

УДК 531.36

© 2001 г. Л.З. Фишман

ОБ ОТЫСКАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В развитии полученных ранее результатов для систем с запаздыванием, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка с запаздыванием [1], строится система без запаздывания, позволяющая находить периодические движения систем с запаздыванием.

Задачи, связанные с отысканием периодических движений, рождающихся из состояний равновесия систем с запаздыванием, рассматривались ранее [2–4]. Для систем с запаздыванием нет таких достаточно простых и удобных способов отыскания периодических движений, какие имеются для систем без запаздывания. Поэтому актуально создание новых приемов отыскания периодических движений систем с запаздыванием, описываемых даже уравнением первого порядка с запаздыванием.

Рассмотрим систему с запаздыванием, описываемую дифференциальными уравнениями первого порядка с запаздыванием

$$\dot{x} = a(\varepsilon)x + b(\varepsilon)x(t - \tau) + F(\varepsilon, x, x(t - \tau)) \quad (1)$$

где x – скаляр, ε – параметр, точка означает дифференцирование по t .

Предположим, что $F(0, 0, 0) = 0$ и аналитическая функция $F(\varepsilon, x_1, x_2)$ разлагается в окрестности точки $x_1 = x_2 = 0$ в ряд, начинающийся с членов не ниже второго порядка по (x_1, x_2) следующего вида:

$$F(\varepsilon, x_1, x_2) = F^{(2)} + F^{(3)} + \dots \quad (2)$$

$$F^{(2)}(\varepsilon, x_1, x_2) = a_{ik}(\varepsilon)x_i x_k, \quad F^{(3)}(\varepsilon, x_1, x_2) = a_{ikp}(\varepsilon)x_i x_k x_p$$

где a_{ik}, a_{ikp} – коэффициенты, зависящие от параметра ε . Здесь и далее по повторяющимся индексам i, k (i, k, p) подразумевается суммирование по всем $1 \leq i \leq k \leq 2$ ($1 \leq i \leq k \leq p \leq 2$).

Допустим, что характеристическое уравнение

$$\Delta(p) = p - a(\varepsilon) - b(\varepsilon) \exp(-p\tau) = 0$$

при $\varepsilon = 0$ имеет корни $p_{1,2} = \pm i\omega$ и p_j , удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} p_j(0) < -\sigma < 0$.

Предположим, что

$$d \operatorname{Re} p_{1,2}(\varepsilon) / d\varepsilon|_{\varepsilon=0} > 0$$

Ниже для систем с запаздыванием, описываемых уравнением (1), построена система второго порядка без запаздывания, позволяющая приближенно находить предельные циклы уравнения (1) в зависимости от значений ε . Найденные при малых ε предельные циклы уравнения (1) затем численным продолжением по параметру ε могут быть получены и при конечных значениях ε .

Запишем уравнение (1) в операторной форме [5]

$$dx_t(\theta) / d\theta = Ax_t(\theta) + R(\varepsilon, x_t(\theta)), \quad x_t(\theta) = x(t + \theta) \quad (3)$$

$$Ax_t(\theta) = \begin{cases} dx_t(\theta) / d\theta, & -\tau \leq \theta < 0 \\ a(\varepsilon)x_t(0) + b(\varepsilon)x_t(-\tau), & \theta = 0 \end{cases}$$

$$R(\varepsilon, x_t(\theta)) = \begin{cases} 0, & -\tau \leq \theta < 0 \\ F(\varepsilon, x_t(0), x_t(-\tau)), & \theta = 0 \end{cases}$$

где $x(t)$ – решение уравнения (1) при $t > 0$ с непрерывно дифференцируемой начальной функцией $x_0(\theta) = \varphi(\theta)$.

Рассмотрим функционалы

$$y_j(t, \varepsilon) = f_j(x_t(\theta), \varepsilon) = x_t(0) - b(\varepsilon) \int_0^{-\tau} \exp(-p_j \tau) x_t(v) dv$$

и функции

$$b_j(\theta, \varepsilon) = \exp(p_j(\varepsilon)\theta) / \Delta_j \quad (\Delta_j = 1 + b(\alpha) \tau p_j(\varepsilon))$$

По способу, предложенному ранее [5], используя замену переменных

$$y_j(t) = f_j(x_t(\theta), \varepsilon), \quad z_t(\theta) = x_t(\theta) - b_l(\theta, \varepsilon) y_l(t)$$

