

УДК 539.374

© 2001 г. К.И. Романов

**УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕРИАЛА ПО ДРУКЕРУ**

На основе постулата Друкера [1] получена инвариантная формулировка критерия устойчивости материала, позволяющая исследовать локальную устойчивость при произвольных напряженных состояниях. Показано, что полученный критерий имеет ясный физический смысл при больших пластических деформациях. Установлена связь параметра устойчивости с другими фундаментальными параметрами напряженного состояния.

Постулат Друкера применялся для изучения пластической устойчивости различных элементов конструкций [2, 3]. На примере тонкостенной безмоментной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении было показано [4], что следует различать условия потери глобальной и локальной устойчивости, т.е. условия устойчивости всего тела и материала соответственно. При больших пластических деформациях, в частности в технологических процессах, важно изучить локальную устойчивость в опасных точках. В связи с этим ниже дано развитие полученных ранее результатов [4] с целью разработки критерия локальной устойчивости в общем случае напряженного состояния (НС).

**1. Постулат устойчивости.** Согласно постулату устойчивости Друкера, деформирование тела со свойствами, не зависящими от времени в изотермических условиях, устойчиво в малом, если работа бесконечно малых приращений обобщенных сил  $dQ_i$  на соответствующих бесконечно малых приращениях обобщенных перемещений  $dq_i$  положительна [1, 5], т.е.

$$\sum dQ_i dq_i > 0 \quad (1.1)$$

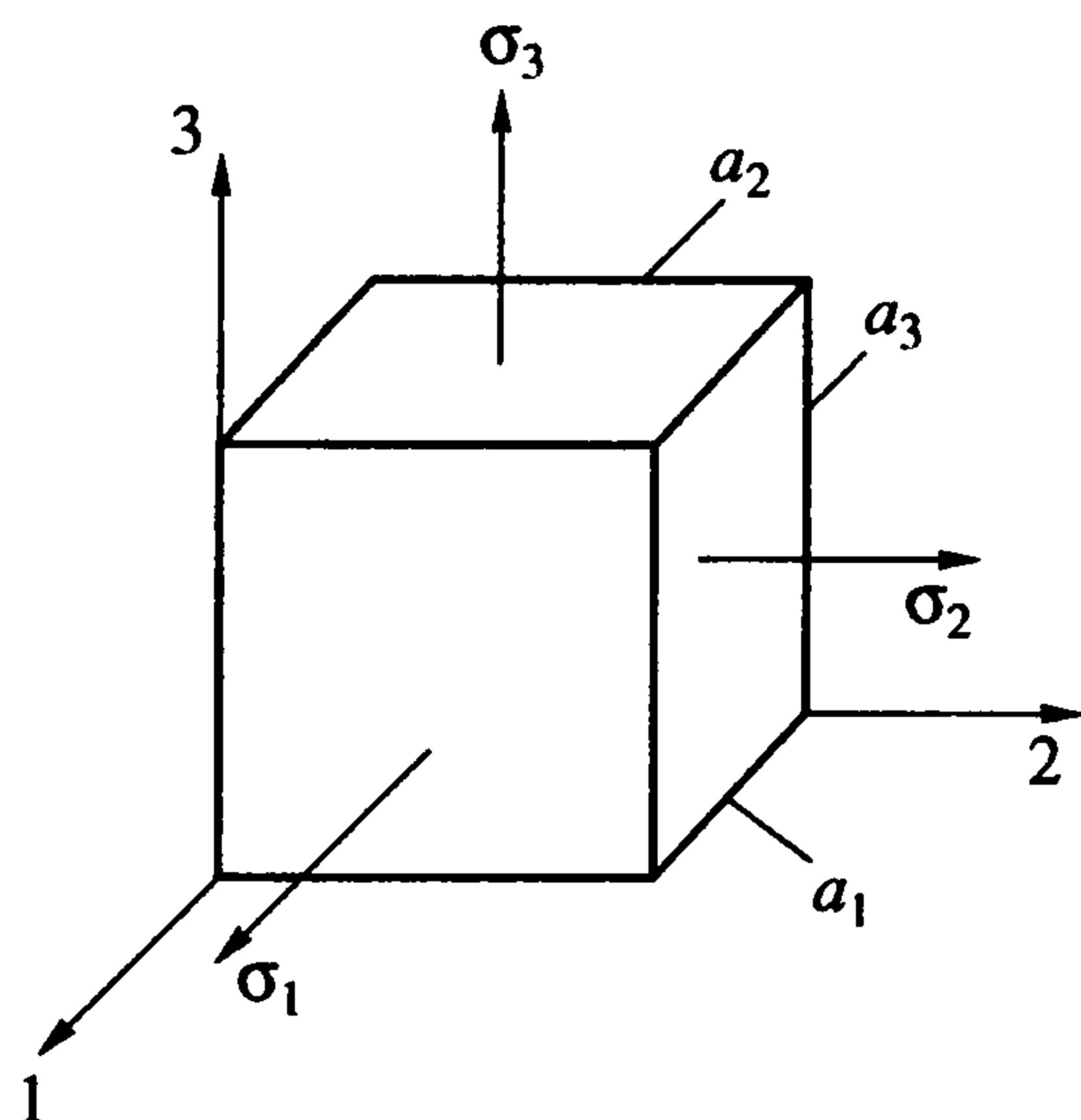
Постулат Друкера может служить основой для разработки критерия устойчивости любого материала, необязательно в состоянии пластичности. Однако ниже рассмотрение ограничено пластическими средами, поскольку в этом случае имеется ряд экспериментальных данных [6], подтверждающих выводы, сделанные на основе постулата Друкера.

Указанный постулат дает возможность проанализировать устойчивость всего тела (глобальная устойчивость), если в условии (1.1) под  $Q_i$  понимать внешние обобщенные силы. В случае, когда необходимо провести анализ локальной устойчивости элемента тела, в критерии (1.1) следует использовать внутренние обобщенные силы.

