

УДК 531.36

© 2001 г. Г.А. Леонов

ОЦЕНКИ АТТРАКТОРОВ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ ОРБИТ В СИСТЕМЕ ЛОРЕНЦА

Получены частотные оценки ляпуновской размерности аттракторов нелинейных динамических систем. Для системы Лоренца доказана теорема о локализации глобальных аттракторов. Эта теорема применяется для получения верхних оценок ляпуновской размерности аттракторов и для доказательства существования гомоклинических орбит в системе Лоренца.

1. Введение. Результаты [1] о верхних оценках хаусдорфовой размерности аттракторов стимулировали введение новой размерностной характеристики инвариантных множеств динамических систем – ляпуновской размерности (ЛР) [2–7]. Являясь верхней оценкой хаусдорфовой размерности, ЛР оказывается часто близка к хаусдорфовой при численном анализе многих конкретных динамических систем с хаотическим поведением [2]. В последнее время выяснилось, что и фрактальная размерность также оценивается сверху ЛР [8, 9]. Таким образом, определяясь через ляпуновские экспоненты, понятие ЛР является связующим звеном между классической теорией устойчивости движения и современной теорией размерности аттракторов динамических систем.

В настоящей работе частотные методы анализа нелинейных систем, развивавшиеся первоначально в рамках теории управления [10–12], используются для оценок ЛР аттракторов. Наиболее эффективно эти оценки используются в совокупности с теоремами о локализации аттракторов в некоторой части фазового пространства. Такой подход здесь продемонстрирован на широко известной системе Лоренца, являющейся трехмодовой моделью двумерной конвекции [2, 13]. Полученные здесь локализационные оценки глобальных аттракторов системы Лоренца в ряде случаев асимптотически точны. Равномерность этих оценок по параметрам позволила применить формулы асимптотического интегрирования для доказательства существования гомоклинических орбит.

Напомним здесь некоторые определения для системы

$$dx/dt = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

где $f(x)$ – гладкая вектор-функция, $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство.

Определение 1. Будем говорить, что множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является *инвариантным*, если для любой точки $x_0 \in K$ выполнено включение $x(t, x_0) \in K, \forall t \in (-\infty, +\infty)$.

Здесь $x(t, x_0)$ – решение системы (1.1) с начальными данными $x(0, x_0) = x_0$.

Определение 2. Будем говорить, что множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является *глобально притягивающим*, если для любого решения $x(t, x_0)$ системы (1.1) выполнено соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{u \in K} |x(t, x_0) - u| = 0$$

Здесь $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. Будем говорить, что множество K является *равномерно глобально притягивающим*, если для любого шара $B \subset \mathbb{R}^n$ и числа $\varepsilon > 0$ существует число $\tau(B, \varepsilon) > 0$, такое, что $x(t, x_0) \in K_\varepsilon \quad \forall t \geq \tau(B, \varepsilon), \forall x_0 \in B$.

Здесь K_ε – ε -окрестность множества K .

Определение 4. Глобально притягивающее, ограниченное, инвариантное множество K называется *глобальным аттрактором* системы (1.1).

Определение 5. Равномерно глобально притягивающее, ограниченное, инвариантное множество K называется *глобальным B -аттрактором* системы (1.1).

Обозначим через $F_t z$ оператор сдвига по траекториям системы (1.1):

$$F_t z = x(t, z), \quad x(0, z) = z$$

Известно, что матрица

$$X(t, z) = \partial F_t / \partial z, \quad X(0, z) = I$$

является фундаментальной матрицей линейной системы

$$dy/dt = \partial f / \partial x|_{x=x(t,z)} y \quad (1.2)$$

Здесь $\partial f / \partial x$ – матрица Якоби вектор-функции $f(x)$ в точке x .

Обозначим через $\alpha_1(t, z) \geq \dots \geq \alpha_n(t, z)$ сингулярные числа матрицы $X(t, z)$. Напомним, что сингулярным числом $\alpha_j(t, z)$ матрицы $X(t, z)$ называется квадратный корень соответствующего собственного значения $\rho_j(t, z)$ матрицы $X(t, z)^* X(t, z)$. Здесь $\rho_1(t, z) \geq \dots \geq \rho_n(t, z)$ и звездочка означает в вещественном случае транспонирование, а в комплексном – эрмитово сопряжение.

Обозначим через $\omega_j(t, z)$ произведение сингулярных чисел

$$\omega_j(t, z) = \alpha_1(t, z) \dots \alpha_j(t, z)$$

Последовательно введем следующие обозначения:

$$\mu_1(z) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \omega_1(t, z), \quad \mu_j(z) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \omega_j(t, z) - M_{j-1}(z)$$

$$M_j(z) = \mu_1(z) + \dots + \mu_j(z)$$

Видно, что

$$\mu_j(z) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \alpha_j(t, z) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \omega_j(t, z)^{1/j} \leq \frac{1}{j} M_j(z) \quad (1.3)$$

Пусть $\sup_{z \in K} \mu_1(z) \geq 0$ и $d \in [1, n-1]$ – наименьшее целое число, для которого выполнено неравенство

$$M_{d+1}(z) < 0, \quad \forall z \in K \quad (1.4)$$

В дальнейшем будем рассматривать такие множества K , для которых неравенство (1.4) выполнено для некоторого $d \in [1, n-1]$. В этом случае из неравенств (1.3) следует корректность следующего определения.

Определение 6. Число

$$\dim_L K = d + \sup_{z \in K} (M_d(z) / |\mu_{d+1}(z)|)$$

называется *ляпуновской размерностью* $\dim_L K$ множества K .

2. Частотные оценки ляпуновской размерности инвариантных множеств. Для оценок $\dim_L K$ инвариантных множеств нелинейных систем (1.1) потребуются оценки сингулярных чисел $\alpha_1(t) \geq \dots \geq \alpha_n(t)$ фундаментальной матрицы $Y(t)$ ($Y(0) = I$) ли-

нейной системы

$$dy/dt = A(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

Здесь $A(t)$ – непрерывная $(n \times n)$ -матрица.

