

УДК 531.391:62–50

© 2001 г. Ф.Л. Черноусько

О ДВИЖЕНИИ ТРЕХЗВЕННИКА ПО ПЛОСКОСТИ

Рассматриваются управляемые движения трехзвенного механизма по горизонтальной плоскости при наличии сухого трения. Обобщаются и уточняются ранее полученные результаты.

1. Механическая модель. Биомеханика движения змей и других животных, не имеющих конечностей, рассматривалась в ряде работ [1–4]. Учитывалось наличие опоры на стенки каналов [1] или вертикальные поверхности [2], рассматривались изгибы в вертикальной плоскости [3], исследовались модели с колесами [4]. Было показано [5], что простой трехзвенный механизм может перемещаться в любом направлении по горизонтальной плоскости только за счет изгибов в этой плоскости при наличии сухого трения между механизмом и плоскостью. Предложен способ перемещения, оценены смещения и скорость движения.

В данной работе используется та же механическая модель и принцип движения, что и ранее [5]. Рассматривается более общий закон управления движением и более общие условия контакта. При этих обобщениях, которые учитывают опыт экспериментальной реализации модели, получены условия осуществимости движений. Эти условия обобщают и уточняют полученные ранее результаты [5].

Рассмотрим плоский трехзвенник $O_1C_1C_2O_2$, движущийся по неподвижной горизонтальной плоскости Oxy (см. фигуру). Для простоты примем, что вся масса трехзвенника сосредоточена в концевых точках O_1 и O_2 массы m_0 и в шарнирах C_1 и C_2 массы m_1 . Полная масса трехзвенника равна $m = 2(m_0 + m_1)$. Звенья считаем невесомыми жесткими стержнями. Звено C_1C_2 длины $2a$ вместе с массами, сосредоточенными в шарнирах C_1 и C_2 , будем называть корпусом, а звенья O_1C_1 и O_2C_2 длины l вместе с массами концевых точек – концевыми звеньями.

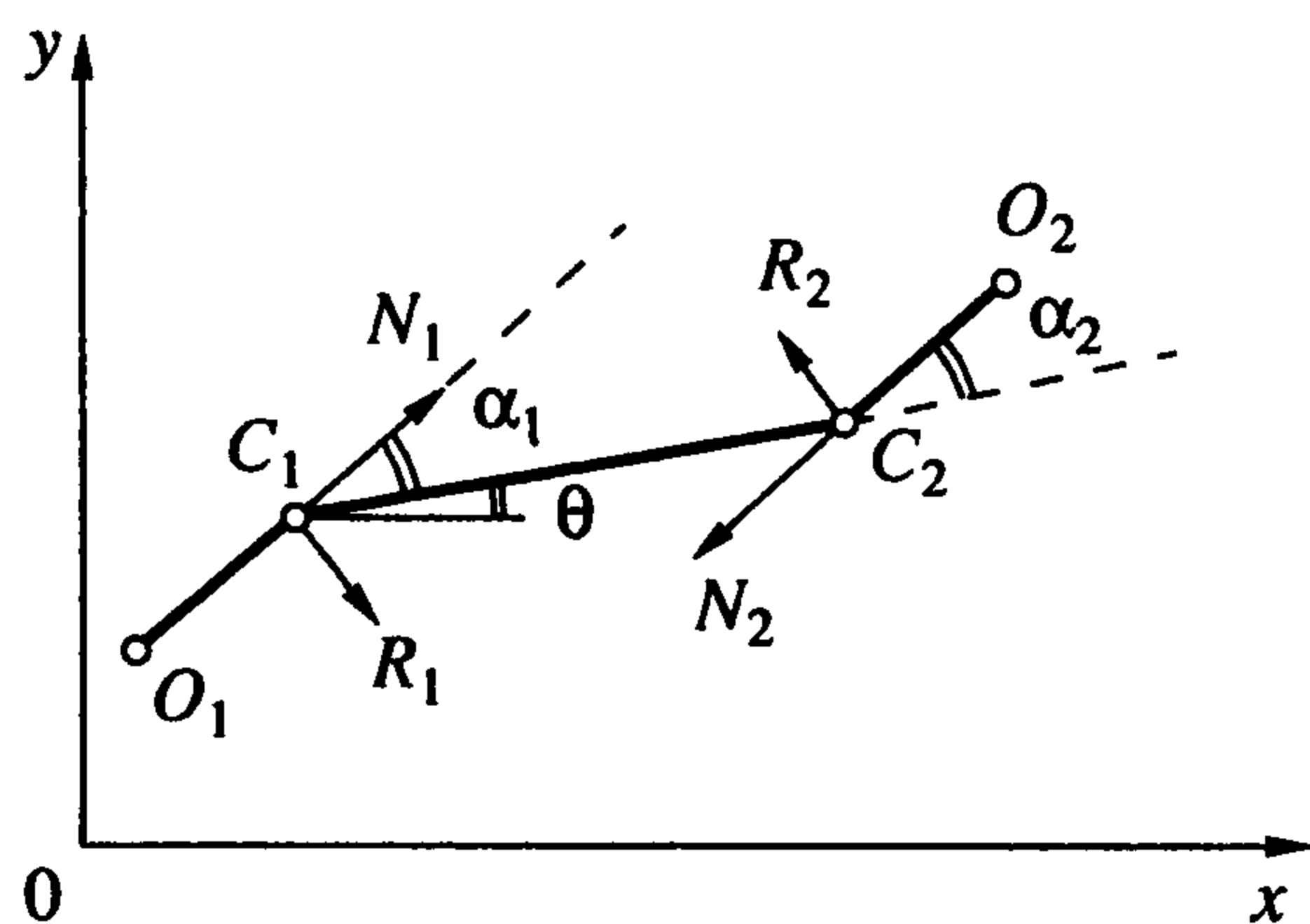
Обозначим через x, y декартовы координаты центра масс корпуса C_1C_2 , через θ – угол наклона корпуса к оси x , а через α_i – углы между корпусом и концевыми звеньями O_iC_i ($i = 1, 2$).

