

УДК 539.3

© 2001 г. И.А. Солдатенков

КОНТАКТНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОЙ КОМПОЗИЦИИ ПОЛУПЛОСКОСТЬ – ПОЛОСА ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Для полосы переменной ширины, связанной с упругой полуплоскостью, выводятся асимптотические зависимости деформации от контактных напряжений.

Подобные соотношения были ранее получены [1] для полосы постоянной ширины.

1. Соотношения для упругой полосы переменной ширины. Рассмотрим в координатной плоскости xu упругую полосу Π переменной ширины (фиг. 1), верхняя граница Γ_+ которой описывается функцией $y = h^+(x)$, а нижняя граница Γ_- прямолинейна: $y = -b$.

Ниже для обозначения производной по координате x используется штрих у символа функции. В целях сокращения записи аргументы у функций могут опускаться.

Пусть u и v – перемещения по осям x и y соответственно, а w_k ($k = 1, \dots, 4$) – перемещения границ полосы:

$$u|_{\Gamma_-} = w_1(x), \quad v|_{\Gamma_-} = w_2(x), \quad u|_{\Gamma_+} = w_3(x), \quad v|_{\Gamma_+} = w_4(x)$$

Кроме того, обозначим через $q_\tau^\pm$ и $q_v^\pm$ касательное и нормальное напряжения на верхней и нижней границах полосы (фиг. 1).