Обозначим через $u_1(t), \dots, u_n(t)$ ортонормальную систему собственных векторов матрицы $Y(t)^*Y(t)$, такую, что

$$Y(t)^*Y(t)u_j(t) = \alpha_j(t)^2 u_j(t)$$

Напомним, что линейный оператор $Y(t)$ преобразует ортонормальную систему $u_1(t), \dots, u_n(t)$ в ортогональную и $|Y(t)u_j(t)| = \alpha_j(t)$.

Введем в рассмотрение некоторое линейное k -мерное подпространство $L_k \subset \mathbb{R}^n$ и неотрицательную функцию $\varphi(t)$.

Лемма 1. Пусть для любого вектора $v \in L_k$ выполнена оценка

$$|Y(t)v| \geq \varphi(t)|v|$$

Тогда $\alpha_k(t) \geq \varphi(t)$.

Доказательство. Зафиксируем параметр t и выберем ненулевой вектор $v \in L_k$ так, чтобы $v^* u_j(t) = 0, \forall j = 1, \dots, k-1$. Отсюда следует, что имеет место следующее разложение v по базису $u_1(t), \dots, u_n(t)$:

$$v = \sum_{j=k}^n \beta_j u_j(t), \quad \beta_j \in \mathbb{R}^1$$

Используя это равенство, ортонормальность $u_j(t)$ и условие леммы, получим

$$\varphi(t)^2 |v|^2 \leq |Y(t)v|^2 = \sum_{j=k}^n \beta_j^2 \alpha_j(t)^2 \leq \alpha_k(t)^2 |v|^2$$

Рассмотрим теперь симметричную матрицу H , которая имеет не менее чем k отрицательных собственных значений, квадратичную форму $V(x) = x^* H x$ и множество $\Omega = \{x | x^* H x < 0\}$.

Лемма 2. Предположим, что для некоторой функции $\lambda(t)$ и любого вектора $z \in \Omega$

$$z^* H A(t) z + \lambda(t) z^* H z \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

Тогда существует положительное число β , такое, что

$$\alpha_k(t) \geq \beta E(t), \quad \forall t \geq 0; \quad E(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right) \quad (2.3)$$

Доказательство. Запишем неравенство (2.2) в форме

$$(V(y(t))E^{-2}(t))^* \leq 0$$

Отсюда следует, что

$$V(y(t)) \leq V(y(0))E^2(t)$$

Из этого неравенства и ограничения на спектр матрицы H получим, что существует k -мерное линейное подпространство L_k и число β , для которых

$$|y(t)| \geq \beta |y(0)| E(t), \quad \forall y(0) \in L_k$$

Из этой оценки по лемме 1 следует неравенство (2.3).

Рассмотрим теперь симметричную матрицу M , имеющую не менее k положительных собственных значений, квадратичную форму $W(x) = x^* M x$ и множество $\Phi = \{x | x^* M x > 0\}$.

Лемма 3. Предположим, что для некоторой функции $\psi(t)$ и любого вектора $z \in \Phi$

$$z^* A(t)z + \psi(t)z^* Mz \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.4)$$

Тогда существует положительное число C , такое, что

$$\alpha_{n-k+1}(t) \leq C \exp\left(-\int_0^t \psi(\tau) d\tau\right), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.5)$$

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\dot{z} = -A(t)^* z$$

и ее фундаментальную матрицу $Z(t)$ с начальным условием $Z(0) = I$. Известно, что [14]

$$Z(t)^* Z(t) = (Y(t)^* Y(t))^{-1}$$

Следовательно, $\gamma_j(t) = \alpha_{n-j+1}(t)^{-1}$, где $\gamma_j(t)$ – сингулярные числа матрицы $Z(t)$, такие, что $\gamma_1(t) \geq \dots \geq \gamma_n(t)$.

Введем обозначения

$$H = -M, \quad \lambda(t) = -\psi(t), \quad A_0(t) = -A(t)^*, \quad C = \beta^{-1}$$

Тогда условие (2.4) примет форму (2.2) с матрицей $A(t) = A_0(t)$.

Используя лемму 2, получим оценку (2.5).

Рассмотрим систему (2.1) с матрицей $A(t) = A + BU(t)$, где A – постоянная $(n \times n)$ -матрица, B – постоянная $(n \times m)$ -матрица, $U(t)$ – непрерывная $(m \times n)$ -матрица.

Рассмотрим далее эрмитову форму $F_k(z, \xi)$ комплексных векторных переменных $z \in C^n, \xi \in C^m$ ($k = 1, \dots, n$).

Предположим, что существует $(n \times m)$ -матрица Q_k и положительное число ε , такие, что

$$F_k(x, Q_k^* x) \geq \varepsilon |Q_k^* x|^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad (2.6)$$

Предположим также, что

$$F_k(x, U(t)x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.7)$$

Лемма 4. Пусть пара (A, B) полностью управляема, пары (A, Q_k) полностью наблюдаемы и для некоторого набора чисел $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ выполнены следующие условия:

1) матрицы $A + BQ_k^* + \lambda_k I$ имеют k или более собственных значений с положительными вещественными частями

2) для всех $k = 1, \dots, n$ и всех $\omega \in \mathbf{R}^1$

$$F_k([(i\omega - \lambda_k)I - A]^{-1} B\xi, \xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in C^m \quad (2.8)$$

Тогда для сингулярных чисел $\alpha_k(t)$ фундаментальной матрицы системы (2.1) существуют числа $\beta_k > 0$, такие, что

$$\alpha_k(t) \geq \beta_k \exp(-\lambda_k t), \quad \forall t \geq 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Напомним, что пара (A, B) называется вполне управляемой, если ранг матрицы $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ равен n . Пара (A, Q) называется вполне наблюдаемой, если вполне управляема пара (A^*, Q) .

Доказательство. Из условия 2 леммы следует, что по лемме Якубовича–Калмана [10–12] существует симметричная матрица H_k , для которой выполнено неравенство

$$2z^* H_k [(A + \lambda_k I)z + B\xi] + F_k(z, \xi) \leq 0, \quad \forall z \in \mathbf{R}^n, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^m \quad (2.10)$$

Полагая здесь $\xi = Q_k^* z$ и используя неравенство (2.6), получим

$$2z^* H_k (A + \lambda_k I + B Q_k^*) z \leq -\varepsilon |Q_k^* z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Из этого неравенства и условия 1 леммы находим, что матрица H_k имеет не менее чем k отрицательных собственных значений [11, 12].

