle |\dot{q}| \rangle}, \quad \tau_f = \tau(E^f, E^0, E^f) \quad (4.6)$$

$$\langle |\dot{q}| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |\dot{q}| dt = \frac{2}{T(E)} (q^+(E) - q^-(E)), \quad q^\pm = \text{Arg}_q(E - U)$$

В частности, если функция $U(q)$ имеет вид $U = k|q|^\rho$, то колебания происходят в симметричных пределах $q^\pm = \pm (E/k)^{1/\rho}$, зависимость $T(E)$ определена в (4.4). Таким



Фиг. 1



Фиг. 2

образом, среднее $\langle |q| \rangle \sim E^{1/2}$ не зависит от ρ , что свидетельствует о квадратичном характере изменения энергии $E(\tau)$; см. формулу для E (4.4), в которой полагается $\rho = 2$, а в выражении для τ_f множитель равен $\frac{1}{2}\theta(k, \rho)(d^-k^{1/\rho})^{-1}$, где $\rho > 0$ – любое число. После требуемого изменения энергии относительных колебаний с помощью постоянного управления $w^{**} = d^+ + d^- \text{sign} \Delta u$ достигается требуемое значение скорости движения осциллятора как целого. Как отмечалось, последовательность участков процесса управления может быть изменена и модифицирована соответствующим образом.

Рассмотрим задачу управления колебаниями осциллятора посредством регулируемого положения равновесия на основе третьей модели (4.1). Уравнение для изменения энергии E согласно (2.6) в исследуемом первом приближении по ε имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \varepsilon U''_2(x - s^*) \dot{x} \sigma, \quad |\sigma| \leq 1, \quad E(0) = E^0, \quad E(t_f) = E^f \\ E &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x - s^*), \quad U(0) = U'(0) = \dots = U^{(2n-1)}(0) = 0, \quad U^{(2n)} > 0 \\ x^- &\leq x \leq x^+, \quad x^\pm = s^* + \zeta^\pm(E), \quad \zeta^\pm = \text{Arg}_\zeta(E - U(\zeta)) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Используя стандартные приемы, с помощью соотношений для более общей модели (2.6) получим искомое решение задачи оптимального быстрогодействия

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \text{sign}(\Delta E U''_2(x - s^*) \dot{x}), \quad \Delta E = E^f - E < 0 \quad (\Delta E > 0) \\ \tau &= \tau(E, E^0, E^f) = \text{sign} \Delta E^0 \int_{E^0}^E \frac{d\chi}{D(\chi)}, \quad \tau_f = \tau(E^f, E^0, E^f) \\ D(E) &= \frac{1}{T} \int_0^T |U''_2 \dot{x}| dt = \frac{2}{T(E)} (U'_q(\zeta^+) - U'_q(\zeta^-)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из выражений (4.8) следует, что смещения $\varepsilon \sigma$, $\sigma = \pm 1$, точки равновесия s относительно фиксированного значения s^* происходят на каждом периоде колебаний

дважды, в сторону, противоположную скорости отклонения осциллятора, причем это осуществляется в моменты смены знака скорости. Время τ_f будет конечным для $E^f = 0$ (или $E^0 = 0$), если справедлива оценка $D(E) \sim E^\delta$, $\delta < 1$, при малых E . В случае квазилинейных колебаний имеем оценку $D \sim E^{1/2}$. Для степенной нелинейности $U = k|q|^\rho$, $\rho > 0$, получим $\zeta^\pm = \pm (E/k)^{1/\rho}$, т.е. справедлива оценка $D \sim E^{3/2-2/\rho}$, из анализа которой следует неравенство $\rho < 4$ для выполнения условия $\delta < 1$. Таким образом, в случае кубической нелинейности ($U \sim q^4$) и нелинейности более высокого порядка приведение осциллятора в состояние покоя $E^f = 0$ (или выведение из этого состояния $E^0 = 0$) потребует "бесконечного времени" τ_f . Определение зависимостей $E(\tau)$ и времени быстрогодействия $\tau_f(E^0, E^f)$ для нелинейности степенного типа проводится стандартным образом; они получаются в явном виде аналогично соотношениям (4.4) с соответствующими изменениями параметров.

Таким образом, приведенные выше режимы управления колебаниями осциллятора по скорости, ускорению и положению равновесия обладают интересными поучительными свойствами, которые весьма непросто установить из общих интуитивных представлений.