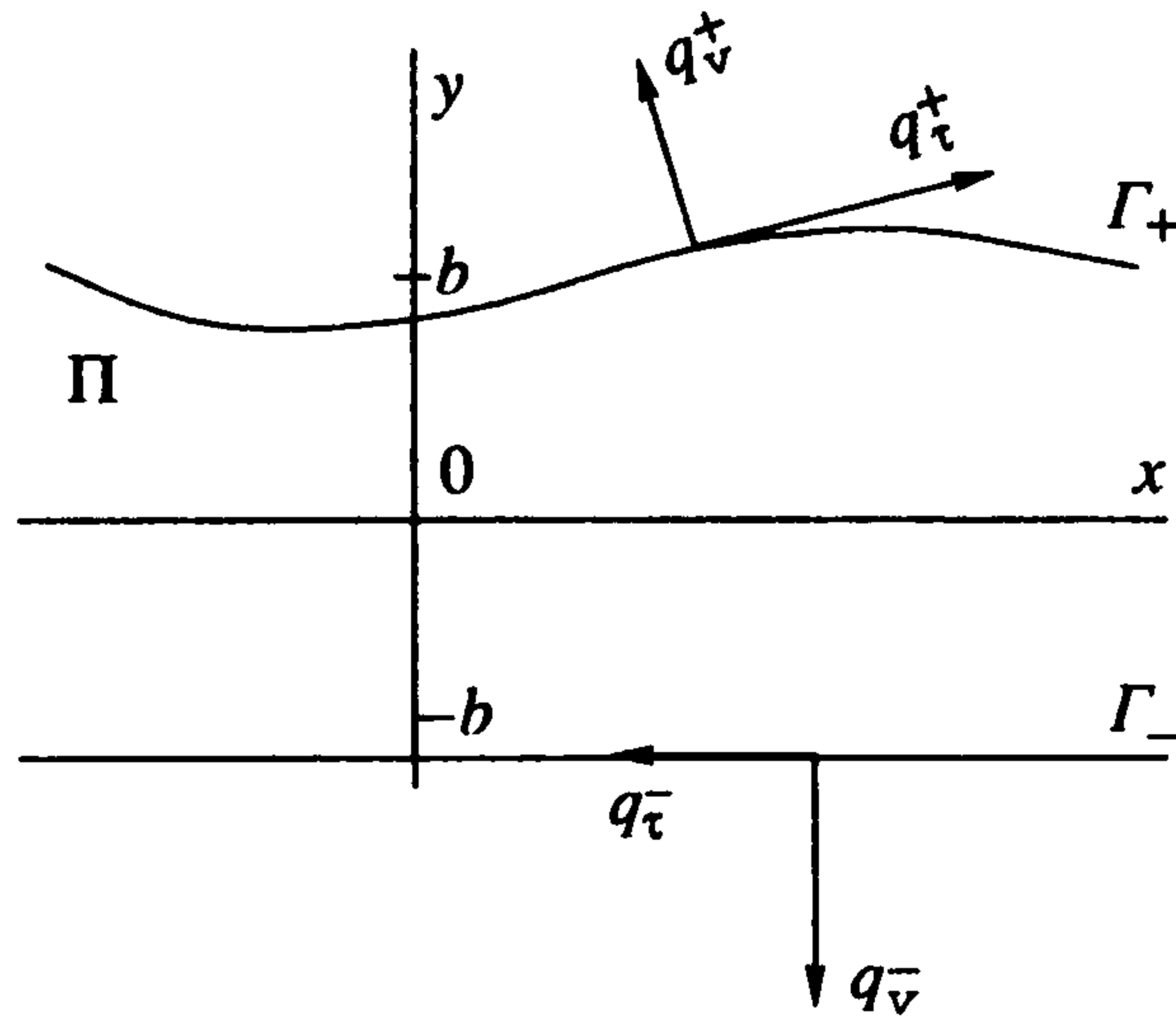
Согласно полученным ранее результатам [2], для тонкой полосы со слабоизменяющейся шириной имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} q_\tau^+(x) &= \frac{1}{2h(x)} (w_3(x) - w_1(x)) + \frac{\alpha h'(x)}{2(\alpha - 1)h(x)} (w_4(x) - w_2(x)) - \\ &- \frac{\alpha(2\alpha + 1)}{6(\alpha^2 - 1)} h'(x) w_1'(x) + \frac{1}{2(\alpha - 1)} w_2'(x) - \frac{(4\alpha^2 - \alpha - 6)}{6(\alpha^2 - 1)} h'(x) w_3'(x) + \\ &+ \frac{\alpha - 2}{2(\alpha - 1)} w_4'(x) + A_\tau h(x) w_1''(x) + B_\tau h(x) w_3''(x) \\ \frac{1}{2G} q_v^+(x) &= \frac{\beta_*}{2h(x)} (w_4(x) - w_2(x)) - \frac{\alpha h'(x)}{2(\alpha - 1)h(x)} (w_3(x) - w_1(x)) + \\ &+ \frac{1}{2(\alpha - 1)} w_1'(x) - \frac{\alpha(2\alpha - 1)}{6(\alpha - 1)^2} h'(x) w_2'(x) - \frac{\alpha - 2}{2(\alpha - 1)} w_3'(x) - \\ &- \frac{(\alpha - 2)(4\alpha - 3)}{6(\alpha - 1)^2} h'(x) w_4'(x) + A_v h(x) w_2''(x) + B_v h(x) w_4''(x) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} A_\tau \\ A_v \end{cases} = \frac{\mp 1}{4(\alpha - 1)} \left[1 \pm \frac{\alpha(\alpha \mp 1)}{3(\alpha \pm 1)} \right], \quad \begin{cases} B_\tau \\ B_v \end{cases} = \frac{-\alpha(\alpha \pm 2)}{6(\alpha - 1)(\alpha \pm 1)}$$

$$\beta_* = (\alpha + 1)(\alpha - 1)^{-1}, \quad h(x) = b + h^+(x), \quad \alpha = 3 - 4\nu$$

где ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига.