Из условия (2.7) и неравенства (2.10) следует, что для функции $V_k(y) = y^* H_k y$ и для любого решения $y(t)$ системы (1.2) выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(y(t)) + 2\lambda_k V_k(y(t)) &= 2y(t)^* H_k [(A + \lambda_k I)y(t) + BU(t)y(t)] + \\ &+ F_k(y(t), U(t)y(t)) - F_k(y(t), U(t)y(t)) \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отсюда по лемме 2 следует оценка (2.9).

Лемма 5. Пусть в формулировке леммы 4 условие 1 заменено следующим: матрицы $A + BQ_k + \lambda_k I$ имеют k или более собственных значений с отрицательными вещественными частями.

Тогда для сингулярных чисел $\alpha_k(t)$ фундаментальной матрицы системы (2.1) существуют числа $\beta_k > 0$, такие, что

$$\alpha_{n-k+1}(t) \leq \beta_k \exp(-\lambda_k t), \quad \forall t \geq 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4. При этом вместо леммы 2 здесь используется лемма 3.

Рассмотрим теперь систему

$$dx/dt = Ax + Bg(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.13)$$

где A и B – постоянные $(n \times n)$ - и $(n \times m)$ -матрицы, $g(x)$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция.

Предположим, что на ограниченном, инвариантном относительно системы (2.13) множестве K выполнена оценка

$$\gamma(x) + \dot{v}(x) \leq -\gamma_0, \quad \forall x \in K; \quad \gamma(x) = \text{tr}(A + B \partial g / \partial x) \quad (2.14)$$

Здесь $\partial g / \partial x$ – матрица Якоби вектор-функции $g(x)$ в точке x , γ_0 – некоторое положительное число, $v(x)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n$ функция, причем

$$\dot{v}(x) = (Ax + Bg(x))^* \text{grad} v(x)$$

Будем также здесь предполагать, что для некоторых эрмитовых форм $F_k(z, \xi)$ и матриц Q_k выполнены неравенства (2.6). Вместо неравенств (2.7) предположим здесь, что выполнены соотношения

$$F_k(y, (\partial g / \partial x)y) \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in K \quad (2.15)$$

Теорема 1. Пусть пара (A, B) полностью управляема, пары (A, Q_k) полностью наблюдаемы и для некоторого набора положительных чисел $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ выполнены условия 1 и 2 леммы 4.

Пусть для некоторого натурального числа m и числа $s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} -\gamma_0 + (1-s)\lambda_{m+1} + \Lambda_{m+2}^n < 0 \quad \text{при } m < n-1; \quad \Lambda_m^n = \sum_{j=m}^n \lambda_j \\ -\gamma_0 + (1-s)\lambda_{m+1} < 0 \quad \text{при } m = n-1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Тогда

$$\dim_L K \leq m + s \quad (2.17)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $m < n - 1$. Покажем сначала, что

$$M_{m+1}(z) < 0, \quad \forall z \in K \quad (2.18)$$

Для этого воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_n(t, z) &= \exp \int_0^t \gamma(x(\tau, z)) d\tau = \left[\exp \int_0^t (\gamma(x(\tau, z)) + \dot{\nu}(x(\tau, z))) d\tau \right] \frac{\exp \nu(z)}{\exp \nu(x(t, z))} \leq \\ &\leq C \exp(-\gamma_0 t), \quad C = \sup_{x \in K} \exp \nu(x) / \inf_{z \in K} \exp \nu(z) \\ \omega_{m+1}(t, z) &= \omega_n(t, z) \alpha_{m+2}(t, z)^{-1} \dots \alpha_n(t, z)^{-1} \end{aligned}$$

Отсюда по лемме 4 следует, что

$$\omega_{m+1}(t, z) \leq C \prod_{j=m+1}^n \beta_j^{-1} \exp[(-\gamma_0 + \Lambda_{m+2}^n)t], \quad \forall t \geq 0 \quad (2.19)$$

Учитывая положительность чисел λ_j , отсюда и из условия (2.16) получим существование положительного числа ε , для которого

$$\omega_{m+1}(t, z) \leq C \prod_{j=m+2}^n \beta_j^{-1} \exp(-\varepsilon t) \quad (2.20)$$

Поскольку

$$M_{m+1}(z) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \omega_{m+1}(t, z)$$

из неравенства (2.20) получаем оценку (2.18)

Как было отмечено ранее, из неравенства (2.18) следует и оценка

$$\mu_{m+1}(z) < 0, \quad \forall z \in K$$

Рассмотрим тождество

$$\mu_{m+1}(z) \left(s - \frac{M_m(z)}{-\mu_{m+1}(z)} \right) = s \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \omega_{m+1}(t, z) + (1-s) \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \omega_m(t, z) \quad (2.21)$$

Запишем оценку (2.19), проведя замену $m \rightarrow m - 1$

$$\omega_m(t, z) \leq C \prod_{j=m+1}^n \beta_j^{-1} \exp[(-\gamma_0 + \Lambda_{m+1}^n)t], \quad \forall t \geq 0 \quad (2.22)$$

Из тождества (2.21) и оценок (2.19), (2.22) получим, что

$$\mu_{m+1}(z) \left(s - \frac{M_m(z)}{-\mu_{m+1}(z)} \right) \leq s(-\gamma_0 + \Lambda_{m+2}^n) + (1-s)(-\gamma_0 + \Lambda_{m+1}^n)$$

Отсюда, из неравенства (2.16) и отрицательности величины $\mu_{m+1}(z)$ получим оценку

$$s \geq \frac{M_m(z)}{|\mu_{m+1}(z)|}, \quad \forall z \in K \quad (2.23)$$

В случае $\sup_K M_m(z) < 0$ из определения ляпуновской размерности сразу получим оценку $\dim_L K \leq m$, и теорема доказана. В случае $\sup_K M_m(z) \geq 0$ из неравенства (2.23) получаем оценку (2.17).

Случай $m = n - 1$ рассматривается аналогичным образом, причем вместо неравенства (2.19) следует лишь записать оценку

$$\omega_{m+1}(t, z) \leq C \exp(-\gamma_0 t)$$

Теорема 2. Пусть пара (A, B) полностью управляема, пары (A, Q_k) полностью наблюдаемы и для некоторого набора чисел $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ выполнены условия 1 и 2 леммы 5.