На каждую из точечных масс O_i, C_i ($i = 1, 2$), действует сила сухого трения, подчиняющаяся закону Кулона. Коэффициент трения для масс m_0 равен k_0 , а для масс m_1 равен k_1 .

Управляющие моменты M_1 и M_2 создаются двигателями, расположенными в шарнирах C_1 и C_2 . Будем считать, что моменты M_1 и M_2 приложены к концевым звеньям O_1C_1 и O_2C_2 , соответственно, тогда на корпус действуют моменты $(-M_1)$ и $(-M_2)$.

Произвольные перемещения трехзвенника строятся как комбинации более простых движений, называемых элементарными [5].

2. Элементарные движения. Элементарные движения (ЭД) начинаются и заканчиваются в состоянии покоя. Они характеризуются законами изменения углов $\alpha_i(t)$ ($i = 1, 2$), поворота концевых звеньев относительно корпуса. В ЭД изменяется один или оба угла $\alpha_i(t)$. Во втором случае оба концевых звена вращаются синхронно либо в



Фиг. 1

одну и ту же сторону, либо в противоположные стороны, так что

$$\dot{\alpha}_2(t) = \pm \dot{\alpha}_1(t) \quad (2.1)$$

Закон изменения величины угловой скорости $\omega(t) = |\dot{\alpha}_i(t)|$ в ЭД предполагается (в отличие от описанного ранее подхода [5]) достаточно произвольным. Важно лишь, что оба звена в каждом ЭД начинают и заканчивают поворот одновременно, а углы α_i изменяются в интервале $(-\pi, \pi)$.

Будем различать медленные и быстрые ЭД.

В медленных ЭД величины угловой скорости $\omega(t)$ и углового ускорения $\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t)$ концевых звеньев достаточно малы, так что корпус C_1C_2 остается неподвижным. Длительность медленных ЭД обозначим через T . Ниже выводятся условия осуществимости медленных ЭД.