4.2. Модели колебательных механических систем с регулируемым положением равновесия. Выше исследованы задачи оптимального по быстродействию управления для простейшей модели точки или твердого тела, движущихся по прямой, и подверженных упругой возвращающей силе с регулируемым положением равновесия. Заметим, что нелинейная сила $-U'(q)$ может быть реализована посредством наложения идеальных связей на систему с линейными упругими элементами [3, 4]. Предположим, что на одном из концов пружины с линейной характеристикой находится тело массы m , которое может перемещаться без трения вдоль прямой – оси x . Другой конец пружины может перемещаться регулируемым образом вдоль параллельной прямой s (фиг. 1). Пусть расстояние между прямыми равно d , а длина недеформированной пружины $l = l_0$. Тогда для кинетической и потенциальной энергий системы имеют место выражения

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad U = \frac{1}{2} k \delta^2, \quad \delta = l - l_0, \quad l = (d^2 + q^2)^{1/2}, \quad q = x - s \quad (4.9)$$

Переменные и параметры задачи можно нормировать так, что $m = k = d = 1$. При $d > l_0$ пружина для всех q будет растянутой; тогда $q = 0$ – устойчивое положение равновесия типа "центр". Для системы (4.9) могут быть поставлены и приближенно решены аналогичные изученным в разд. 4.1 задачи оптимального быстрогодействия. При малых значениях $|q|$ (относительно больших d) колебания системы будут близкими к линейным, а задача управления может быть исследована в квазилинейной трактовке. При больших отклонениях $|q|$ колебания существенно нелинейны и для задачи можно построить отдельные квазиоптимальные управления.

При $d < l_0$ величина $\delta \geq 0$ в зависимости от q , причем $q = 0$ – неустойчивое положение равновесия тела типа "седло". Наряду с этим положением имеются две симметричные устойчивые точки типа "центр": $q_\pm = \pm (l_0^2 - d^2)^{1/2}$. В этом случае могут быть приближенно исследованы задачи оптимального управления как в окрестности каждой устойчивой точки, так и в целом с учетом перехода через седловую точку (через сепаратрису), отвечающую сжатому состоянию пружины.

Случай $d = l_0$ является критическим, поскольку в функции $U(q)$ отсутствуют квадратичные члены: $U = \frac{1}{8} k d^{-2} q^4 + O(q^6)$, а возвращающая сила $-U'$ при малых $|q|$ будет кубической функцией. Эта ситуация приводит к существенно нелинейным колебаниям, приближенное управление которыми может быть реализовано изложенными выше способами.

Рассмотрим теперь другую плоскую модель одномерных колебаний, изображенную на фиг. 2. Пусть вдоль окружности радиуса R движется точка массы m без трения. На

точку действует нелинейная упругая сила (пружина) с потенциалом $U(q)$ (в частности, $U = \frac{1}{2}kq^2$), где $q = R(\psi - \vartheta)$, ψ – угловая координата точки, а ϑ – угловая координата другого конца пружины или положения равновесия возвращающей силы. Тогда при учете геометрической связи следуют выражения, см. (1.1), (1.2)

$$K = \frac{1}{2}mR^2\dot{\psi}^2, U = U(q), \quad x = R\cos\psi, \quad y = R\sin\psi \quad (4.10)$$

которые приводят к рассмотренной выше модели типа (4.1), т.е. имеет место эквивалентность задач управления движением по окружности и по прямой. Если вдоль окружности перемещается фиксированная точка (например, центр масс) твердого тела, которое сохраняет ориентацию, то выражения (4.10) остаются справедливыми. При этом может быть рассмотрена более сложная зависимость $U(q, s)$, $s = R\vartheta$.

Пусть на тело наложена связь и оно поворачивается вокруг движущегося по окружности центра масс с сохранением направления по отношению к касательной: $\alpha = \pi/2 + \psi + \beta$, где $\beta = \text{const}$, α – угол поворота тела. Тогда суммарная кинетическая энергия при учете вращения равна

$$K = \frac{1}{2}mR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}(mR^2 + I)\dot{\psi}^2$$

и с точностью до постоянного множителя совпадает с выражением (4.10). Это свойство может быть использовано локально для произвольных достаточно гладких кривых и представляет интерес для приложений.

4.3. Осциллятор с регулируемой жесткостью. Для приложений определенное значение имеет исследование задачи управления нелинейными колебательными системами посредством регулируемого изменения в небольших пределах некоторого параметра, характеризующего упругую возвращающую силу, в частности, коэффициент упругости. Этот способ управления представляется весьма эффективным при значительных колебаниях, поскольку он может приводить к быстрому, например экспоненциальному, изменению амплитуды аналогично случаю параметрических колебаний при резонансе. Современные технические и вычислительные средства позволяют осуществить такую модель регулирования в реальном масштабе времени [2–4].