Предположим, что для некоторого натурального $m \in [1, n - 1]$ и $s \in [0, 1]$ выполнены неравенства

$$\lambda_{n-m} > 0, \quad \Lambda_{n-m+1}^n + s\lambda_{n-m} > 0 \quad (2.24)$$

Тогда справедлива оценка (2.17).

Доказательство. Покажем сначала, что выполнено неравенство (2.18). Для этого заметим, что из положительности λ_{n-m} и неравенства (2.24) следует оценка $\Lambda_{n-m}^n > 0$. Из оценки (2.12) вытекает неравенство

$$\omega_{m+1}(t, z) \leq \prod_{n-m}^n \beta_j \exp(-\Lambda_{n-m}^n t) \quad (2.25)$$

Отсюда сразу следует неравенство (2.18).

Ясно также, что

$$\omega_m(t, z) \leq \prod_{n-m+1}^n \beta_j \exp(-\Lambda_{n-m+1}^n t) \quad (2.26)$$

Из тождества (2.21) и неравенств (2.25) и (2.26) следует оценка (2.23). Далее доказательство теоремы 2 полностью совпадает с соответствующей аргументацией, приведенной в доказательстве теоремы 1.

3. Локализационные оценки глобальных аттракторов системы Лоренца. Рассмотрим систему Лоренца

$$\dot{X} = -d(X - Y), \quad \dot{Y} = rX - Y - XZ, \quad \dot{Z} = -bZ + XY \quad (3.1)$$

где d, r, b – положительные числа. Пусть, кроме того, $r > 1$ и $2d > b$. Отметим, что при нарушении одного из этих условий система (3.1) является глобально асимптотически устойчивой [11, 15], т.е. любое ее решение стремится при $t \rightarrow +\infty$ к некоторому состоянию равновесия.

Наряду с системой (3.1) будем рассматривать эквивалентную ей систему

$$\dot{\sigma} = \eta, \quad \dot{\eta} = -\mu\eta - \xi\sigma - \varphi(\sigma), \quad \dot{\xi} = -\alpha\xi - \beta\sigma\eta \quad (3.2)$$

где

$$\varphi(\sigma) = -\sigma + \gamma\sigma^3, \quad \sigma = \frac{\varepsilon X}{\sqrt{2d}}, \quad \eta = \varepsilon^2(Y - X)\sqrt{2}, \quad \xi = \varepsilon^2\left(Z - \frac{X^2}{b}\right)$$

$$t = \frac{t_1 \sqrt{d}}{\varepsilon}, \quad \mu = \frac{\varepsilon(d+1)}{\sqrt{d}}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon b}{\sqrt{d}}, \quad \varepsilon = (r-1)^{-1/2}$$

$$\beta = 2\left(\frac{2d}{b} - 1\right), \quad \gamma = \frac{2d}{b}$$

Хорошо известно [11, 12, 15], что поверхности

$$\psi_1 = \{(r - Z)^2 + Y^2 = M^2 + \rho\} \text{ и } \psi_2 = \{Z - X^2/(2d) = -\rho\}$$

где $\rho > 0$ и

$$M = \begin{cases} r & \text{при } b \leq 2 \\ br/(2\sqrt{b-1}) & \text{при } b \geq 2 \end{cases}$$

являются бесконтактными для решений системы (3.1). Поэтому на глобальном аттракторе системы (3.1) выполнены неравенства

$$(r - Z)^2 + Y^2 \leq M^2 \quad (3.3)$$

$$Z \geq X^2/(2d) \quad (3.4)$$

Отсюда вытекает, что выполнены следующие неравенства на глобальном аттракторе системы (3.2):

$$-\frac{M}{\sqrt{2}(r-1)} - \frac{\sqrt{d}\sigma}{\sqrt{r-1}} \leq \eta \leq \frac{M}{\sqrt{2}(r-1)} - \frac{\sqrt{d}\sigma}{\sqrt{r-1}} \quad (3.5)$$

$$\xi > -\beta\sigma^2/2 \quad \text{при } \sigma \neq 0 \quad (3.6)$$

Используя оценку (3.4), введем систему сравнения [15, 16]

$$\dot{\sigma} = \eta, \quad \dot{\eta} = -\mu\eta + \sigma - \sigma^3 \quad (3.7)$$

которая эквивалентна уравнению первого порядка

$$P \frac{dP}{d\sigma} + \mu P - \sigma + \sigma^3 = 0 \quad (3.8)$$

Положительные на множестве $[0, \sigma_0)$ решения $P_1(\sigma)$ этого уравнения с начальными данными $P_1(\sigma_0) = 0$ определяют следующие бесконтактные поверхности системы (3.2) в полупространстве $\{\sigma \geq 0\}$:

$$\{\eta = P_1(\sigma), \quad \eta > 0, \quad \sigma \in [0, \sigma_0]\} \quad (3.9)$$

$$\{\eta < 0, \quad \sigma = \sigma_0\} \quad (3.10)$$

Отрицательные на множестве $(-\sigma_0, 0]$ решения $P_2(\sigma)$ уравнения (3.8) с начальными данными $P_2(-\sigma_0) = 0$ определяют следующие бесконтактные поверхности для системы (3.2) в полупространстве $\{\sigma \leq 0\}$:

$$\{\eta = P_2(\sigma), \quad \eta < 0, \quad \sigma \in [-\sigma_0, 0]\} \quad (3.11)$$

$$\{\eta > 0, \quad \sigma = -\sigma_0\} \quad (3.12)$$

Отсюда и из оценки (3.5) следует, что если график $P = P_1(\sigma)$ пересекается с графиком прямой

$$P = \frac{M}{\sqrt{2}(r-1)} - \frac{\sqrt{d}\sigma}{\sqrt{r-1}}$$

в некоторой точке σ_1 на интервале $(0, \sigma_0)$, то на глобальном аттракторе K системы (3.2) выполнены неравенства

$$\sigma < \sigma_0, \quad \eta < P_1(\sigma) \quad \text{при } \sigma \in [\sigma_1, \sigma_0] \quad (3.13)$$