Фиг. 1

Используя вспомогательные координаты $\tilde{x} = -x$, $\tilde{y} = -y$ и соответствующие напряжения $\tilde{q}_\tau^+ = q_\tau^-$, $\tilde{q}_\nu^+ = q_\nu^-$, из (1.1) можно получить равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} q_\tau^-(x) &= \frac{1}{2h(x)} (w_3(x) - w_1(x)) - \frac{h'(x)}{2(\varkappa - 1)h(x)} (w_4(x) - w_2(x)) + \\ &+ \frac{\varkappa(\varkappa + 2)}{6(\varkappa^2 - 1)} h'(x)w_1'(x) + \frac{\varkappa - 2}{2(\varkappa - 1)} w_2'(x) - \frac{\varkappa(\varkappa + 2)}{6(\varkappa^2 - 1)} h'(x)w_3'(x) + \\ &+ \frac{1}{2(\varkappa - 1)} w_4'(x) - A_\tau h(x)w_3''(x) - B_\tau h(x)w_1''(x) \\ \frac{1}{2G} q_\nu^-(x) &= \frac{\beta_*}{2h(x)} (w_4(x) - w_2(x)) - \frac{h'(x)}{2(\varkappa - 1)h(x)} (w_3(x) - w_1(x)) - \\ &- \frac{\varkappa - 2}{2(\varkappa - 1)} w_1'(x) + \frac{\varkappa(\varkappa - 2)}{6(\varkappa - 1)^2} h'(x)w_2'(x) + \frac{1}{2(\varkappa - 1)} w_3'(x) - \\ &- \frac{\varkappa(\varkappa - 2)}{6(\varkappa - 1)^2} h'(x)w_4'(x) - A_\nu h(x)w_4''(x) - B_\nu h(x)w_2''(x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Далее величины h , h' , h'' будут считаться малыми порядка ε , т.е. $h(x) = \varepsilon \bar{h}(x)$, где ε – малый параметр, $\bar{h}(x)$ – заданная функция. В этом случае слагаемые, содержащие произведения величин h , h' , h'' , имеют квадратичный порядок малости и поэтому будут опускаться.

Из равенств (1.1) непосредственно вытекает, что разности $w_3 - w_1$ и $w_4 - w_2$, а следовательно, и их производные имеют порядок ε . При учете этого обстоятельства в результате дифференцирования предварительно умноженных на h равенств (1.1) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} (h(x)q_\tau^+(x))' &= w_3'(x) - w_1'(x) + (h(x)w_2'(x))' \\ \frac{\varkappa - 1}{G(\varkappa + 1)} (h(x)q_\nu^+(x))' &= w_4'(x) - w_2'(x) - \frac{\varkappa - 3}{\varkappa + 1} (h(x)w_1'(x))' \end{aligned} \quad (1.3)$$

Соотношения (1.3) позволяют найти выражения для напряжений $q_{\tau,\nu}^-$ через $q_{\tau,\nu}^+$. Для этого вычтем первое и второе равенства (1.2) из соответствующих равенств (1.1) и выразим из полученных таким образом соотношений разности $(w_3' - w_1')$, $(w_4' - w_2')$,

учитывая при этом выражения для $(w_3 - w_1)$, $(w_4 - w_2)$, имеющие место в силу (1.1). В результате можно получить соотношения

$$\begin{aligned} w'_3(x) - w'_1(x) &= -\frac{1}{G}(q_v^+(x) - q_v^-(x)) - \frac{1}{G}h'(x)q_\tau^+(x) - (h(x)w'_2(x))' \\ w'_4(x) - w'_2(x) &= \frac{\varkappa - 1}{G(\varkappa - 3)}(q_\tau^+(x) - q_\tau^-(x)) - \frac{\varkappa - 1}{G(\varkappa - 3)}h'(x)q_v^+(x) + \\ &+ \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 3}(h(x)w'_1(x))' \end{aligned}$$

подставляя которые в (1.3), приходим к искомым выражениям

$$\begin{aligned} q_\tau^+(x) - q_\tau^-(x) &= \frac{\varkappa - 3}{\varkappa + 1}(h(x)q_v^+(x))' + h'(x)q_v^+(x) - \frac{8G}{\varkappa + 1}(h(x)w'_1(x))' \\ q_v^+(x) - q_v^-(x) &= -(h(x)q_\tau^+(x))' - h'(x)q_\tau^+(x) \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Соотношения для композиции полоса – полуплоскость. Будем далее считать, что граница Γ_- полосы Π связана с упругой полуплоскостью (фиг. 1), так что [3]

$$w'_1(x) = -C_2q_v^-(x) + D_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_\tau^-(s)}{s - x} ds \equiv -C_2q_v^-(x) + D_2K_\tau^-(x) \quad (2.1)$$

$$w'_2(x) = C_2q_\tau^-(x) + D_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_v^-(s)}{s - x} ds \equiv C_2q_\tau^-(x) + D_2K_v^-(x)$$