Отметим ограниченную возможность применения постулата (1.1) для анализа глобальной устойчивости. В частности, на его основе нельзя предсказать момент потери устойчивости формы при сжатии тонкостенных элементов конструкций. По этой причине использование постулата (1.1) наиболее оправданно при исследовании устойчивости материала при НС различного типа в условиях значительных геометрических изменений, происходящих в процессах пластического формоизменения.

Необходимость требования больших деформаций обусловлена тем, что в (1.1) речь идет об обобщенных силах, отличающихся от самих напряжений, в данном исследовании – эйлеровых, за счет того, что в  $Q_i$  кроме напряжений входят также размеры





Фиг. 1

бесконечно малого элемента, выделенного из деформируемого тела в некоторый момент нагружения.

**2. Критерий устойчивости в главных осях НС.** Выделим в некоторый момент формоизменения из деформируемого тела бесконечно малый элемент. Пусть 1, 2, 3 – оси декартовой системы координат, связанной с элементом;  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – размеры элемента вдоль соответствующих осей (фиг. 1).

Введем обобщенные силы, действующие по граням выделенного элемента, и приращения обобщенных перемещений

$$Q_1 = \sigma_1 a_2 a_3, \quad Q_2 = \sigma_2 a_1 a_3, \\ Q_3 = \sigma_3 a_1 a_2; \quad dq_i = a_i d\epsilon_i$$

Здесь  $\sigma_i$  – эйлеровы главные напряжения,  $d\epsilon_i = da_i/a_i$  – величины, пропорциональные скоростям деформаций в данный момент нагружения.

Таким образом, в соответствии с постулатом (1.1) имеем

$$(d\sigma_1 + \sigma_1 da_2/a_2 + \sigma_1 da_3/a_3)d\epsilon_1 + (d\sigma_2 + \sigma_2 da_1/a_1 + \sigma_2 da_3/a_3)d\epsilon_2 + \\ + (d\sigma_3 + \sigma_3 da_1/a_1 + \sigma_3 da_2/a_2)d\epsilon_3 > 0$$

По условию несжимаемости

$$\sum da_i/a_i = 0$$

Поэтому критерий устойчивости в главных осях НС получаем в виде

$$\sum (d\sigma_i - \sigma_i d\epsilon_i) d\epsilon_i > 0 \quad (2.1)$$

Заметим, что этот результат был получен ранее [7], однако локальная устойчивость материала при различных НС по этому критерию не исследована. Также ранее не была установлена связь параметра устойчивости материала, введенного ниже, с другими фундаментальными параметрами НС.

**3. Критерий устойчивости в произвольных декартовых осях.** Дальнейшее преобразование критерия устойчивости (2.1) связано с использованием определяющих уравнений конкретной сплошной среды.

Возьмем за основу определяющие уравнения Сен-Венана – Леви – Мизеса [8]

$$d\epsilon_i = \frac{3\tilde{d}\epsilon_e}{2\sigma_e} S_i \quad (3.1)$$

где  $\tilde{d}\epsilon_e$  и  $\sigma_e$  – эквивалентные приращение деформаций и напряжение, соответственно;  $S_i$  – главные компоненты девиатора напряжений.

Учитывая условие несжимаемости материала  $\sum d\epsilon_i = 0$ , преобразуем условие (2.1), используя уравнения (3.1), к виду

$$\frac{3\tilde{d}\epsilon_e}{2\sigma_e} \sum S_i dS_i - \left( \frac{3\tilde{d}\epsilon_e}{2\sigma_e} \right)^2 \sum S_i^3 - \sigma_0 \left( \frac{3\tilde{d}\epsilon_e}{2\sigma_e} \right)^2 \sum S_i^2 > 0 \quad (3.2)$$

где  $\sigma_0 = I_1(\sigma_{ij})/3$  – среднее нормальное напряжение;  $I_1(\sigma_{ij})$  – первый инвариант тензора напряжений.

По определению

$$\sigma_e = [3I_2(S_{ij})]^{1/2} = \left[ \frac{3}{2} \sum S_i^2 \right]^{1/2}$$



где  $I_2(S_{ij})$  – второй инвариант девиатора напряжений. Поэтому, очевидно, что

$$\sum S_i dS_i = \frac{2}{3} \sigma_e d\sigma_e$$

Кроме того, из тождества  $(\sum S_i)^3 = 0$  следует равенство

$$\sum S_i^3 = 3S_1S_2S_3 = 3I_3(S_{ij})$$

Поэтому критерий устойчивости (3.2) преобразуется к форме

$$d\sigma_e \tilde{d\varepsilon}_e - \left( \frac{3\tilde{d\varepsilon}_e}{2\sigma_e} \right)^2 [3I_3(S_{ij}) + 2\sigma_0 I_2(S_{ij})] > 0$$

или

$$\frac{1}{z} - \frac{9}{4[3I_2(S_{ij})]^{3/2}} \left[ 3I_3(S_{ij}) + \frac{2}{3} I_1(\sigma_{ij}) I_2(S_{ij}) \right] > 0 \quad (3.3)$$

где

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_e}{\sigma_e \tilde{d\varepsilon}_e}$$

$z$  – подкасательная к графику зависимости  $\sigma_e(\int \tilde{d\varepsilon}_e)$ .

Таким образом, в момент нарушения условия (3.3) имеем равенства  $1/z = 1/z_*$  и

$$\frac{1}{z_*} = \frac{\sqrt{3}}{4[I_2(S_{ij})]^{1/2}} \left[ 3 \frac{I_3(S_{ij})}{I_2(S_{ij})} + \frac{2}{3} I_1(\sigma_{ij}) \right] \quad (3.4)$$

где  $z_*$  – подкасательная к диаграмме деформирования в момент наступления неустойчивости (фиг. 2).

Следовательно, критерий устойчивости материала при произвольном НС имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{z} - \frac{1}{z_*} > 0 \quad (3.5)$$

где  $1/z_*$  – параметр устойчивости материала, определяемый для любого НС инвариантным представлением (3.4).