Аналогично, если график $P = P_2(\sigma)$ пересекается с графиком прямой

$$P = -\frac{M}{\sqrt{2}(r-1)} - \frac{\sqrt{d}\sigma}{\sqrt{r-1}}$$

в некоторой точке σ_2 на интервале $(-\sigma_0, 0)$, то на глобальном аттракторе K системы

(3.2) выполнены неравенства

$$\sigma > -\sigma_0, \quad \eta > P_2(\sigma) \quad \text{при} \quad \sigma \in [-\sigma_0, \sigma_2] \quad (3.14)$$

Заметим, что в полосе $\{|\sigma| \leq \sigma_0\}$ поверхности $\{\xi = C - \beta\sigma^2/2, \quad C > \beta\sigma_0^2/2\}$ являются бесконтактными для системы (3.2). Поэтому на глобальном аттракторе системы (3.2) выполнена оценка

$$\xi \leq \beta(\sigma_0^2 - \sigma^2)/2 \quad (3.15)$$

Таким образом, здесь доказан следующий результат.

Теорема 3. На глобальном аттракторе системы (3.1) выполнены оценки (3.3) – (3.6), (3.13) – (3.15).

Аналогичный результат справедлив и для глобального B -аттрактора системы (3.2).

Приведем одну простую оценку величины σ_0 . Для этого заметим, что для выполнения неравенств (3.13) достаточно пересечения графиков $P = P_1(\sigma)$ с прямой $P = M/(\sqrt{2}(r-1))$.

Из положительности μ в уравнении (3.8) следует оценка

$$P_1(\sigma)^2 > (\sigma^2 - \sigma_0^2) - \frac{1}{2}(\sigma^4 - \sigma_0^4)$$

Поэтому для упомянутого выше пересечения достаточно выполнения равенства

$$(1 - \sigma_0^2) - \frac{1}{2}(1 - \sigma_0^4) = \frac{M^2}{2(r-1)^2}$$

Из этого уравнения получим

$$\sigma_0 = \sqrt{1 + \frac{M}{r-1}} \quad (3.16)$$

Аналогичные рассуждения можно привести и для оценки (3.14).

Из соотношения (3.16) следует, что любой глобальный аттрактор системы (3.2) расположен в области, равномерно ограниченной по параметру $r \in (1, +\infty)$. Для глобальных B -аттракторов в случае $b \leq 2$ оценки (3.5), (3.13), (3.14) асимптотически точны при $r \rightarrow +\infty$. В самом деле, в этом случае при $r \rightarrow +\infty$ на B -аттракторе имеем неравенства

$$|\eta| \leq 1/\sqrt{2}, \quad |\sigma| \leq \sqrt{2}$$

Напомним, что частью B -аттрактора являются неустойчивые многообразия нулевого состояния равновесия, которые в нулевом приближении (при малых ε) можно представить формулами

$$\{\xi = -\beta\sigma^2/2, \quad \eta^2 = \sigma^2 - \sigma^4/2\}$$

Таким образом, при больших r B -аттрактор имеет точки, близкие к плоскостям $\{|\sigma| = \sqrt{2}\}, \quad \{|\eta| = 1/\sqrt{2}\}$.

4. Оценки ляпуновской размерности аттрактора системы Лоренца. Здесь применим к системе (3.1) частотную теорему 1 и локализационную теорему 3.

Запишем систему (3.1) в форме (2.13), где

$$A = \begin{pmatrix} -d & d & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} (r-Z)X \\ XY \end{pmatrix}$$

Сконструируем эрмитову форму следующим образом:

$$F_k(z, \xi) = \bar{\xi}_1 z_2 + \bar{\xi}_2 z_3 + \xi_1 \bar{z}_2 + \xi_2 \bar{z}_3 + \\ + M(\kappa |z_1|^2 + \kappa^{-1} |z_2|^2 + \kappa^{-1} |z_3|^2)$$

Здесь ξ_j и z_j – компоненты векторов ξ и z , M и κ – некоторые положительные параметры, которые будут определены позже.

В рассматриваемом случае неравенство (2.15) примет вид

$$2[(r - Z)y_2 + Yy_3]y_1 + M(\kappa |y_1|^2 + \kappa^{-1} |y_2|^2 + \kappa^{-1} |y_3|^2) \geq 0$$

$$\forall y_j \in \mathbf{R}^1, \quad j = 1, 2, 3$$

Это неравенство выполнено, если

$$(r - Z)^2 + Y^2 \leq M^2$$

Последнее неравенство совпадает с оценкой (3.3).

В рассматриваемом случае

$$[pI - A]^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{d}{(p+d)(p+1)} \xi_1 \\ \frac{1}{p+1} \xi_1 \\ \frac{1}{p+b} \xi_2 \end{pmatrix}, \quad p \in C^1$$

Следовательно, условие (2.8) примет вид

$$2(\lambda_k - 1) \geq \kappa^{-1} M + \kappa d^2 M / (\lambda_k - d)^2$$

$$2(\lambda_k - b) \geq \kappa^{-1} M$$

Возьмем $k = 3$, $\kappa = d^{-1}(\lambda_3 - d)$ и запишем неравенство (2.16) в форме

$$\lambda_3(1 - s) < d + b + 1$$

Таким образом, из теоремы 1 можно получить следующее утверждение.

Следствие 1. Если $d \geq b - 2$ и для некоторого $s \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$\left(\frac{d+b+1}{1-s} - 1 \right) \left(\frac{d+b+1}{1-s} - d \right) > Md$$

то $\dim_L K \leq 2 + s$.

При дополнительном условии $1 < b < d$ эта оценка была установлена ранее [5].

5. Существование гомоклинических орбит в системе Лоренца. Обозначим через $\sigma(t)^+$, $\xi(t)^+$, $\eta(t)^+$ сепаратрису седла $\sigma = \xi = \eta = 0$, выходящую в полуплоскость $\{\sigma > 0\}$, т.е. рассмотрим такое решение системы (3.2), что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sigma(t)^+ = \lim_{t \rightarrow -\infty} \xi(t)^+ = \lim_{t \rightarrow -\infty} \eta(t)^+ = 0$$

и $\sigma(t)^+ > 0$ при $t \in (-\infty, T)$. Здесь T – некоторое число или $+\infty$. Хорошо известно [15–17], что при фиксированных параметрах d и b и параметре r , достаточно близком к единице, величина $T = +\infty$.