(здесь и далее по повторяющемуся индексу l подразумевается суммирование от 1 до 2), от уравнения (3) приходим к системе уравнений

$$\dot{y}_j = p_j y_j + H_{11}, \quad dz_t(\theta) / dt = Az_t(\theta) + H_{12} \quad (4)$$

где

$$H_{1n} = F(\varepsilon, b_l(0, \varepsilon) y_l + z_t(0), b_l(-\tau, \varepsilon) y_l + z_t(-\tau)) \{ \delta_{1n} + \delta_{2n} [(\delta(\theta) - (b_1(\theta, \varepsilon) + (b_2(\theta, \varepsilon)))] \}$$

$\delta(\theta) = 0$ при $-\tau \leq \theta < 0$, $\delta(0) = 1$, δ_{mn} – символ Кронекера.

Пусть функция $F^{(2)}(\varepsilon, x_1, x_2) = 0$. В этом случае укороченная система без запаздывания получается [5] при $z_t(0) = z_t(-\tau) = 0$ из первых двух уравнений системы (4) и имеет вид

$$\dot{y}_j = p_j(\varepsilon) y_j + F^{(3)}(\varepsilon, \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2, \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2), \quad j = 1, 2 \quad (5)$$

$$\alpha_{j1} = b_j(0, \varepsilon), \quad \alpha_{j2} = b_j(-\tau, \varepsilon).$$

Учитывая последнее соотношение (2), из системы (5) получаем

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= p_j(\varepsilon) y_j + a_{ikp}(\varepsilon) [(\alpha_{il} y_l)(\alpha_{kl} y_l)(\alpha_{pl} y_l)] = \\ &= p_j(\varepsilon) y_j + D_{30}(\varepsilon) y_1^3 + D_{21}(\varepsilon) y_1^2 y_2 + D_{12}(\varepsilon) y_1 y_2^2 + D_{03}(\varepsilon) y_2^3 \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_{30}(\varepsilon) &= a_{ikp}(\varepsilon) \alpha_{i1} \alpha_{k1} \alpha_{p1} \\ D_{21}(\varepsilon) &= a_{ikp}(\varepsilon) (\alpha_{i1} \alpha_{k1} \alpha_{p2} + \alpha_{i1} \alpha_{k2} \alpha_{p1} + \alpha_{i2} \alpha_{k1} \alpha_{p1}) \\ D_{12}(\varepsilon) &= a_{ikp}(\varepsilon) (\alpha_{i2} \alpha_{k2} \alpha_{p1} + \alpha_{i1} \alpha_{k2} \alpha_{p2} + \alpha_{i2} \alpha_{k1} \alpha_{p2}) \\ D_{03}(\varepsilon) &= a_{ikp}(\varepsilon) \alpha_{i2} \alpha_{k2} \alpha_{p2} \end{aligned} \quad (7)$$

Система (5) представляет собой систему дифференциальных уравнений, до членов $y_1^r y_2^q$ порядка $r + q = 3$, совпадающую с системой на двумерном устойчивом центральном многообразии, существующем в окрестности состояния равновесия $x = 0$ уравнения (1) при достаточно малом ε [3, 4], и которое будем обозначать как σ .

Если при $\varepsilon = 0$ величина g_1 , подобная первой ляпуновской, для уравнения (1) не равна нулю, то при увеличении ε от $\varepsilon < 0$ до $\varepsilon > 0$ из состояния равновесия $x = 0$ уравнения (1) рождается или к нему стягивается предельный цикл (ПЦ) $\Gamma(\varepsilon)$, лежащий на σ . Так как g_1 при $\varepsilon = 0$ одновременно является первой ляпуновской величиной системы (6), то при увеличении ε от $\varepsilon < 0$ до $\varepsilon > 0$ из состояния равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (6) рождается или к нему стягивается ПЦ $\Gamma_0(\varepsilon)$. При достаточно малом ε ПЦ $\Gamma_0(\varepsilon)$ и $\Gamma(\varepsilon)$ близки. Пусть (y_1^0, y_2^0) – точка на $\Gamma_0(\varepsilon)$. Тогда при малых ε функцию

$$x_0(t) = b_l(\theta, \varepsilon) y_l^0, \quad (\theta \in [-\tau, 0])$$

можно взять за приближенную начальную функцию для ПЦ $\Gamma(\epsilon)$. При увеличении ϵ от $\epsilon = 0$ или уменьшении ϵ от $\epsilon = 0$ ПЦ $\Gamma(\epsilon)$ уравнения (1) можно приближенно находить, например, численным продолжением по параметру ϵ .