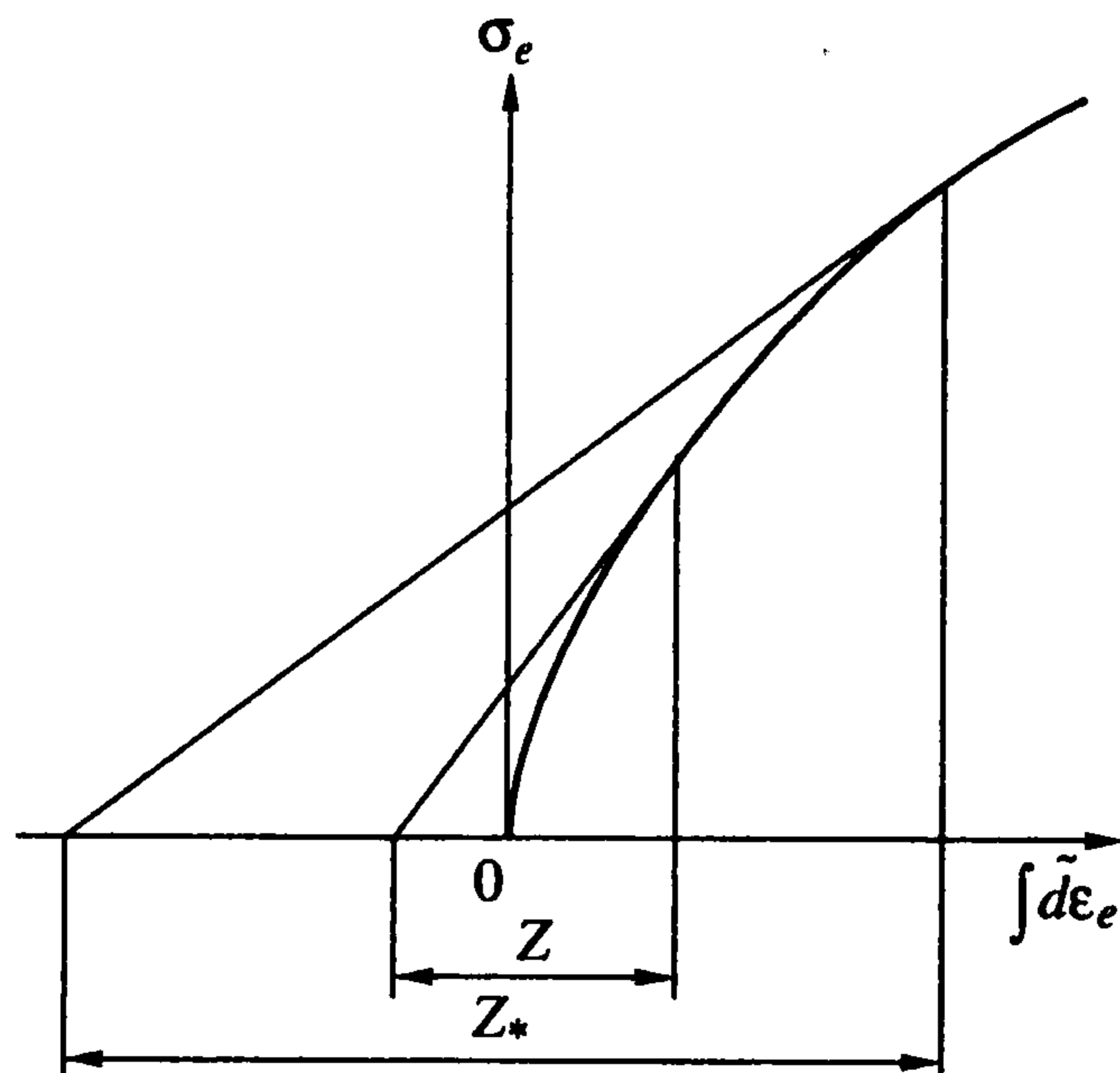
Рассмотрим ряд частных случаев НС для иллюстрации применения критерия устойчивости (3.5).

**4. Простейшие частные случаи НС. Одноосное растяжение.** В случае одноосного растяжения формула (3.4) приводит к равенству  $1/z_* = 1$ , хорошо подтверждаемому [5, 8] в экспериментах на однородное растяжение стержня осевой силой вплоть до образования шейки.