Определение 7. Если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t)^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t)^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t)^+ = 0$$

то траекторию $\sigma(t)^+$, $\xi(t)^+$, $\eta(t)^+$ будем называть *гомоклинической орбитой*.

Введем в рассмотрение гладкий путь $b(s), d(s), r(s)$ ($s \in [0, 1]$) в пространстве параметров $\{b, d, r\}$.

Основным результатом этого раздела является следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть для системы (3.2) с параметрами $b(0), d(0), r(0)$ существуют числа $T > \tau$, для которых выполнены соотношения

$$\sigma(T)^+ = \eta(\tau)^+ = 0 \quad (5.1)$$

$$\sigma(t)^+ > 0, \quad \forall t < T \quad (5.2)$$

$$\eta(t)^+ \neq 0, \quad \forall t < T, \quad t \neq \tau \quad (5.3)$$

Предположим также, что для системы (3.2) с параметрами $b(1), d(1), r(1)$ выполнено неравенство

$$\sigma(t)^+ > 0, \quad \forall t \in (-\infty, +\infty) \quad (5.4)$$

Тогда существует число $s_0 \in [0, 1]$, такое, что система (3.2) с параметрами $b(s_0), d(s_0), r(s_0)$ имеет гомоклиническую орбиту $\sigma(t)^+, \eta(t)^+, \xi(t)^+$.

Для доказательства этого утверждения потребуются следующие леммы.

Лемма 6. Если для системы (3.2) выполнены условия

$$\eta(\tau)^+ = 0, \quad \eta(t)^+ > 0, \quad \forall t \in (-\infty, \tau)$$

то $\dot{\eta}(\tau)^+ < 0$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\dot{\eta}(\tau)^+ = 0$. В этом случае из последних двух уравнений системы (3.2) получим равенство

$$\ddot{\eta}(\tau)^+ = \alpha \xi(\tau)^+ \sigma(\tau)^+ \quad (5.5)$$

Из соотношений $\eta(t)^+ > 0, \sigma(t)^+ > 0, \forall t \in (-\infty, \tau)$ и из последнего уравнения системы (3.2) получим, что $\xi(t)^+ < 0 \forall t \in (-\infty, \tau]$. Отсюда и из (5.5) следует неравенство $\ddot{\eta}(\tau)^+ < 0$. Последнее противоречит предположению $\dot{\eta}(\tau)^+ = 0$ и условиям леммы. Полученное противоречие доказывает лемму 6.

Лемма 7. Пусть для системы (3.2) выполнены соотношения (5.1), (5.2) и неравенства

$$\begin{aligned} \eta(t)^+ &> 0, \quad \forall t \in (-\infty, \tau) \\ \eta(t)^+ &\leq 0, \quad \forall t \in (\tau, T) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Тогда выполнено также и неравенство (5.3).

Доказательство. Предполагая противное, получим существование числа $\rho \in (\tau, T)$, для которого выполнены соотношения

$$\eta(\rho)^+ = \dot{\eta}(\rho)^+ = 0$$

$$\ddot{\eta}(\rho)^+ = \alpha \sigma(\rho)^+ \xi(\rho)^+ < 0$$

$$\eta(t)^+ < 0, \quad \forall t \in (\rho, T)$$

Отсюда, из условий (5.1), (5.2) и из того факта, что траектории $\sigma(t) = \eta(t) = 0, \xi(t) = \xi(0)\exp(-\alpha t)$ принадлежат устойчивому многообразию седла $\sigma = \eta = \xi = 0$, получим пересечение сепаратрисы $\sigma(t)^+, \eta(t)^+, \xi(t)^+$ и этого устойчивого многообразия. Но тогда сепаратриса полностью принадлежит устойчивому многообразию седла. При этом выполняется условие

$\sigma(t)^+ > 0, \forall t \geq p$. Последнее противоречит условию (5.1). Полученное противоречие доказывает лемму 7.

Можно дать следующую геометрическую интерпретацию доказательства леммы 7 в фазовом пространстве с координатами σ, η, ξ . "Под" множеством $\{\sigma > 0, \eta = 0, \xi \leq 1 - \gamma\sigma^2\}$ расположен кусок устойчивого двухмерного многообразия седла $\sigma = \eta = \xi = 0$. Это не позволяет траектории с начальными данными из этого множества достичь плоскости $\{\sigma = 0\}$, оставаясь в квадранте $\{\sigma \geq 0, \eta \leq 0\}$.

Рассмотрим полином

$$p^3 + ap^2 + bp + c \quad (5.7)$$

где a, b, c – положительные числа.

Лемма 8. Либо все нули полинома (5.7) имеют отрицательные вещественные части, либо два нуля полинома (5.7) имеют нулевые мнимые части.

Доказательство. Известно [14], что все нули полинома (5.7) имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда $ab > c$. При $ab = c$ полином (5.7) имеет два чисто мнимых нуля.

Предположим теперь, что при некоторых a, b, c , для которых $ab < c$, полином (5.7) имеет только вещественные нули. Из положительности коэффициентов следует, что эти нули отрицательные. Последнее приводит к неравенству $ab > c$, что противоречит сделанному предположению.

Доказательство теоремы 4. Известно [18], что полутраектория $\{\sigma(t)^+, \eta(t)^+, \xi(t)^+ \mid t \in (-\infty, t_0)\}$ непрерывно зависит от параметра s (здесь t_0 – произвольное фиксированное число). Отсюда и из леммы 6 следует, что если для системы (3.2) с параметрами $b(s_1), d(s_1), r(s_1)$ выполнены соотношения (5.1) – (5.3), то эти соотношения выполнены также и для $b(s), d(s), r(s)$, где $s \in (s_1 - \delta, s_1 + \delta)$. Здесь δ – некоторое достаточно малое число, числа τ и T зависят от параметра s .

Из приведенных рассуждений следует, что соотношения (5.1) – (5.3) выполнены на некотором интервале $(0, s_0)$. В дальнейшем будем считать, что интервал $(0, s_0)$ – это максимальный интервал, на котором выполнены соотношения (5.1) – (5.3).