Пусть центр масс твердого тела может перемещаться вдоль фиксированной гладкой кривой $\mathbf{r}(q)$; на тело действует упругая сила с регулируемым коэффициентом κ ; потенциал силы равен $W(\mathbf{r}, \kappa)$; имеем

$$K = \frac{1}{2}a^2(q)\dot{q}^2, \quad W = V(q, \kappa), \quad \kappa = \kappa_0(1 + \varepsilon\mu), \quad |\mu| \leq \mu_0 \quad (4.11)$$

$$a^2(q)\ddot{q} + a(q)a'(q)\dot{q}^2 + V'_q(q, \kappa) = 0, \quad E = \frac{1}{2}a^2(q)\dot{q}^2 + V(q, \kappa_0)$$

$$\dot{q} = pa^{-2}(q), \quad \dot{p} = p^2a'a^{-3}(q) - V'_q(q, \kappa), \quad q^*(\kappa_0) = \arg_q V'_q(q, \kappa_0)$$

$$H = \frac{1}{2}p^2a^{-2}(q) + V(q, \kappa), \quad E = \frac{1}{2}p^2a^{-2}(q) + V(q, \kappa_0)$$

Без ограничения общности массу тела m и параметры κ_0 , μ_0 можно положить равными единице. Особый интерес представляет случай мультипликативной зависимости $V(q, \kappa)$ от κ , т.е. $V'_q = \kappa U'_q(q)$, где U – гладкая функция q . Тогда точка покоя q^* не зависит от параметра κ_0 и можно положить $q^* = 0$; будем считать ее устойчивой. Для невозмущенного интеграла энергии E (4.11) при $\varepsilon > 0$ получим уравнение и краевые условия в первом приближении по ε

$$\dot{E} = \varepsilon F(q)\dot{q}\mu, \quad F = -V''_{q\kappa}(q, 1) \quad (F = -U'_q(q))$$

$$E(0) = E^0, \quad E(t_f) = E^f, \quad t_f \rightarrow \min_\mu, \quad |\mu| \leq 1 \quad (4.12)$$

Решение задачи (4.12) строится приближенно по изложенной выше схеме; имеем следующие выражения:

$$\mu^* = \text{sign}(\Delta E F \dot{q}), \quad \dot{q} = \pm \sqrt{2} a^{-1} (E - V)^{1/2}, \quad \tau_f = \tau(E^f, E^0, E^f) \quad (4.13)$$

$$\tau = \tau(E, E^0, E^f) = \text{sign} \Delta E^0 \int_{E^0}^E \frac{d\chi}{\Phi(\chi)}, \quad \Phi(E) = \frac{1}{T} \int_0^T |F \dot{q}| dt = \frac{4E}{T(E)}$$

Согласно третьему соотношению (4.13) величина τ_f будет конечной при $E^{0f} = 0$, если период $T(E) \sim E^\gamma$, $\gamma > 0$, т.е. частота колебаний неограниченно возрастает при $E \rightarrow 0$. Пусть функция $V = \kappa |q|^\rho$; тогда согласно соотношениям (4.4) получим

$$T(E) = \theta(\kappa, \rho) E^{1/\rho - 1/2}, \quad \Phi(E) = (4/\theta) E^{-1/\rho + 3/2} \quad (4.14)$$

Из выражений (4.13), (4.14) следует условие управляемости $\rho < 2$; оно означает, что в случае линейной упругости (и степенной зависимости потенциала от смещения более высокого порядка) требуется неограниченное время τ_f при $E^{0f} \rightarrow 0$. Искомые зависимости $E(\tau)$ и τ_f определяются явно, см. (4.4). Отметим, что оптимальное управление μ^* четырежды изменяет знак на интервале времени t , равном периоду, так как $\text{sign}(F(q - q^*)) = 1$. При более сложном поведении потенциала $V(q, 1)$ система (4.11) может иметь несколько положений равновесия. Эта ситуация требует дополнительного изучения проблемы управления, обусловленной наличием седловых точек и переходом фазовой траектории через сепаратрису.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00222).

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
4. Akulenko L.D. Problems and Methods of Optimal Control. Dordrecht: Kluwer, 1994. 357 p.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
6. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1974. 507 с.
7. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.VI.2000