В быстрых ЭД, длительность τ которых достаточно мала ($\tau \ll T$), угловые скорости $\omega(t)$ и ускорения $\varepsilon(t)$, наоборот, достаточно велики. При этом величины управляющих моментов M_1 и M_2 велики по сравнению с моментами сил трения:

$$|M_i| \geq m^* g k^* l^*, \quad m^* = \max(m_0, m_1) \quad (2.2)$$

$$k^* = \max(k_0, k_1), \quad l^* = \max(l, a)$$

Поэтому при рассмотрении быстрых ЭД можно не учитывать силы трения. Следовательно, для быстрых ЭД имеют место законы сохранения импульса и момента импульса.

3. Построение движений. Покажем, как из ЭД можно сформировать произвольное движение трехзвенника по горизонтальной плоскости [5]. Пусть в начальный момент трехзвенник покоится и все его звенья параллельны оси x . В этом состоянии имеем $\theta = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Будем для краткости обозначать медленные и быстрые движения буквами М и Б, соответственно, и указывать пределы изменения углов α_i в каждом элементарном движении (от α_i^0 до α_i^1) в виде: $\alpha_i^0 \rightarrow \alpha_i^1$. Через $\gamma \in (-\pi, \pi)$ ниже обозначен некоторый фиксированный угол.

Продольное движение состоит из следующих ЭД:

- 1) М, $\alpha_1: 0 \rightarrow \gamma, \alpha_2(t) \equiv 0$;
- 2) Б, $\alpha_1: \gamma \rightarrow 0, \alpha_2: 0 \rightarrow \gamma$;
- 3) М, $\alpha_1: 0 \rightarrow -\gamma, \alpha_2: \gamma \rightarrow 0$;
- 4) Б, $\alpha_1: -\gamma \rightarrow 0, \alpha_2: 0 \rightarrow -\gamma$;
- 5) М, $\alpha_1: 0 \rightarrow \gamma, \alpha_2: -\gamma \rightarrow 0$.

Видно, что после этапа 5 конфигурация трехзвенника тождественна конфигурации после этапа 1: $\alpha_1 = \gamma, \alpha_2 = 0$. Далее цикл из четырех ЭД 2–5 можно повторять любое число раз. Чтобы в конце движения перевести трехзвенник в исходную прямолинейную конфигурацию $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, достаточно выполнить медленное движение

$$\text{М, } \alpha_1: \gamma \rightarrow 0, \alpha_2 \equiv 0$$

В ходе медленных движений корпус неподвижен, а центр масс трехзвенника перемещается. В ходе быстрых движений, наоборот, центр масс неподвижен, а корпус перемещается. Как показано ранее [5], суммарное за цикл движений 2–5 полное

смещение середины корпуса вдоль оси x равно

$$\Delta_0 x = 8m_0 m^{-1} l \sin^2(\gamma/2), \quad m = 2(m_0 + m_1) \quad (3.1)$$

Суммарное смещение середины корпуса вдоль оси y и суммарный поворот корпуса за цикл равны нулю: $\Delta_0 y = 0$, $\Delta_0 \theta = 0$. Так как длительность быстрых движений τ много меньше длительности медленных движений, то полная длительность цикла приближенно равна $2T$, и средняя скорость продольного движения равна

$$v_1 = \Delta_0 x (2T)^{-1} \quad (3.2)$$

Боковое движение осуществляется следующим образом:

- 1) М, $\alpha_1: 0 \rightarrow -\gamma$, $\alpha_2: 0 \rightarrow \gamma$;
- 2) Б, $\alpha_1: -\gamma \rightarrow \gamma$, $\alpha_2: \gamma \rightarrow -\gamma$;
- 3) М, $\alpha_1: \gamma \rightarrow -\gamma$, $\alpha_2: -\gamma \rightarrow \gamma$.