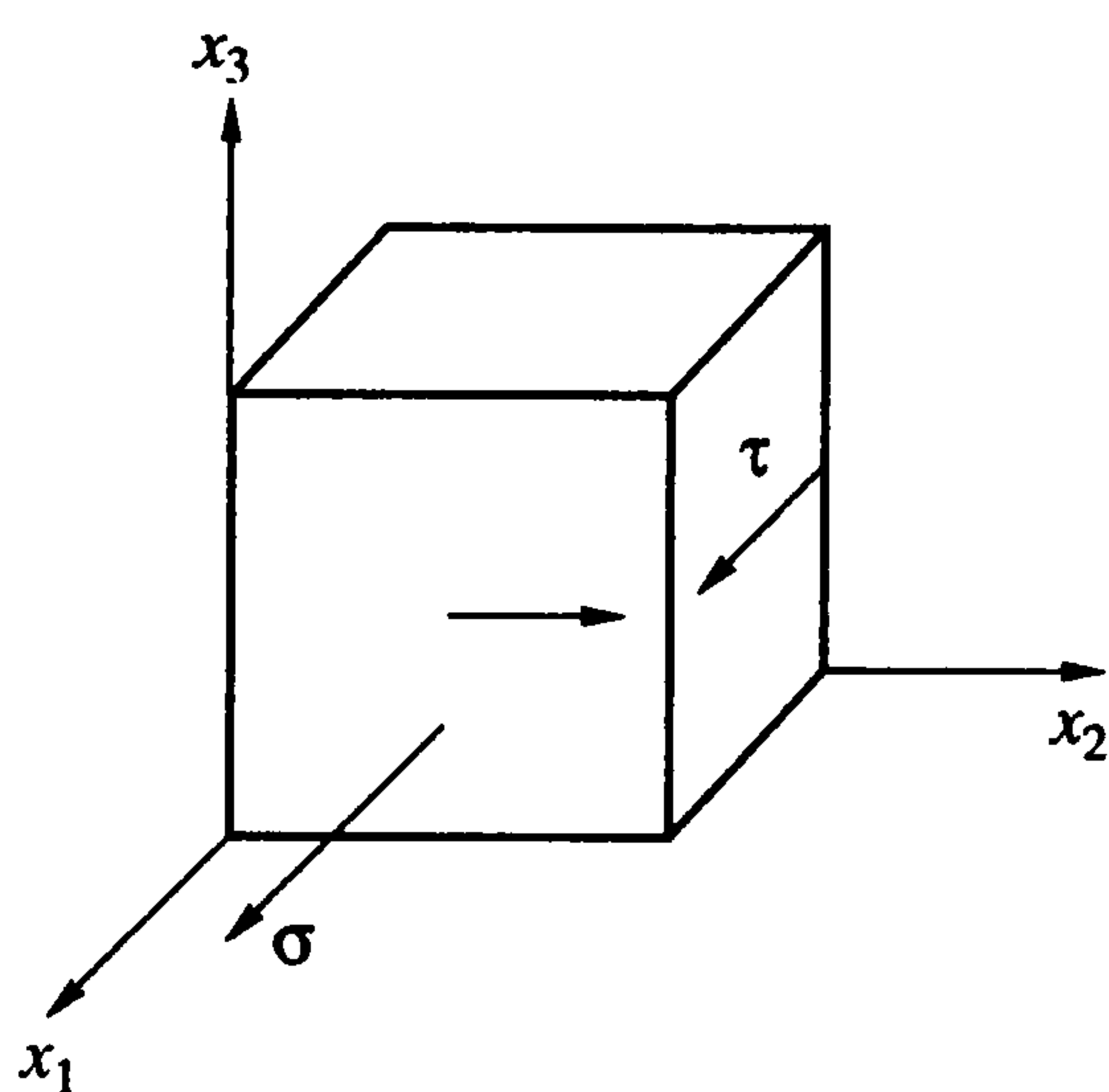
**Одноосное сжатие.** В случае одноосного сжатия в соответствии с формулой (3.4) имеем  $1/z_* = -1$  и, поскольку при сжатии  $1/z > 0$ , согласно критерию (3.5), это означает, что процесс одноосного пластического сжатия всегда устойчив. Имеется в виду устойчивость материала при НС, которое в рассматриваемом случае может быть реализовано внутри короткого образца, сжимаемого без трения осевой силой. При этом, как известно, пластичные материалы можно деформировать без разрушения при больших деформациях.

**Чистый сдвиг.** При чистом сдвиге в соответствии с формулой (3.4) получаем  $1/z_* = 0$ , т.е.  $z_* \rightarrow \infty$ . Это, однако, не означает, что материал при указанном напряженном состоянии всегда устойчив.