где $C_2 = -(1 - 2\nu_2)(2G_2)^{-1}$, $D_2 = (1 - \nu_2)(\pi G_2)^{-1}$, ν_2 , G_2 – упругие постоянные полуплоскости. В дальнейшем для обозначения упругих постоянных полосы используется индекс 1.

Контактные напряжения $q_{\tau,v}^+$ будем считать функциями с нулевыми значениями вне некоторой области контакта (a, b) , производные которых удовлетворяют условию Гёльдера на $[a, b]$

$$q_{\tau,v}^+(x) = 0, \quad x \notin (a, b); \quad q_{\tau,v}^{+'}(x) \in H[a, b] \quad (2.2)$$

Относительно ширины h полосы, помимо известных ограничений [2], предполагается, что соответствующая функция $h(x)$ и ее производная удовлетворяют условию Гёльдера на любом отрезке оси x , т.е.

$$h^{(k)}(x) \in H(-\infty, \infty), \quad k = 0, 1 \quad (2.3)$$

Цель дальнейших выкладок – получение соотношений между граничными деформациями w'_3, w'_4 и контактными напряжениями q_τ^+, q_v^+ . При этом будет использоваться следующая схема: с помощью соотношений (2.1) из (1.3) исключаются величины w'_1, w'_2 , после чего в полученных равенствах напряжения q_τ^-, q_v^- выражаются через q_τ^+, q_v^+ согласно равенствам (1.4).

Для выполнения этих преобразований потребуются два утверждения.

Утверждение 1. Пусть $f(x) \in H[a, b]$. Тогда

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \frac{f(s)ds}{s - x} = \int_a^b \frac{f'(s)ds}{s - x} - \frac{f(s)}{s - x} \Big|_a^b, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (2.4)$$

Доказательство. Введем функцию $\psi(x) = f(x) - r(x)$, где

$$r(x) = \frac{1}{b-a}[(x-a)f(b) + (b-x)f(a)] - \frac{(x-a)(b-x)}{(b-a)^2}[(x-a)f_2 - (b-x)f_1]$$

$$f_1 = f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \quad f_2 = f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

так что

$$\psi(a) = \psi(b) = \psi'(a) = \psi'(b) = 0, \quad \psi'(x) \in H[a, b] \quad (2.5)$$

Соотношения (2.5) позволяют, рассмотрев в комплексной плоскости $z = x + iy$ произвольный гладкий замкнутый контур L , содержащий на вещественной оси произвольный отрезок $[\tilde{a}, \tilde{b}] \supset [a, b]$ и, положив в точках t контура L вне $[a, b]$ функцию $\psi(x)$ равной нулю, установить, что $\psi'(t) \in H(L)$, $t \in L$ и, следовательно, [4]

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \frac{\psi(t) dt}{t-x} = \int_a^b \frac{\psi'(t) dt}{t-x}, \quad x \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$$

Замена в последнем равенстве функции $\psi(x)$ разностью $f(x) - r(x)$, взятие интегралов от известных функций $r(x)$ и $r'(x)$, а также произвольность выбора отрезка $[\tilde{a}, \tilde{b}] \supset [a, b]$ приводят к соотношению (2.4).

Утверждение 2. Пусть $f(x) \in H[a, b]$, $g(x) \in H(-\infty, \infty)$ и $f(x) = 0$, $x \notin (a, b)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{s-x} \left(\int_a^b \frac{f(t) dt}{t-s} \right) ds = -\pi^2 f(x) g(x) + \int_a^b f(t) K(t, x) dt \quad (2.6)$$

где

$$K(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(s, x) ds}{(s-x)(t-s)}, \quad \rho(s, x) = g(s) - g(x)$$

Доказательство. Равенство (2.6) получается, если в формуле Пуанкаре – Бельтрана [5] осуществить предельный переход к бесконечным пределам интегрирования и воспользоваться равенством нулю функции $f(x)$ вне интервала (a, b) .

