

УДК 531.384

© 2001 г. А.С. Кулешов

О СТАЦИОНАРНЫХ КАЧЕНИЯХ ДИСКА НА ШЕРОХОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается известная задача о качении без скольжения по горизонтальной плоскости тяжелого круглого диска. Исследуются стационарные движения диска, при которых угол между плоскостью диска и опорной плоскостью (угол нутации) постоянен. Изучается вопрос, в каком диапазоне изменения угла нутации данные движения устойчивы, независимо от значений постоянных двух линейных первых интегралов или, в других переменных, независимо от угловых скоростей прецессии и собственного вращения. Показано, что этот диапазон шире, чем было установлено ранее [1].

Стационарные движения диска, при которых угол нутации постоянен, называются [1] стационарными качениями (СК). Ранее [1–5] различными методами были получены условия их существования и устойчивости. Было отмечено [4], что СК образуют двумерное многообразие. Цель работы – выделить на этом многообразии области, в которых известные условия устойчивости заведомо выполняются.

Уравнения движения диска на абсолютно шероховатой плоскости допускают три первых интеграла: интеграл энергии

$$2H = (A_1 + ma^2)\dot{\theta}^2 + A_1 q^2 + (A_3 + ma^2)r^2 + 2mg a \sin \theta = 2h = \text{const}$$

и два линейных интеграла, заданные неявно соотношениями (всюду далее суммирование по индексам i и j ведется от 1 до 2)

$$r = \sum_i u_i c_i, \quad u_i = F\left(\xi, \eta, 1; \frac{1 + (-1)^i \cos \theta}{2}\right), \quad c_i = \text{const}, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$q = \frac{A_3}{2A_1} \sin \theta \sum_i (-1)^{i+1} v_i c_i, \quad v_i = F\left(\xi + 1, \eta + 1, 2; \frac{1 + (-1)^i \cos \theta}{2}\right)$$

и имеющие форму гипергеометрических рядов.

Здесь m – масса диска, a – радиус, A_1 и A_3 – соответственно экваториальный и осевой моменты инерции, g – ускорение свободного падения, θ – угол нутации, q и r – проекции угловой скорости диска на линию максимального ската и на нормаль к плоскости диска, F – гипергеометрическая функция, параметры ξ и η которой – корни квадратного уравнения

$$s^2 - s + B = 0, \quad B = \frac{ma^2 A_3}{A_1(A_3 + ma^2)}$$

В дальнейшем будем полагать, что эти параметры – комплексно-сопряженные величины, т.е. справедливо неравенство

$$B > 1/4 \quad (2)$$

Пусть W – минимум функции H по переменным θ , p и q на уровне c_1 и c_2 интегралов, заданных неявно соотношениями (1). Таким образом,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[(A_3 + ma^2) u_i u_j + (-1)^{i+j} \frac{A_3^2}{4A_1} \sin^2 \theta v_i v_j \right] c_i c_j + mg a \sin \theta$$

Выражение для W можно переписать в безразмерной форме

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} w_{ij} x_i x_j + \sin \theta, \quad w_{ij} = (2k+1)u_i u_j + (-1)^{i+j} k \sin^2 \theta v_i v_j$$

$$A_1 = kma^2, \quad A_3 = 2kma^2, \quad x_i = c_i \sqrt{a/g}, \quad i = 1, 2$$

Неравенство (2) перейдет при этом в неравенство $k < 3.5$.

Известно (см. [1–5]), что диск может совершать СК, т.е. движения, задаваемые соотношениями

$$\theta = \alpha = \text{const}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad q = \text{const}, \quad r = \text{const}$$

Угол α определяется из уравнения $dW/d\theta|_{\theta=\alpha} = 0$. Было показано [1], что любое СК устойчиво, если угол θ лежит в промежутке $(0; \pi/4]$. Детальный анализ условий устойчивости позволяет уточнить данный результат.

Уравнение $dW/d\theta|_{\theta=\alpha} = 0$ в явном виде записывается следующим образом:

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j - \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

$$a_{ij} = a_{ji} = \sin \alpha [(k + 1/2)((-1)^i u_j v_i + (-1)^j u_i v_j) + (-1)^{i+j} k \cos \alpha v_i v_j]$$

При каждом фиксированном $\alpha \neq \pi/2$ уравнение (3) задает гиперболу, а при $\alpha = \pi/2$ – пару пересекающихся прямых [6].