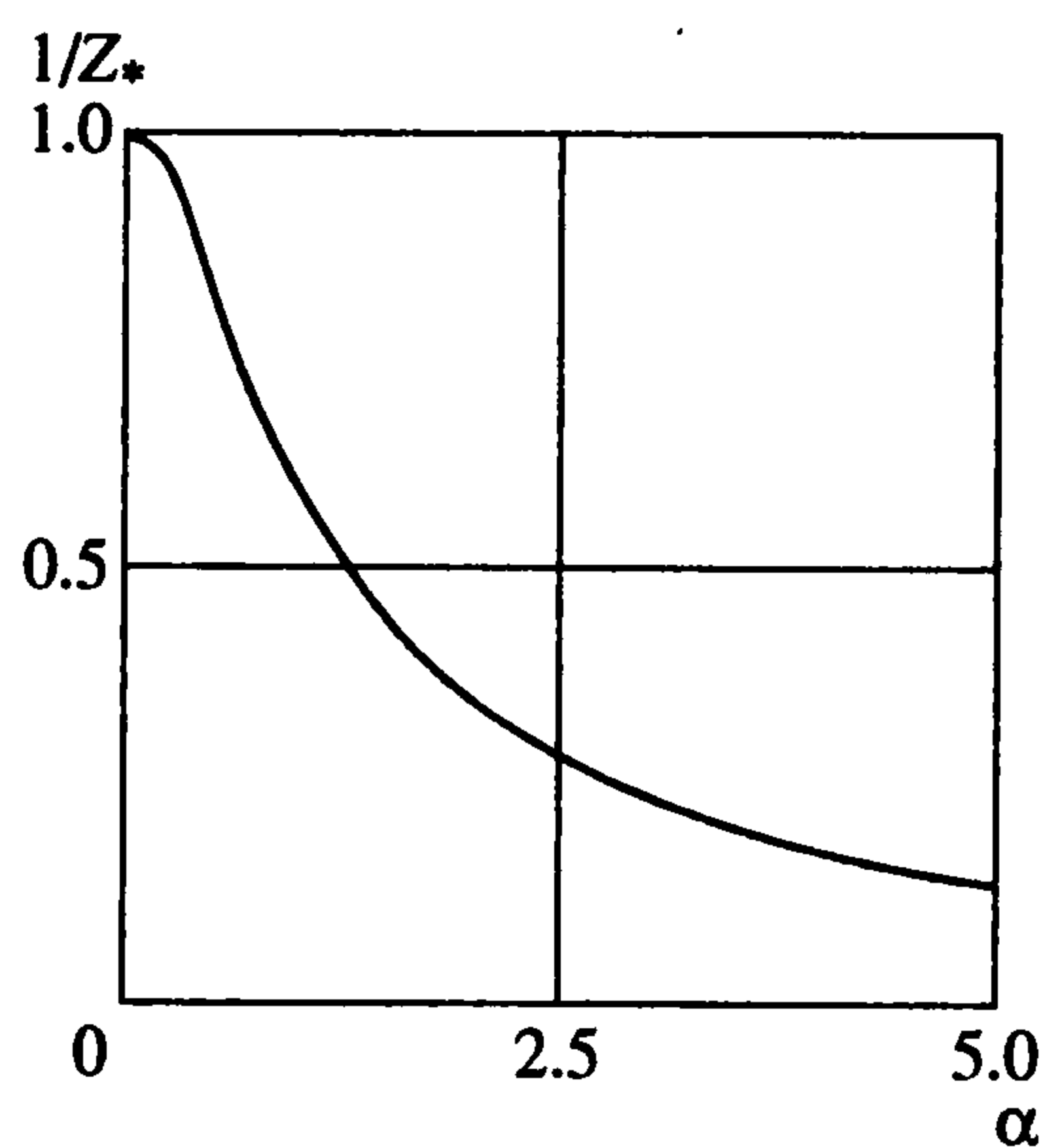




Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

При больших пластических деформациях диаграмма деформирования  $\sigma_e - \int d\epsilon_e$  в значительной степени зависит [6] от свойств материала и типа НС. Например, при растяжении кривая зависимости напряжения от пластической деформации обычно возрастает до разрыва образца, а при чистом сдвиге характерно существование максимума на диаграмме деформирования. Поэтому материал при чистом сдвиге становится неустойчивым при асимптотическом стремлении  $1/z \rightarrow 0$ , так как в этой точке  $\Delta = 0$ .

**5. Плоское упрощенное НС.** В случае плоского упрощенного НС (фиг. 3) имеем по формуле (3.4)

$$\frac{1}{z_*} = \pm \frac{4 + 15\alpha^2}{4(1 + 3\alpha^2)^{3/2}} \quad (5.1)$$

где  $\alpha = \tau/\sigma$  – параметр нагружения; верхний знак соответствует растяжению со сдвигом,  $\sigma > 0$ , а нижний – сжатию со сдвигом,  $\sigma < 0$ .

В частном случае  $\alpha = 0$  имеем  $1/z_* = 1$ , что соответствует одноосному растяжению, а при  $\alpha \rightarrow \infty$  имеем  $1/z_* \rightarrow 0$ , как при чистом сдвиге.

На фиг. 4 построена зависимость (5.1) для значений  $\sigma > 0$ . Она имеет единственный экстремум в точке (0,1) и показывает монотонное убывание параметра  $1/z_*$  при увеличении параметра  $\alpha$ .



Назовем график зависимости  $1/z_*$  от параметра нагружения диаграммой устойчивости НС материала. С помощью этой диаграммы можно интерпретировать графически критерий устойчивости (3.5). Например, при плоском упрощенном НС значения  $1/z$ , определяемые в конкретной задаче в некоторый момент нагружения в данной точке деформируемого тела путем решения соответствующей краевой задачи, попадающие выше диаграммы  $1/z_*(\alpha)$  на фиг. 4 отображают устойчивые НС материала. Точки, попадающие ниже диаграммы, соответствуют неустойчивым НС.

**6. Плоское НС.** В общем случае плоского НС ( $\sigma_3 = 0$ ) по формуле (3.4) получаем

$$\frac{1}{z_*} = \text{sign}(\sigma_1) \frac{4 - 3m - 3m^2 + 4m^3}{4(1 - m + m^2)^{3/2}}, \quad m = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (6.1)$$

Диаграмма устойчивости, построенная при  $\sigma_1 > 0$  по уравнению (6.1) сплошной линией на фиг. 5, имеет единственный нуль в точке  $m = -1$ , соответствующей чистому сдвигу, две асимптоты  $1/z_* = \pm 1$ , а также три экстремума в точках с координатами:  $m = (11 - \sqrt{105})/4 = 0,188$  и  $1/z_* = 25/(6\sqrt{15}) = 1,08$ ;  $m = 1$  и  $1/z_* = 0,5$ ;  $m = (11 + \sqrt{105})/4 = 5,31$  и  $1/z_* = 1,08$ . Характерными являются также точка с координатами  $m = 0$  и  $1/z_* = 1$ , соответствующая одноосному растяжению, и точка  $(0; -1)$ , отображающая одноосное сжатие. Также отметим существование тождества

$$1/z_*(1/m) = \text{sign}(m) 1/z_*(m)$$

По физическому смыслу последнее равенство означает что переобозначение  $m = \sigma_2/\sigma_1$  на  $1/m = \sigma_1/\sigma_2$  не должно влиять на величину  $1/z_*$  (при  $m > 0$ ).

Опасными с точки зрения потери устойчивости являются максимальные значения  $1/z_*. = 1,08$ , достигаемые в условиях двухосных растяжений с соотношениями между напряжениями  $\sigma_2 = 0,188 \sigma_1$  и  $\sigma_2 = 5,31 \sigma_1$ . В области двухосных растяжений наиболее устойчивым оказывается состояние материала при равномерном двухосном растяжении ( $m = 1$ ), а значение  $1/z_* = 1$  достигается, кроме случая одноосного растяжения, еще при двух напряженных состояниях  $\sigma_2 = 0,368\sigma_1$  и  $\sigma_2 = 2,72\sigma_1$ .

При  $\sigma_1 < 0$  диаграмма устойчивости НС является зеркальным отображением диаграммы, изображенной сплошной линией на фиг. 5, относительно горизонтальной оси. Часть диаграммы при  $\sigma_1 < 0$  в области  $1/z_* > 0$  показана на фиг. 5 штриховой линией.

Отметим, что двухосные сжатия при  $1/z > 0$  оказываются устойчивыми НС ( $1/z_* < 0$ ).