Подставим теперь равенства (2.1) в (1.3) и заменим в них q_τ^-, q_ν^- на q_τ^+, q_ν^+ согласно выражениям (1.4). В полученных таким образом равенствах, пользуясь утверждением 1, внесем операцию дифференцирования под знак интеграла и с помощью утверждения 2, учитывая условие (2.2), выполним следующее преобразование полученного в первом из этих равенств двойного интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(h(s)K_\tau^-(s))'}{s-x} ds = -\pi^2 (h(x)q_\tau^+(x))' + R(x) + O(\epsilon^2)$$

где

$$R(x) = \int_a^b q_\tau^{+'}(t) K_0(t, x) dt + \int_a^b q_\tau^+(t) K_1(t, x) dt$$

$$K_m(t, x) = \frac{1}{t-x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^{(m)}(s)}{s-x} ds - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^{(m)}(s)}{s-t} ds \right]$$

В результате получим искомые соотношения

$$\begin{aligned}
w_3'(x) = & \frac{k_\tau}{G_1} (h(x)q_\tau^+(x))' - C_2(q_v^+(x) + h'(x)q_\tau^+(x)) + D_2K_\tau^+(x) - \\
& - D_2\mu h(x)K_v^{+'}(x) - D_2h'(x)K_v^+(x) + \frac{8G_1D_2^2}{(\alpha_1 + 1)} R(x) - \\
& - \frac{2D_2(\alpha_1 - 1)}{(\alpha_1 + 1)} \left[1 - n \frac{(\alpha_2 - 1)}{(\alpha_1 - 1)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h'(s)q_v^+(s)}{s - x} ds - D_2(\mu - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(s, x)q_v^{+'}(s)}{s - x} ds \\
w_4'(x) = & Bk_v(h(x)q_v^+(x))' + C_2(q_\tau^+(x) - h'(x)q_v^+(x)) + D_2K_v^+(x) + \\
& + D_2\mu h(x)K_\tau^{+'}(x) + D_2(\mu - 1)h'(x)K_\tau^+(x) + 2D_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h'(s)q_\tau^+(s)}{s - x} ds + D_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(s, x)q_\tau^{+'}(s)}{s - x} ds
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}
\rho(s, x) = h(s) - h(x), \quad \mu = \frac{2(\alpha_2 - 1)}{(\alpha_1 + 1)} \left[\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - 1} - n \right], \quad n = \frac{G_1}{G_2}, \quad B = \frac{(\alpha_1 - 1)}{G_1(\alpha_1 + 1)} \\
k_\tau = 1 + \frac{n}{2}(\alpha_2 - 1) - \frac{n^2}{2} \frac{(\alpha_2 + 1)^2}{(\alpha_1 + 1)}, \quad k_v = 1 + \frac{n}{2} \frac{(\alpha_1 - 3)(\alpha_2 - 1)}{(\alpha_1 - 1)} - \frac{n^2}{2} \frac{(\alpha_2 - 1)^2}{(\alpha_1 - 1)}
\end{aligned}$$

Замечание. Полагая в равенствах (2.7) $h(x) = \text{const}$, $q_\tau^+(x) = 0$, приходим к соотношениям из [1], а для однородной полуплоскости, когда $h(x) = \text{const}$, $v_1 = v_2$, $G_1 = G_2$, равенства (2.7) принимают вид (2.1) из [3].