Покажем, что значениям параметров $b(s_0), d(s_0), r(s_0)$ соответствует гомоклиническая орбита.

Прежде всего заметим, что для этих параметров при некотором τ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \eta(t)^+ > 0, \quad \forall t < \tau, \quad \eta(t)^+ \leq 0, \quad \forall t \geq \tau \\ \sigma(t)^+ > 0, \quad \forall t \in (-\infty, +\infty) \end{aligned} \quad (5.8)$$

В самом деле, если существуют числа $T_2 > T_1 > \tau$, для которых

$$\begin{aligned} \sigma(t)^+ > 0, \quad \forall t \in (-\infty, T_2); \quad \sigma(T_2)^+ = 0, \quad \eta(T_1)^+ > 0 \\ \eta(t)^+ > 0, \quad \forall t < \tau; \quad \eta(\tau)^+ = 0, \quad \dot{\eta}(\tau)^+ < 0 \end{aligned}$$

то для значений $s < s_0$ и достаточно близких к s_0 сохраняется неравенство $\eta(T_1)^+ > 0$. Это противоречит определению числа s_0 .

Если существуют числа $T_1 > \tau$, для которых

$$\begin{aligned} \eta(T_1)^+ > 0, \quad \eta(t)^+ > 0, \quad \forall t < \tau \\ \eta(\tau)^+ = 0, \quad \dot{\eta}(\tau)^+ < 0, \quad \sigma(t)^+ > 0, \quad \forall t \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

то также для $s < s_0$ и достаточно близких к s_0 сохраняется неравенство $\eta(T_1)^+ > 0$, что противоречит определению числа s_0 .

Если существуют числа $T > \tau$, для которых

$$\sigma(t)^+ > 0, \quad \forall t < T, \quad \sigma(T)^+ = 0, \quad \eta(t)^+ > 0, \quad \forall t < \tau$$

$$\eta(t)^+ \leq 0, \quad \forall t \in [\tau, T]$$

то по лемме 7 выполнено неравенство (5.3). Следовательно, для $s = s_0$ выполнены соотношения (5.1) – (5.3) и интервал $(0, s_0)$ не является максимальным интервалом, на котором выполнены соотношения (5.1) – (5.3).

Полученные выше противоречия доказывают неравенства (5.8).

Из соотношений (5.8) следует, что ω -предельным множеством траектории $\sigma(t)^+$, $\eta(t)^+$, $\xi(t)^+$ при $s = s_0$ может быть только одно из состояний равновесия.

Покажем, что состояние равновесия $\sigma = 1/\sqrt{\gamma}$, $\eta = \xi = 0$ не может быть ω -предельной точкой рассматриваемой траектории.

Проведя линеаризацию в окрестности этого состояния равновесия, получим следующий характеристический полином:

$$p^3 + (\alpha + \mu)p^2 + (\alpha\mu + 2/\gamma)p + 2\alpha$$

Предположим, что при $s = s_0$ сепаратриса $\sigma(t)^+$, $\eta(t)^+$, $\xi(t)^+$ имеет в своем ω -предельном множестве точку $\sigma = 1/\sqrt{\gamma}$, $\eta = \xi = 0$. Используя лемму 8 и непрерывную зависимость полутраекторий $\{\sigma(t)^+, \eta(t)^+, \xi(t)^+ | t \in (-\infty, t_0)\}$ от параметра s , получим, что для значений s , достаточно близких к s_0 , сепаратрисы $\sigma(t)^+$, $\eta(t)^+$, $\xi(t)^+$ либо стремятся при $t \rightarrow +\infty$ к состоянию равновесия $\sigma = 1/\sqrt{\gamma}$, $\eta = \xi = 0$, либо осциллируют на некотором временном интервале с переменной знака по координате η . Обе эти возможности противоречат свойствам (5.1) – (5.3).

Таким образом, для системы (3.2) с параметрами $b(s_0)$, $d(s_0)$, $r(s_0)$ траектория $\sigma(t)^+$, $\eta(t)^+$, $\xi(t)^+$ стремится при $t \rightarrow +\infty$ к нулевому состоянию равновесия.

Отметим, что при доказательстве теоремы 2 получен несколько более сильный результат, который может быть сформулирован следующим образом.

Если при $s \in [0, s_0)$ выполняются соотношения (5.1) – (5.3) и при $s = s_0$ эти условия не выполняются, то система (1.2) с параметрами $b(s_0)$, $d(s_0)$, $r(s_0)$ имеет гомоклиническую орбиту.

Применим теорему 4 в различных конкретных ситуациях.

Зафиксируем числа b и d . Известно [15–17], что при значениях r , достаточно близких к единице, выполнено неравенство (5.4). Покажем, что при выполнении неравенства

$$3d - 2b > 1 \tag{5.9}$$

и при достаточно больших r выполнены соотношения (5.1) – (5.3). Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} Q \frac{dQ}{d\sigma} &= -\mu Q - P\sigma - \varphi(\sigma) \\ Q \frac{dP}{d\sigma} &= -\alpha P - \beta Q\sigma \end{aligned} \tag{5.10}$$

эквивалентную системе (3.2) в множествах $\{\sigma \geq 0, \eta > 0\}$ и $\{\sigma \geq 0, \eta < 0\}$. Здесь P и Q – решения системы (5.10), являющиеся функциями от σ .