При плоском упрощенном НС (фиг. 3) был введен параметр нагружения  $\alpha = \tau/\sigma$ . Очевидно, что этот параметр связан с параметром  $m = \sigma_2/\sigma_1$  соотношениями

$$m = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha^2}}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2}} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 - 1}$$

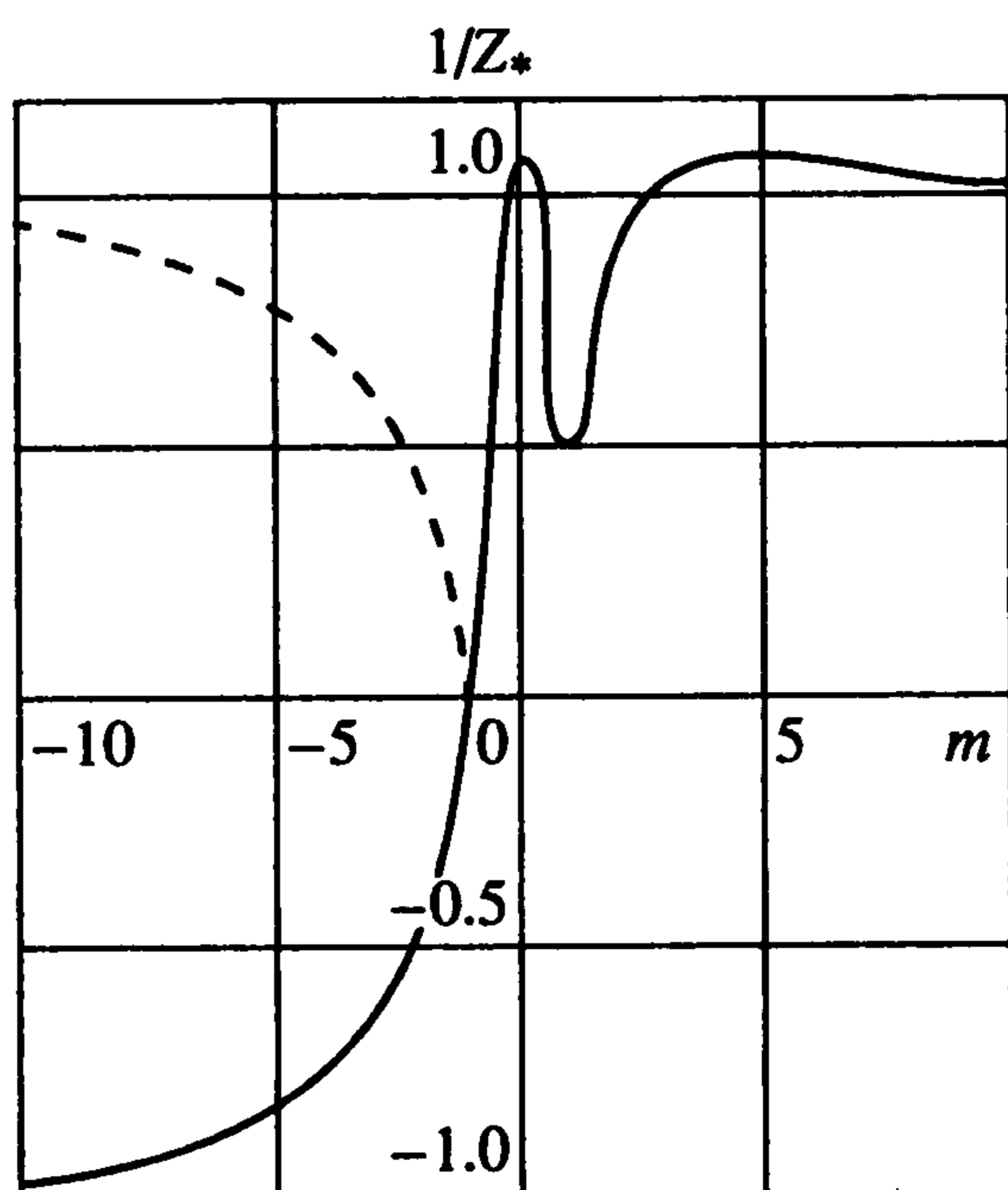
В частности, при  $\alpha \geq 0$  (фиг. 4) областью изменения  $m$  является интервал  $-1 \leq m \leq 0$  (фиг. 5).

**7. Плоское деформированное состояние.** При плоской деформации  $\sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ . Тогда по формуле (3.4) имеем

