

УДК 531.36

© 2001 г. А.П. Блинов

О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО СТРУНЕ

В дополнение к полученным ранее результатам [1] определяется общий интеграл движения материальной точки по струне и оценивается влияние трения.

Задача о движении материальной точки по струне рассматривалась [1] в качестве примера механической системы, для которой возможно применение метода Н.Е. Жуковского [2] для определения частного интеграла движения.

1. Общий интеграл движения. Рассмотрим, как и ранее [1], плоское движение материальной точки (бусинки) по упругой невесомой нити (струне), натянутой между двумя неподвижными точками. В плоскости движения зафиксируем неподвижную систему координат Oxy так, чтобы точки крепления струны лежали на оси x на расстоянии l симметрично от начала координат.

Пусть r_1, r_2 – расстояния от бусинки до правой и левой точки крепления соответственно, g – коэффициент жесткости растяжения струны, Δ – величина предварительного натяжения струны. Тогда потенциальная энергия струны V представляется формулой

$$V = \frac{1}{2} g [(r_1 + r_2 + \Delta - 2l)^2 - \Delta^2] \quad (1.1)$$

(Здесь исправлена допущенная автором [1] опечатка.)

Данная задача аналогична известной задаче о двух неподвижных центрах [3]. Однако для разделения переменных дополнительно требуется введение нового времени.

После введения безразмерных координат

$$q_1 = \frac{r_1 + r_2}{2l}, \quad q_2 = \frac{r_1 - r_2}{2l} \quad (-1 \leq q_2 \leq 1 \leq q_1 \leq \infty)$$

потенциальная энергия, кинетическая энергия и уравнение Гамильтона – Якоби примут соответственно вид

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} g [(2lq_1 + \Delta - 2l)^2 - \Delta^2] \\ T &= \frac{1}{2} l^2 m (q_1^2 - q_2^2) \left(\frac{\dot{q}_1^2}{q_1^2 - 1} + \frac{\dot{q}_2^2}{1 - q_2^2} \right) \\ (q_1^2 - 1) \left(\frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + (1 - q_2^2) \left(\frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 &= 2l^2 m (h - V) (q_1^2 - q_2^2) \end{aligned}$$

где h – постоянная энергии.

Для разделения переменных введем новое время по формуле

$$dt = \sqrt{q_1^2 - q_2^2} d\tau \quad (1.2)$$

Эта замена не является взаимно однозначной только при $q_1 = 1, |q_2| = 1$ (в точках крепления струны).

Уравнение Гамильтона – Якоби преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (q_1^2 - 1) \left(\frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + (1 - q_2^2) \left(\frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 &= -l_1 q_1^2 + l_2 q_1 + l_3 \\ l_1 &= 4gml^4, \quad l_2 = 4mgl^3(2l - \Delta), \quad l_3 = 2ml^2(h - 2gl(l - \Delta)) \end{aligned}$$

Полагая $W = W_1(q_1) + W_2(q_2)$, получим систему уравнений

$$(q_1^2 - 1) \left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right)^2 = -l_1 q_1^2 + l_2 q_1 + l_3 - c_1, \quad (1 - q_2^2) \left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2} \right)^2 = c_1$$

(c_1 – произвольная постоянная ($c_1 > 0$)). Запишем ее решение

$$W = \int \sqrt{\frac{l_3 + l_2 q_1 - l_1 q_1^2}{q_1^2 - 1}} dq_1 + \sqrt{c_1} \arcsin q_2$$

и решение для обобщенных координат и импульсов

$$\frac{\partial W}{\partial c_1} = C_1, \quad \frac{\partial W}{\partial h} = \tau - C_2, \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2$$