Теперь рассмотрим случай $F^{(2)} \neq 0$. Следуя изложенному ранее [5], в этом случае в системе (4) сделаем замену переменных

$$z_t(\theta) = v_t(\theta) + \gamma(\theta, y_1, y_2, \epsilon) \quad \gamma = \sum_{r+q=2} d_{rq}(\theta, \epsilon) y_1^r y_2^q \quad (8)$$

(величины $d_{rq}(\theta, \epsilon)$ находятся ниже).

В новых переменных система (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= p_j y_j + F(\epsilon, \alpha_{11} y_1 + \gamma(0, y_1, y_2, \epsilon) + v_t(0), \alpha_{12} y_1 + \gamma(-\tau, y_1, y_2, \epsilon) + v_t(-\tau)) \\ dv_t(\theta)/dt &= A v_t(\theta) + H_2(y_1, y_2, v_t(\theta), \epsilon) \end{aligned} \quad (9)$$

$$H_2 = A\gamma + H_1 - (\partial\gamma/\partial y_l) \dot{y}_l, \quad H_1 = B_{20}(\theta, \epsilon) y_1^2 + B_{11}(\theta, \epsilon) y_1 y_2 + B_{02}(\theta, \epsilon) y_2^2 + \dots$$

где многоточие означает члены $y_1^r y_2^q$ с $r + q \geq 3$. Коэффициенты $B_{rq}(\theta, \epsilon)$ при $r + q = 2$ имеют вид

$$B_{rq}(\theta, \epsilon) = A_{rq}(\epsilon)(\delta(\theta) - (b_1(\theta, \epsilon) + b_2(\theta, \epsilon)))$$

где $A_{rq}(\epsilon)$ – коэффициенты перед квадратичными членами $y_1^r y_2^q$ ($r + q = 2$) в функции $F(\epsilon, \alpha_{11} y_1, \alpha_{12} y_1)$.

Приравнивая нулю [5] коэффициенты при квадратичных членах $y_1^r y_2^q$ в функции H_2 , получим уравнения для $d_{rq}(\theta, \epsilon)$ ($r + q = 2$)

$$[J\lambda_{rq} - A]d_{rq}(\theta) = B_{rq}(\theta, \epsilon); \quad \lambda_{20} = 2p_1(\epsilon), \quad \lambda_{11} = p_1(\epsilon) + p_2(\epsilon), \quad \lambda_{02} = 2p_2(\epsilon) \quad (10)$$

где J – тождественный оператор.

Из уравнения (10) получаем при $r + q = 2$

$$d_{rq}(0) = A_{rq}(1 - \alpha_{11} - \alpha_{12} + b(\epsilon)L_{rq})/\Delta(\lambda_{rq}), \quad d_{rq}(-\tau) = \exp(-\lambda_{rq}\tau)d_{rq}(0) + A_{rq}L_{rq} \quad (11)$$

$$L_{rq} = \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(-p_j\tau) - \exp(-\lambda_{rq}\tau)}{(p_j - \lambda_{rq})\Delta_j}, \quad \Delta(\lambda_{rq}) = \lambda_{rq} - a(\epsilon) - b(\epsilon)\exp(-\lambda_{rq}\tau)$$

Укороченная система второго порядка без запаздывания в данном случае получается из системы (9) при $v_t(0) = v_t(-\tau) = 0$

$$\dot{y}_j = p_j(\epsilon)y_j + Q(\epsilon, y_1, y_2), \quad j = 1, 2 \quad (12)$$

Здесь

$$Q(\epsilon, y_1, y_2) = F(\epsilon, \psi_1, \psi_2) = a_{ik}(\epsilon)\psi_i\psi_k + a_{ikp}(\epsilon)\psi_i\psi_k\psi_p \quad (13)$$

$$\psi_j = \alpha_{j1}y_1 + \alpha_{j2}y_2 + \sum_{r+q=2} d_{rq}^{(j)} y_1^r y_2^q, \quad d_{rq}^{(1)} = d_{rq}(0, \epsilon), \quad d_{rq}^{(2)} = d_{rq}(-\tau, \epsilon), \quad r + q = 2, \quad j = 1, 2$$