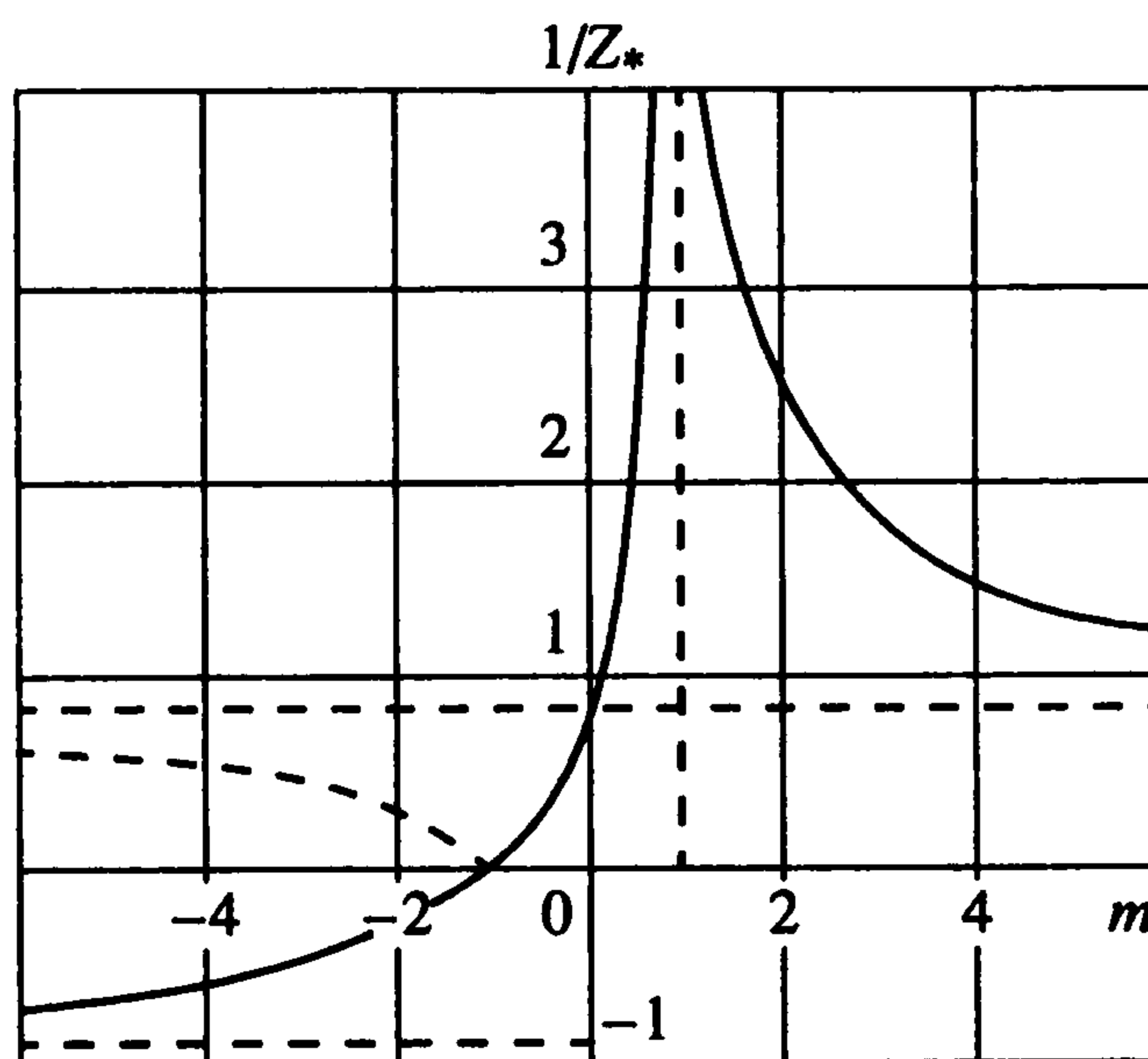
$$\frac{1}{z_*} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{|\sigma_1 - \sigma_2|} = \frac{\sqrt{3}\sigma_1}{2|\sigma_1|} \frac{1+m}{|1-m|} \quad (7.1)$$

На фиг. 6 построена сплошными линиями диаграмма устойчивости при  $\sigma_1 > 0$ . Вертикальная асимптота соответствует гидростатическому растяжению ( $m = 1$ ), которое является неустойчивым НС.