Конфигурация трехзвенника после этапа 3 тождественна конфигурации после этапа 1: $\alpha_1 = -\gamma$, $\alpha_2 = \gamma$. Цикл из двух движений 2, 3 можно повторять. Чтобы вернуться к исходной прямолинейной конфигурации $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, достаточно выполнить движение

$$\text{М, } \alpha_1: -\gamma \rightarrow 0, \alpha_2: \gamma \rightarrow 0$$

Суммарное за цикл движений 2, 3 смещение середины корпуса вдоль оси x и суммарный поворот корпуса равны нулю: $\Delta_0 x = 0$, $\Delta_0 \theta = 0$. Суммарное за цикл смещение корпуса вдоль оси y и средняя скорость бокового движения таковы:

$$\Delta_0 y = 4m_0 m^{-1} l \sin \gamma, \quad v_2 = \Delta_0 y T^{-1} \quad (3.3)$$

Поворот трехзвенника на месте производится следующим образом:

- 1) М, $\alpha_1: 0 \rightarrow \gamma_1$, $\alpha_2: 0 \rightarrow \gamma_1$;
- 2) Б, $\alpha_1: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$, $\alpha_2: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$;
- 3) М, $\alpha_1: \gamma_2 \rightarrow \gamma_1$, $\alpha_2: \gamma_2 \rightarrow \gamma_1$.

Здесь γ_1, γ_2 – углы из интервала $(-\pi, \pi)$. Движения 2, 3 можно повторять. Чтобы вернуть трехзвенник в исходную прямолинейную конфигурацию $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, нужно выполнить движение

$$\text{М, } \alpha_1: \gamma_1 \rightarrow 0, \alpha_2: \gamma_1 \rightarrow 0$$

Суммарное за цикл движений 2, 3 смещение середины корпуса равно нулю: $\Delta_0 x = \Delta_0 y = 0$, а суммарный угол поворота $\Delta_0 \theta$ зависит от углов γ_1, γ_2 и определен ранее [5].

4. Условия осуществимости движений. Выведем достаточные условия, обеспечивающие неподвижность корпуса при медленных движениях. Для этого сначала, считая корпус $C_1 C_2$ неподвижным, определим силы и моменты, действующие на него со стороны вращающихся звеньев $O_1 C_1$ и $O_2 C_2$. Затем составим уравнения равновесия корпуса с учетом взаимодействия звеньев и сил трения. Корпус будет неподвижен, если существуют силы трения покоя, удовлетворяющие закону Кулона и обеспечивающие выполнение уравнений равновесия.

Следуя изложенной схеме, составим сначала уравнения движения звеньев $O_i C_i$ ($i = 1, 2$). Уравнение моментов имеет вид

$$m_0 l^2 \ddot{\alpha}_i = M_i - m_0 g k_0 l \operatorname{sign} \dot{\alpha}_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

Обозначим через R_i и N_i компоненты силы реакции, действующей на концевое звено $O_i C_i$ со стороны корпуса (см. фигуру). Эти компоненты определяются из уравнений

движения центра масс концевых звеньев. Сила N_i направлена по звену O_iC_i и равна

$$N_i = m_0 l \dot{\alpha}_i^2 \quad (4.2)$$

а компонента силы R_i перпендикулярна звену O_iC_i и определяется соотношениями

$$R_i = m_0 l \ddot{\alpha}_i + m_0 g k_0 \operatorname{sign} \dot{\alpha}_i = M_i l^{-1} \quad (4.3)$$

На неподвижный корпус действуют компоненты сил $(-N_i)$, $(-R_i)$ со стороны концевых звеньев, моменты $(-M_1)$ и $(-M_2)$, а также силы трения в точках C_1 и C_2 . Направим ось Ox системы координат Oxy вдоль корпуса C_1C_2 и обозначим через X_i и Y_i проекции сил трения в точках C_i ($i = 1, 2$), на оси x и y , соответственно. В качестве трех уравнений равновесия корпуса возьмем условия равенства нулю сумм моментов приложенных к корпусу сил относительно точек C_1 и C_2 , а также условие равенства нулю суммы проекций всех сил на ось x . Получим

$$\begin{aligned} 2a(N_2 \sin \alpha_2 - R_2 \cos \alpha_2) + 2aY_2 - M_1 - M_2 &= 0 \\ 2a(N_1 \sin \alpha_1 - R_1 \cos \alpha_1) - 2aY_1 - M_1 - M_2 &= 0 \\ -N_1 \cos \alpha_1 - R_1 \sin \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + R_2 \sin \alpha_2 + X_1 + X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Рассматриваемая система статически неопределима: для четырех неизвестных сил X_i , Y_i ($i = 1, 2$) имеем три уравнения (4.4). Кроме того, должны удовлетворяться неравенства закона Кулона

$$(X_i^2 + Y_i^2)^{1/2} \leq F_i, \quad F_i = m_i g k_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.5)$$