(C_1, C_2 – произвольные постоянные), или в развернутом виде

$$q_2 = \sin \left[\sqrt{c_1} \left(\frac{\tau + C_2}{l^2 m} - C_1 \right) \right] \quad (1.3)$$

$$\frac{dq_2}{d\tau} = \frac{\sqrt{c_1} \sqrt{1 - q_2^2}}{l^2 m}, \quad t = \int_0^\tau \sqrt{q_1^2(\tau) - q_2^2(\tau)} d\tau$$

$$I \equiv \int [(q_1^2 - 1)(l_3 + l_2 q_1 - l_1 q_1^2)]^{-1/2} dq_1 = \frac{\tau + C_2}{l^2 m}$$

$$\frac{dq_1}{d\tau} = \sqrt{\frac{(q_1^2 - 1)(l_3 + l_2 q_1 - l_1 q_1^2)}{l^2 m}}$$

При изучении движений точки, близких к оси x , величина $u^2 = q_1 - 1$ близка к нулю (произведение $q\Delta$ велико). Поэтому с некоторой погрешностью можно упростить эллиптический интеграл

$$I = 2 \int \left[(2 + u^2) \left(l_4 - \frac{l_1}{l} \Delta u^2 - l_1 u^4 \right) \right]^{-1/2} du \approx$$

$$\approx \int (2l_4 - l_5^2 u^2)^{-1/2} du = \frac{1}{l_5} \arcsin \frac{l_5 u}{\sqrt{2l_4}}$$

$$l_4 = 2l^2 m h - c_1, \quad l_5^2 = 8l^3 m g \Delta - 2l^2 m h + c_1$$

и записать приближенное решение для q_1 в явном виде

$$q_1 = \frac{2l_4}{l_5^2} \sin^2 \frac{l_5(\tau + C_2)}{2l^2 m} + 1$$

2. О прочности струны. Существенной характеристикой изучаемой системы с точки зрения прочности является величина максимального растяжения струны $r_1 + r_2 - 2l$, оценку которой можно получить из оценки области возможного движения

$$g[(r_1 + r_2 - 2l + \Delta)^2 - \Delta^2] < 2h$$

Для величины максимального растяжения можно дать оценку и в случае внезапного торможения точки на струне

$$V_0 = \frac{2El^2(x - a_0)^2 + y^2}{(l_2 - a_0^2)(2l - \Delta)} + E[2l - (r_1 + r_2)] < h$$

где E – модуль упругости струны, отнесенный к единице площади ее сечения, a_0 – абсцисса тяжелой точки, закрепленной на струне в положении покоя. Выражение для потенциальной энергии V_0 можно получить, перемещая тяжелую точку, закрепленную на струне, из

положения покоя в точку $(x, 0)$ вдоль оси x , а затем, перемещая ее параллельно оси y , в точку (x, y) , в которой произошло торможение.

3. О влиянии сухого трения на движение точки. Для приложений может также представлять интерес учет сухого трения при движении точки по струне.

Силы растяжения струны

$$Q = \frac{\partial V}{\partial q_1} = g(2lq_1 - 2l + \Delta)$$

действующие на тяжелую точку по направлениям r_1 и r_2 , создают равнодействующую силу, направленную по биссектрисе угла α между направлениями r_1 и r_2 ,

$$F = 2Q \cos \frac{\alpha}{2} = 4gl(2lq_1 - 2l + \Delta) \sqrt{\frac{q_1^2 - 1}{q_1^2 - q_2^2}}$$

которая порождает силу трения μF , где μ – коэффициент сухого трения. Последняя препятствует в основном изменению координаты q_2 (при движениях, близких к оси x , т.е. когда величина $q\Delta$ велика).

Запишем уравнения Лагранжа для такой системы

$$\frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - 1} \ddot{q}_1 + \frac{q_2^2 - 1}{(q_1^2 - 1)^2} q_1 \dot{q}_1^2 - \frac{2q_2}{q_1^2 - 1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + aq_1 - b = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{q_1^2 - q_2^2}{1 - q_1^2} \ddot{q}_2 + \frac{q_1^2 - 1}{(1 - q_2^2)^2} q_2 \dot{q}_2^2 - \frac{2q_1}{1 - q_2^2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 = -2\mu(aq_1 - b) \sqrt{\frac{q_1^2 - 1}{q_1^2 - q_2^2}} \text{sign } \dot{q}_2$$

$$a = \frac{4g}{m}, \quad b = \frac{2g(2l - \Delta)}{lm} \quad (a > b > 0)$$

Рассматривая μ как малый параметр на участках знакопостоянства $\dot{q}_2$ и учитывая наличие полного интеграла порождающей системы, согласно теории возмущений, можно найти решение возмущенной системы посредством операций дифференцирования и взятия квадратур. При этом возникают очень громоздкие выражения и представляется более удобным здесь использовать метод последовательных приближений.