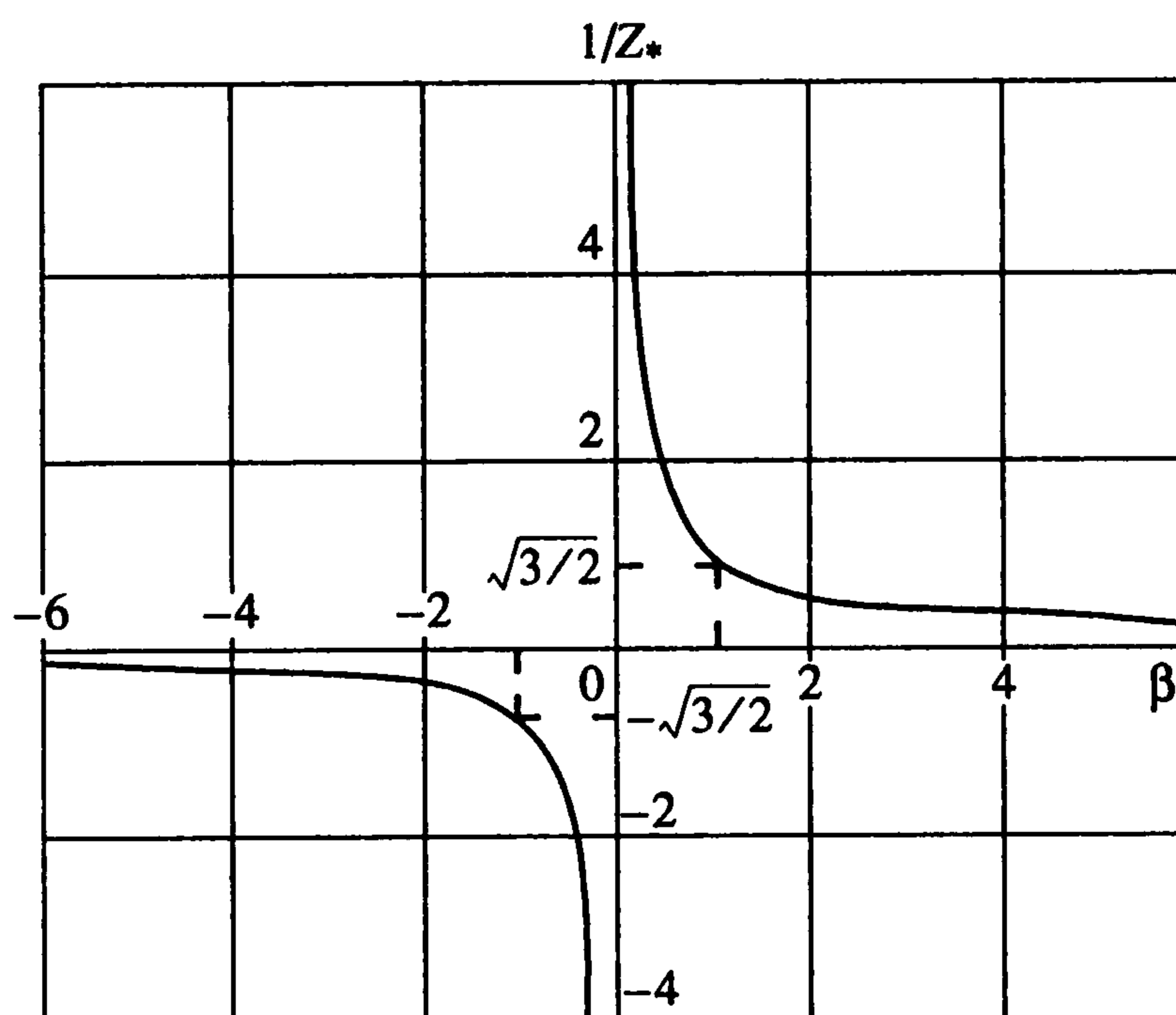




Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

В частном случае  $m = 0$ , когда параметр устойчивости НС равен  $\sqrt{3}/2 = 0,866$ , НС является плоским ( $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = \sigma_1/2$ ). Штриховая линия, проходящая через точку с координатами  $(0; 0,866)$  является горизонтальной асимптотой диаграммы устойчивости. А сама величина  $1/z_*$  в указанной точке может быть определена также с помощью диаграммы  $1/z_*(m)$  при плоском НС (фиг. 5,  $m = 0,5$ ).

Точка с координатами  $m = -1$  и  $1/z_* = 0$  отображает чистый сдвиг, а вторая горизонтальная асимптота проходит через точку  $(0; -0,866)$ , соответствующую двухосному сжатию ( $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = \sigma_1/2$ ,  $\sigma_1 < 0$ ).

В случае  $\sigma_1 < 0$  диаграмма изменения параметра устойчивости является зеркальным отображением диаграммы, построенной сплошными линиями на фиг. 6. Часть диаграммы при  $\sigma_1 < 0$  в области положительных значений  $1/z_*$  показана штриховой линией.

При  $1/z > 0$  любые трехосные сжатия оказываются устойчивыми НС материала ( $1/z_* < 0$ ), что не противоречит экспериментальным данным Бриджмана [6] по большим пластическим деформациям полых толстостенных стальных цилиндров под действием внешнего давления.



Анализ плоского деформированного состояния можно выполнить также с помощью другого параметра нагружения, а именно  $\beta = \tau_{\max}/\sigma_0$ , где  $\tau_{\max}$  – максимальное касательное напряжение.

Подставляя равенства [8]  $\sigma_1 = \sigma_0 + \tau_{\max}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_0 - \tau_{\max}$  в правую часть уравнения (7.1), получаем

$$\frac{1}{z_*} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{|\sigma_1 - \sigma_2|} = \frac{\sqrt{3}}{2\beta}$$

Соответствующая диаграмма устойчивости, представляющая собой две ветви гиперболы, изображена на фиг. 7. При  $\beta \rightarrow \pm \infty$  НС приближается к чистому сдвигу ( $1/z_* \rightarrow 0$ ). Вертикальная асимптота в области  $\beta > 0$  отображает гидростатическое растяжение, а в случае  $\beta < 0$  – гидростатическое сжатие, являющееся устойчивым НС.

Таким образом, использование постулата устойчивости Друкера дает возможность классифицировать различные НС по параметру устойчивости  $1/z_*$ .

**8. Связь параметра устойчивости НС с другими параметрами НС.** Преобразуем формулу (3.4) к виду

$$\frac{1}{z_*} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ 3 \frac{I_3(S_{ij})}{[I_2(S_{ij})]^{3/2}} + \frac{2}{3} \frac{I_1(\sigma_{ij})}{[I_2(S_{ij})]^{1/2}} \right\} \quad (8.1)$$

В теории обработки металлов давлением введен ряд различных показателей пластичности – параметров, характеризующих экспериментальные данные по предельной пластичности металлов. В частности, одним из основных показателей является коэффициент жесткости [9]  $\Pi = 3\sigma_0/\sigma_e$ .

Кроме того, имеется связь [8]

$$27I_3(S_{ij})/(2\sigma_e^3) = \cos \psi_\sigma$$

где  $\psi_\sigma$  – угол вида НС, связанный с параметром Надаи – Лоде соотношением

$$\chi_\sigma = -\sqrt{3} \operatorname{ctg}(\psi_\sigma + \frac{4}{3}\pi)$$

Следовательно, в соответствии с формулой (8.1)

$$1/z_* = (\Pi + \cos 3\psi_\sigma)/2$$

Заметим, что в частном случае  $I_3(S_{ij}) = 0$ , что имеет место, например, при плоском деформированном состоянии,  $\cos 3\psi_\sigma = 0$  и поэтому  $1/z_* = \Pi/2 = \sqrt{3}/(2\beta)$ , где, как и ранее,  $\beta = \tau_{\max}/\sigma_0$ .

Таким образом, обнаруживается связь параметра устойчивости НС  $1/z_*$ , имеющего определенный физический смысл, с другими фундаментальными параметрами НС  $\Pi$  и  $\chi_\sigma$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Drucker D.C.* On the postulate of stability of material in the mechanics of continua // Докл. на 2-м Всесоюз. съезде по теорет. и прикл. механике. М., 29 января – 5 февраля 1964. = *Друкер Д.* О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1964. № 3. С. 115–128.
2. *Stordkers B.* Plastic and visco-plastic instability of a thin tube under internal pressure, torsion and axial tension // *Int. J. Mech. Sci.* 1968. V. 10. № 6. P. 519–529.
3. *Малинин Н.Н.* Устойчивость двухосного пластического растяжения анизотропных листов и цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 2. С. 115–118.



4. Романов К.И. К вопросу об исследовании устойчивости двухосного пластического растяжения // Изв. ВУЗов. Машиностроение. 1979. № 10. С. 18–20.
5. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
6. Bridgman P.W. Studies in Large Plastic Flow and Fracture. N.Y., etc.: McGraw-Hill, 1952. = Бриджмен П. Исследования больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 444 с.
7. Stordkers B. Ductile creep failure under complex stress // J. мѣс. 1967. V. 6. № 3. P. 449–460.
8. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.
9. Смирнов-Аляев Г.А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Л.: Машиностроение, 1978. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию  
8.XII.1999