Для обеспечения равновесия достаточно указать хотя бы один набор сил X_i , Y_i ($i = 1, 2$), удовлетворяющих соотношениям (4.4), (4.5). Силы Y_i определяются из первых двух уравнений (4.4) однозначно

$$Y_i = \pm(N_i \sin \alpha_i - R_i \cos \alpha_i) \mp Q, \quad i = 1, 2 \quad (4.6)$$

Здесь введено обозначение

$$Q = (M_1 + M_2)/(2a) \quad (4.7)$$

Положим

$$X_i = N_i \cos \alpha_i + R_i \sin \alpha_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.8)$$

Последнее уравнение (4.4) при этом удовлетворяется. Подставляя формулы (4.6) и (4.8) в левую часть неравенства (4.5), после упрощений и использования неравенства

$$|a \sin \alpha + b \cos \alpha| \leq (a^2 + b^2)^{1/2}$$

справедливого при любых a , b , α , получим

$$\begin{aligned} X_i^2 + Y_i^2 &= N_i^2 + R_i^2 + Q^2 - 2Q(N_i \sin \alpha_i - R_i \cos \alpha_i) \leq \\ &\leq N_i^2 + R_i^2 + Q^2 + 2|Q|(N_i^2 + R_i^2)^{1/2} = [(N_i^2 + R_i^2)^{1/2} + |Q|]^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Введем обозначения

$$\omega_0 = \max |\dot{\alpha}_i|, \quad \varepsilon_0 = \max |\ddot{\alpha}_i| \quad (4.10)$$

Здесь максимумы берутся по всему медленному движению; в силу условия (2.1), они не зависят от $i = 1, 2$. Из соотношений (4.1)–(4.3) и (4.10) следуют оценки

$$|M_i| \leq m_0 l(l\varepsilon_0 + gk_0), \quad |R_i| \leq m_0(l\varepsilon_0 + gk_0), \quad |N_i| \leq m_0 l \omega_0^2, \quad i = 1, 2 \quad (4.11)$$

Если концевые звенья вращаются в одном и том же направлении, т.е. имеет место знак "плюс" в (2.1), то $M_1 = M_2$. В этом случае из (4.7) и (4.11) имеем

$$|Q| \leq m_0 l (\varepsilon_0 + g k_0) / a \quad (4.12)$$

Подставляя оценки (4.11), (4.12) в (4.9), получим, что неравенства (4.5) удовлетворяются, если выполнено условие

$$m_0 l \{ [\omega_0^4 + (\varepsilon_0 + g k_0 l^{-1})^2]^{1/2} + (\varepsilon_0 + g k_0 l^{-1}) l a^{-1} \} \leq m_1 g k_1 \quad (4.13)$$

Если в медленном движении участвует только одно концевое звено, то один из моментов M_i равен нулю, оценка (4.12) по-прежнему справедлива и условие (4.13) снова является достаточным условием равновесия корпуса.

Если же концевые звенья вращаются в противоположных направлениях, т.е. имеет место знак минус в (2.1), то $M_1 = -M_2$ и, согласно (4.7), $Q = 0$. В этом случае из (4.11), (4.9) получим следующее достаточное условие выполнения неравенств (4.5):

$$m_0 l [\omega_0^4 + (\varepsilon_0 + g k_0 l^{-1})^2]^{1/2} \leq m_1 g k_1 \quad (4.14)$$

При продольном движении и повороте трехзвенника в ходе медленных движений концевые звенья вращаются в одном и том же направлении, а при боковом движении они всегда вращаются в противоположных направлениях (см. разд. 3). Поэтому достаточное условие осуществимости продольного движения и поворота имеет вид (4.13), а достаточное условие осуществимости бокового движения менее ограничительно и имеет вид (4.14).