Поскольку из теоремы 3 следует равномерная ограниченность величин $\sigma(t)^+$, $\eta(t)^+$, $\xi(t)^+$ по параметру r , здесь можно провести асимптотическое интегрирование решений

системы (5.10) с малым параметром ε , которые соответствуют рассматриваемой сепаратрисе. В первом приближении эти решения могут быть записаны в форме

$$Q_1^2(\sigma) = \sigma^2 - \frac{\sigma^4}{2} - 2\mu \int_0^\sigma \sigma R_\sigma d\sigma - 2\alpha\beta \int_0^\sigma \sigma(1 - R_\sigma) d\sigma$$

$$Q_1(\sigma) \geq 0, \quad P_1(\sigma) = -\left(\frac{\beta}{2}\right)\sigma^2 + \alpha\beta(1 - R_\sigma)$$

$$Q_2^2(\sigma) = \sigma^2 - \frac{\sigma^4}{2} - 2\mu \int_\sigma^{\sqrt{2}} \sigma R_\sigma d\sigma - \frac{4}{3}\mu + 2\alpha\beta \int_\sigma^{\sqrt{2}} \sigma(1 + R_\sigma) d\sigma - \frac{2}{3}\alpha\beta$$

$$Q_2(\sigma) \leq 0, \quad P_2(\sigma) = -\left(\frac{\beta}{2}\right)\sigma^2 + \alpha\beta(1 + R_\sigma); \quad R_\sigma = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{2}}$$

Из этих формул следует, что при выполнении неравенства (5.9) для некоторых $T > \tau$ имеют место соотношения (5.1) – (5.3). При этом

$$\xi(T)^+ = P_2(0) = 2\alpha\beta$$

$$\eta(T)^+ = Q_2(0) = -\sqrt{8(\alpha\beta - \mu)/3} = -\sqrt{8\varepsilon(3d - 2b - 1)/(3\sqrt{d})}$$

Таким образом, для специального пути $b(s) \equiv b$, $d(s) \equiv d$, $r(s) : r(0) = r_1$, $r(1) = r_2$, где r_1 – достаточно большое и r_2 – достаточно близко к 1, выполнены все условия теоремы 4. Поэтому можно сформулировать следующий результат.

Следствие 2. Для любых положительных чисел b и d , удовлетворяющих неравенству (5.9), существует число $r \in (1, +\infty)$, такое, что система (3.2) с этими параметрами b, d, r имеет гомоклиническую орбиту $\sigma(t)^+$, $\eta(t)^+$, $\xi(t)^+$.

Этот результат был впервые получен в работе [19] и обсуждался затем в [20–23].

Зафиксируем теперь $d = 10$, $r = 28$ и будем рассматривать параметр $b \in (0, +\infty)$. Известно [23], что при

$$b > (3d - 1)/2$$

выполнено условие (5.4). Для анализа системы (3.2) при малых b приведем ее к виду

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -\mu\eta - u\sigma + \sigma - \sigma^3 \\ \dot{u} &= -\alpha u + \varepsilon[(2d - b)/\sqrt{d}]\sigma^2 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Здесь $u = \xi + \beta\sigma^2/2$.

Из непрерывной зависимости полутраектории $\{\sigma(t)^+, \eta(t)^+, \xi(t)^+ \mid t \in (-\infty, t_0)\}$ от параметра b следует возможность рассмотрения при малых b вместо системы (5.11) следующих «предельных» уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -\varepsilon[(d + 1)/\sqrt{d}]\eta - u\sigma + \sigma - \sigma^3 \\ \dot{u} &= 2\varepsilon\sqrt{d}\sigma^2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Численное интегрирование решения $\sigma(t)^+$, $\eta(t)^+$, $\xi(t)^+$ системы (5.12) при $d = 10$, $r = 28$ показывает выполнение условий (5.1) – (5.3).

Таким образом, из приведенных здесь рассуждений по теореме 4 вытекает следующий результат.

Следствие 3. Пусть $d = 10$, $r = 28$. Существует положительное число b_0 , такое, что система (3.2) с параметрами $b = b_0$, $d = 10$, $r = 28$ имеет гомоклиническую орбиту $\sigma(t)^+$, $\eta(t)^+$, $\xi(t)^+$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Douady A., Oesterlé J. Dimension de Hausdorff des attracteurs // C.r. Acad. sci. Paris. Sér. A. 1980. V. 290. № 24. P. 1135–1138.
2. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 422 с.
3. Kaplan J.L., Yorke J.A. Chaotic behavior of multidimensional difference equations // Lect. Notes in Math. 1979. № 730. P. 204–227.
4. Ledrappier F. Some relations between dimension and Lyapunov exponents // Commun. Math. Phys. 1981. V. 81. № 2. P. 229–238.
5. Eden A., Foias C., Temam R. Local and global Lyapunov exponents // J. Dynam. and Different. Equat. 1991. № 3. P. 133–177.
7. Eden A. Local Lyapunov exponents and a local estimate of Hausdorff dimension // Radio-Math. Modelling and Numer. Analysis. 1989. V. 23. № 3. P. 405–413.
7. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. N.Y.; B.: Springer, 1988. 500 p.
8. Boichenko V.A., Franz A., Leonov G.A., Reitmann V. Hausdorff and fractal dimension estimates for invariant sets of non-injective maps // J. Analysis and Appl. 1998. V. 17. № 1. P. 207–223.
9. Hunt B.R. Maximum local Lyapunov dimension bounds the box dimension of chaotic attractors // Nonlinearity. 1996. V. 9. № 4. P. 845–853.
10. Гелуг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
11. Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I. Frequency Methods in Oscillation Theory. Dordrecht; Boston: Kluwer, 1996. 403 p.
12. Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B. Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis: Theory and applications. Singapore; River Edge: World Sci., 1996. 498 p.
13. Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. 253 с.
14. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
15. Leonov G.A., Reitmann V. Attraktoreingrenzung für nichtlineare Systeme. Teubner-Verlag, Leipzig: 1987. 196 s.
16. Леонов Г.А. Об одном способе построения положительных инвариантных множеств для системы Лоренца // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 860–863.
17. Леонов Г.А. О существовании гомоклинических траекторий в системе Лоренца // Вестн. СПб. ун-та. Математика, механика, астрономия. 1999. № 1. С. 13–20.
18. Hartman Ph. Ordinary Differential Equations. N.Y. etc.: Wiley, 1964. = Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
19. Леонов Г.А. Об оценке параметров бифуркации петли сепаратрисы седла системы Лоренца // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 6. С. 972–977.
20. Леонов Г.А. Об оценке бифуркационных значений параметров системы Лоренца // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43. № 3. С. 189–190.
21. Reitmann V. Reguläre und chaotische Dynamik. Leipzig: Teubner, 1996. 252 s.
22. Hastings S.P., Troy W.C. A shooting approach to chaos in the Lorenz equations / J. of Different. Equat. 1996. V. 127. № 1. P. 41–53.
23. Chen X. Lorenz equations. Pt. 1. Existence and nonexistence of homoclinic orbits // SIAM J. Math. Analysis. 1996. V. 27. № 4. P. 1057–1069.