Условие устойчивости стационарных качений, полученное на основании модифицированной теоремы Рауса – Сальвадори [5], имеет вид $d^2 W/d\theta^2|_{\theta=\alpha} \geq 0$, или

$$\sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j - \sin \theta \geq 0 \quad (4)$$

$$b_{ij} = b_{ji} = 2(2k+1)u_i u_j + (3k + 1/2) \cos \alpha ((-1)^i u_j v_i + (-1)^j u_i v_j) + (-1)^{i+j} ((k+1) \sin^2 \alpha + 3k \cos^2 \alpha) v_i v_j$$

При каждом фиксированном α , если $k > 1/\sqrt{3} - 1/2$, граница области устойчивости – эллипс, причем вне данного эллипса – устойчивая область, а внутри – неустойчивая.

Таким образом, если для некоторого фиксированного α гипербола (3) и эллипс (4) не пересекаются, то стационарное качение, при котором $\theta = \alpha$, будет устойчивым независимо от величин x_i ($i = 1, 2$).

Исследуем данный вопрос более подробно. Из уравнения (3) выразим переменную x_2 (при $\alpha < \pi/2$ это возможно для любого x_1) и подставим в неравенство (4). Получим

$$\begin{aligned} & \sum_i [i(-1)^i a_{3-i,2} (a_{1i} b_{22} - a_{22} b_{1i})] x_1^2 + a_{22} G \geq \\ & \geq \pm 2(a_{12} b_{22} - a_{22} b_{12}) x_1 \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) x_1^2 + a_{22} \cos \alpha} \end{aligned} \quad (5)$$

$$G = G(\alpha) = (b_{22} \cos \alpha - a_{22} \sin \alpha)$$

Непосредственной проверкой доказываем, что коэффициент при x_1^2 в левой части неравенства на интервале $\alpha \in (0; \pi)$ положителен. Также положительной на данном интервале является величина a_{22} . Выражение $G(\alpha)$ на интервале $(0; \alpha_1)$ принимает положительные значения, а на интервале $(\alpha_1; \pi)$ – отрицательные значения. Здесь $\alpha_1 = \alpha_1(k) < \pi/2$ – корень уравнения $G(\alpha) = 0$.

Таким образом, на интервале $(0; \alpha_1)$ в левой части неравенства (5) стоит заведомо положительное выражение, что позволяет обе части данного неравенства возвести в квадрат. При этом получается следующее биквадратное неравенство:

$$p_1 x_1^4 + p_2 x_1^2 + p_3 \geq 0 \quad (6)$$

$$p_1 = 2(2k+1)^2(k+1)(2k+\sin^2 \alpha)\sin^2 \alpha(u_2v_1+u_1v_2)^4 > 0$$

$$p_2 = \left[(2k+1)^2 G \cos 2\alpha - \frac{Sa_{22}}{\sin \alpha} \right] \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (u_2v_1+u_1v_2)^2, \quad p_3 = G^2 \geq 0$$

$$S = S(\alpha) = [(2k+3)^2 + 3(2k+1)^2] \cos^4 \alpha - 4(2k+1)(4k+3) \cos^2 \alpha + (2k+1)^2$$

Неравенство (6) справедливо при любом значении x_1 , если выполняется одно из двух условий:

- а) дискриминант соответствующего биквадратного уравнения отрицателен;
- б) $p_2 > 0$.

Непосредственной проверкой можно показать, что условие а равносильно условию $S < 0$, или в явном виде

$$\cos^2 \alpha > \cos^2 \alpha_2 = \frac{2(2k+1)[(4k+3) - \sqrt{6(2k+1)(k+1)}]}{(2k+3)^2 + 3(2k+1)^2} \quad (7)$$

Кроме того, как аналитически, так и с помощью численного эксперимента можно показать, что при любом k из рассматриваемого промежутка справедливо неравенство

$$\alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$$

Здесь $\alpha_3 = \alpha_3(k)$ – корень уравнения $p_2(\alpha) = 0$, причем $p_2(\alpha) > 0$ при $\alpha < \alpha_3$.

Следовательно, СК устойчивы при $\alpha \in (0; \alpha_2]$, т.е. при всех α , удовлетворяющих неравенству (7). Так, например, для однородного диска ($k = 1/4$) имеем

$$\cos^2 \alpha > (24 - 9\sqrt{5})/38 \approx 0,102$$

Видно, что данный интервал изменения α шире, чем промежуток $(0; \pi/4]$.

Автор благодарит А.В. Карапетяна за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00041, 00-15-96150).

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ю.Н. О качении диска по абсолютно шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 67–75.
2. Дувакин А.П. Об устойчивости движения диска // Инж. журн. 1965. Т. 5. Вып. 1. С. 3–9.
3. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
4. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
5. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
6. Кулешов А.С. О стационарных движениях диска на абсолютно шероховатой плоскости // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 797–800.

Москва

Поступила в редакцию
21.III.2000