Заметим, что условие (4.13) выполнено, если движение совершается достаточно медленно, т.е. ω_0 и ε_0 достаточно малы, и, кроме того, имеет место неравенство

$$m_0 k_0 (a + l) < m_1 k_1 a$$

Условие (4.14) выполнено, если ω_0 и ε_0 достаточно малы и, кроме того, имеет место неравенство $m_0 k_0 < m_1 k_1$.

Был рассмотрен [5] частный случай медленных движений, в котором величина угловой скорости концевых звеньев $\omega(t)$ сначала линейно возрастает, а затем линейно убывает, причем угловое ускорение постоянно по величине. В этом случае

$$\omega(t) = \varepsilon_0 t, t \in [0, T/2]; \omega(t) = \varepsilon_0 (T - t), t \in [T/2, T] \quad (4.15)$$

Соответствующие случаю (4.15) условия осуществимости движений, данные в [5] неравенствами (4.14), (4.16) (и вытекающими из них условиями (6.3), (7.3)), содержат ошибки, вызванные тем, что в формуле (4.1) для R_i в [5] было пропущено второе слагаемое, имеющееся в формуле (4.3) данной статьи. В приведенных выше условиях (4.13), (4.14) эта неточность исправлена. Кроме того, за счет улучшения оценок, удалось избавиться от коэффициента $\sqrt{2}$ в левой части неравенства (4.13) по сравнению с неравенством (4.14) из [5].

В качестве примера рассмотрим трехзвенник со следующими параметрами:

$$a = l = 0.2 \text{ м}, m_1 = 1.2 \text{ кг}, m_0 = 0.4 \text{ кг}$$

$$m = 3.2 \text{ кг}, k_1 = k_0 = 0.2, g = 9.81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

Пусть медленные движения описываются соотношениями (4.15). Для этого случая имеем

$$\omega_0 = \varepsilon_0 T / 2, |\Delta\alpha| = |\alpha_i^1 - \alpha_i^0| = \varepsilon_0 T^2 / 4 \quad (4.16)$$

Максимальный угол поворота концевых звеньев γ и максимальное угловое ускорение ε_0 примем равными $\gamma = 1$ рад, $\varepsilon_0 = 4$ рад $\cdot$ с $^{-2}$. Согласно разд. 3, для продольных движений имеем $|\Delta\alpha| = \gamma$, и из (4.16) получим $T = 1$ с, $\omega_0 = 2$ рад $\cdot$ с $^{-1}$, а для боковых движений имеем $|\Delta\alpha| = 2\gamma$, $T = 1.4$ с, $\omega_0 = 2.8$ рад $\cdot$ с $^{-1}$. Проверка условий осуществимости движений (4.13), (4.14) показывает, что они

выполняются. Вычисляя смещения и средние скорости движений по формулам (3.1)–(3.3), получим

$$v_1 = 0.023 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, v_2 = 0.034 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$$

Согласно оценкам (2.2), управляющие моменты, необходимые для реализации быстрых движений, должны быть на порядок больше моментов, создаваемых силами трения. Для рассматриваемого примера моменты должны иметь порядок 6–8 Н · м.

Полученные выше условия (4.13), (4.14), как показано, справедливы для достаточно общих законов движения звеньев и при разных коэффициентах трения для масс m_1 и m_0 . При экспериментальной реализации предложенного способа движения, осуществленной в Мюнхенском техническом университете Ф. Пфайффером, М. Гингером и Г. Майром, использовались законы управления, при которых угловая скорость $\omega(t)$ и угловое ускорение $\epsilon(t)$ изменялись гладким образом, а коэффициенты трения для масс m_1 и m_0 были различны. Эксперименты показали практическую осуществимость предложенного способа движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00258).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Лаврентьев М.М. Об одном принципе создания тяговой силы для движения // ПМТФ. 1962. № 4. С. 3–9.
2. Gray J. Animal Locomotion. London: Weidenfeld & Nicolson, 1968. 479 p.
3. Добролюбов А.И. Бегущие волны деформации. Минск: Наука и техника, 1987. 142 с.
4. Hirose S. Biologically Inspired Robots: Snake-like Locomotors and Manipulators. Oxford: Univ. Press, 1993. 220 p.
5. Черноусько Ф.Л. Движение многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 8–18.

Москва

Поступила в редакцию
31.VIII.2000