Функция $Q(\epsilon, y_1, y_2)$, входящая в (12), имеет вид

$$Q(\epsilon, y_1, y_2) = \sum_{2 \leq k} \sum_{r+q=k} A_{rq}(\epsilon) y_1^r y_2^q \quad (14)$$

Из (13), перемножая ψ_i, ψ_k, ψ_p , получаем

$$\begin{aligned} A_{20}(\epsilon) &= a_{ik}(\epsilon)\alpha_{i1}\alpha_{k1}, \quad A_{11}(\epsilon) = a_{ik}(\epsilon)(\alpha_{i1}\alpha_{k2} + \alpha_{k1}\alpha_{i2}) \\ A_{02}(\epsilon) &= a_{ik}(\epsilon)\alpha_{i2}\alpha_{k2}, \quad A_{rq}(\epsilon) = D_{rq}(\epsilon) + C_{rq}(\epsilon) \quad (r + q = 3) \end{aligned} \quad (15)$$

Функции $D_{rq}(\epsilon)$ даны формулами (7), а

$$C_{30}(\epsilon) = a_{ik}(\epsilon)(\alpha_{i1}d_{20}^{(k)} + \alpha_{k1}d_{20}^{(i)})$$

$$C_{21}(\epsilon) = a_{ik}(\epsilon)(\alpha_{i1}d_{11}^{(k)} + \alpha_{k1}d_{11}^{(i)} + \alpha_{i2}d_{20}^{(k)} + \alpha_{k2}d_{20}^{(i)})$$

$$C_{12}(\epsilon) = a_{ik}(\epsilon)(\alpha_{i2}d_{11}^{(k)} + \alpha_{k2}d_{11}^{(i)} + \alpha_{i1}d_{02}^{(k)} + \alpha_{k1}d_{02}^{(i)})$$

$$C_{03}(\epsilon) = a_{ik}(\epsilon)(\alpha_{i2}d_{02}^{(k)} + \alpha_{k2}d_{02}^{(i)})$$

Рассмотрим систему

$$\dot{y}_j = p_j(\epsilon)y_j + Q^*(\epsilon, y_1, y_2), \quad j = 1, 2 \quad (16)$$

$$Q^* = \sum_{2 \leq k \leq 3} \sum_{r+q=k} A_{rq}(\epsilon) y_1^r y_2^q.$$

Аналогично случаю $F_2 = 0$ система (16) имеет при $\epsilon = 0$ первую ляпуновскую величину g_1 , совпадающую с величиной, подобной первой ляпуновской для уравнения (1). Отсюда следует, что в данном случае имеют место аналогичные результаты о нахождении предельных циклов $\Gamma(\epsilon)$ уравнения (1) с помощью системы (16), которые были приведены выше для случая $F_2 = 0$.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = -\epsilon \sin(x(t-1)) \quad (17)$$

Характеристический квазиполином

$$p + \epsilon e^{-p} = 0 \quad (18)$$

при $\epsilon = \pi/2$ имеет [6] два корня $p_{1,2} = \pm i\pi/2$ и остальные корни с $\text{Re} p_j < -\sigma < 0$. При $\epsilon = \pi/2$ для уравнения (17) $g_1 < 0$. Отсюда следует, что при увеличении ϵ от $\epsilon = \pi/2$ из состояния равновесия $x = 0$ уравнения (17) рождается устойчивый ПЦ. Он находился по изложенной выше методике при $\epsilon = 1,9; 2,5; 3$. Во всех этих случаях на плоскости (x, t) получились устойчивые периодические решения, похожие на синусоиду с периодом, равным 4 и с амплитудами 0,2; 1,7; 2,3. Эти периодические решения представляют собой устойчивые ПЦ уравнения (17).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00635).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фишман Л.З. Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости уравнений с запаздыванием // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 706–713.
2. Chafee N. A bifurcation problem for a functional differential equation of finitely retarded type // J. Math. Anal. and Appl. 1971. V. 35. № 26. P. 312–348.
3. Hale J. Theory of Functional Differential Equations. N.Y. et al.: Springer, 1977. = Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
4. Hassard B.D., Kazarinoff N.D., Wan J.-H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. L. et al.: Cambridge Univ. Press, 1981. = Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
5. Шиманов С.Н. Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последствием // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2. № 3. С. 467–480.
6. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
24.III.1999