Применив замену переменных, которая используется при переходе к гамильтоновым уравнениям, преобразуем систему (3.1) к виду

$$\dot{q}_1 = \frac{(q_1^2 - 1)p_1}{q_1^2 - q_2^2}, \quad \dot{q}_2 = \frac{(1 - q_2^2)p_2}{q_1^2 - q_2^2}, \quad p_1 = -\frac{(1 - q_2^2)q_1 p_1^2}{(q_1^2 - q_2^2)^2} - aq_1 + b \quad (3.2)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{(q_1^2 - 1)q_2 p_2^2}{q_1^2 - q_2^2} - 2\mu(aq_1 - b) \sqrt{\frac{q_1^2 - 1}{q_1^2 - q_2^2}} \text{sign } \dot{q}_2$$

где p_1, p_2 – обобщенные импульсы.

Пусть вблизи правой опоры тяжелой точке сообщили импульс скорости v в направлении, близком к направлению на левую опору, т.е.

$$q_1 = 1 + \varepsilon_1, \quad q_2 = -1 + \varepsilon_2, \quad \dot{q}_1 = \varepsilon_3, \quad \dot{q}_2 = v \quad \text{при } t = 0$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – малые величины и $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$. И надо определить время t^* до остановки точки ($\dot{q}_2(t^*) = 0$) и координату $q_2(t^*)$, если окажется, что $t^* < t_1$, где t_1 – время движения точки до заданной окрестности левой опоры при отсутствии трения. При этом сомножитель $\text{sign } \dot{q}_2$ в системе (3.2) заменим единицей.

Взяв в качестве нулевого приближения порождающее решение $q_{10}, q_{20}, p_{10}, p_{20}$ для первого приближения, получим

$$q_{11} = q_{10}, \quad q_{21} = q_{20}, \quad p_{11} = p_{10}, \quad p_{21} = p_{20} - p_3$$

$$p_3 = 2\mu \int_0^t (aq_{10} - b) \sqrt{\frac{q_{10}^2 - 1}{q_{10}^2 - q_{20}^2}} dt$$

Пользуясь тем, что известен явный вид q_{10} , q_{20} в зависимости от τ , и учитывая соотношение (1.2), получим

$$p_3 = 2\mu \int_0^t (aq_{10} - b) \sqrt{q_{10}^2 - 1} d\tau \quad (3.3)$$

Во втором приближении

$$q_{22} = \int_0^t \frac{1 - q_{20}^2}{q_{10}^2 - q_{20}^2} p_{21} dt$$

Из соотношений (3.2) видно, что $\dot{q}_{22} < p_{20} - p_3$. Если уравнение $p_3 = p_{20}$ относительно t имеет положительное решение, меньшее t_1 , то оно и будет приближенно представлять величину t^* .

Выражение для p_3 после интегрирования достаточно громоздкое. Поэтому для p_3 сделаем оценку сверху. Так как $q_1 \leq q_{1a}$, где $q_{1a} = 2l_4 / l_5^2 + 1$ – амплитудное значение решения q_{10} , то

$$p_3 < 2\mu(aq_{1a} - b) \sqrt{q_{1a}^2 - 1} t \quad \text{и} \quad t^* \cong \nu \left[2\mu(aq_{1a} - b) \sqrt{q_{1a}^2 - 1} \right]^{-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Блинов А.П. О частном случае движения материальной точки // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 781–784.
2. Жуковский Н.Е. Полн. собр. соч. Т. 1. Общая механика. М.: ОНТИ, НКТП СССР, 1937. 636 с.
3. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.2000