В случае $v_1 = v_2$, $G_1 = G_2$, т.е. однородной полуплоскости с неровной границей, из (2.7) имеем

$$\begin{aligned}
w_3'(x) = & -C_2(q_v^+(x) + h'(x)q_\tau^+(x)) + D_2K_\tau^+(x) - D_2h'(x)K_v^+(x) + \\
& + \frac{8G_2D_2^2}{(\alpha_1 + 1)} R(x) + D_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(s, x)q_v^{+'}(s)}{s - x} ds \\
w_4'(x) = & C_2(q_\tau^+(x) - h'(x)q_v^+(x)) + D_2K_v^+(x) - D_2h'(x)K_\tau^+(x) + \\
& + 2D_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h'(s)q_\tau^+(s)}{s - x} ds + D_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(s, x)q_\tau^{+'}(s)}{s - x} ds
\end{aligned} \tag{2.8}$$

3. Численная проверка выкладок. Рассмотрим полуплоскость $y \leq 0$, к границе $y = 0$ которой приложены напряжения $\tau_{xy}|_{y=0} = \tau(x)$, $\sigma_y|_{y=0} = \sigma(x)$. Проведем внутри этой полуплоскости кривую Γ_+ : $y = h(x) - h_*$ и обозначим через w_3 и w_4 перемещения Γ_+ вдоль осей x и y , а через q_τ^+ и q_v^+ — касательное и нормальное напряжения на Γ_+ .

Величины w_3 , w_4 и q_τ^+ , q_v^+ могут быть найдены исходя из известного решения граничной задачи для полуплоскости $y \leq 0$. С другой стороны, эти величины соответствуют задаче о деформации полуплоскости с неровной границей Γ_+ и должны быть связаны соотношениями (2.8). Таким образом, определяя величины w_3 , w_4 и q_τ^+ , q_v^+ на Γ_+ из решения граничной задачи для полуплоскости $y \leq 0$ и подставляя их в соотношения (2.8), можно провести проверку последних.

В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$h(x) = \frac{h_*}{1 + (x/l)^2}, \quad \tau(x) = \begin{cases} \tau, & x \in [-a_0, a_0] \\ 0, & x \notin [-a_0, a_0] \end{cases} \quad \sigma(x) = \begin{cases} \sigma, & x \in [-a_0, a_0] \\ 0, & x \notin [-a_0, a_0] \end{cases} \quad (3.1)$$

где $h_* > 0$, $l > 0$, $a_0 > 0$, τ , σ – некоторые параметры. Проверку равенств (2.8) проведем в точке $x = 0$.

Согласно определению (3.1), кривая Γ_+ в окрестности точки $x = 0$ совпадает с границей полуплоскости $y \leq 0$. Поэтому точные значения $w'_3(0)$ и $w'_4(0)$ можно получить, воспользовавшись соотношениями для полуплоскости вида (2.1). В результате, принимая во внимание выражения (3.1) для контактных напряжений, найдем

$$w'_3(0) = -C_2\sigma, \quad w'_4(0) = C_2\tau \quad (3.2)$$

Пользуясь известными [6] формулами для напряжений в полуплоскости при кусочно-постоянных контактных напряжениях (3.1), получим следующее выражение для напряжений q_τ^+ , q_v^+ на Γ_+ с точностью до $O(\epsilon^2)$:

$$q_\tau^+(x) = \frac{2}{\pi} h'(x) [\sigma z^3 I_0(x) - \tau z^2 I_1(x) - \sigma z I_2(x) + \tau I_3(x)] - \frac{2}{\pi} [\sigma z^2 I_1(x) - \tau z I_2(x)] \quad (3.3)$$

$$q_v^+(x) = \frac{2}{\pi} [\sigma z^3 I_0(x) - \tau z^2 I_1(x)] + \frac{4}{\pi} h'(x) [\sigma z^2 I_1(x) - \tau z I_2(x)]$$

в которых $z = h_* - h(x)$, а интегралы

$$I_k(x) \equiv \int_a^b \frac{(x-t)^k dt}{[(x-t)^2 + z^2]^2}$$

берутся в явном виде [7].

Для функции $h(x)$ вида (3.1) и $x = 0$ ядра $K_{0,1}$ из (2.8) имеют вид

$$K_0(t, 0) = \frac{\pi h_*}{l(1+T^2)}, \quad K_1(t, 0) = -\frac{\pi h_* T(3+T^2)}{l^2(1+T^2)^2}, \quad T = \frac{t}{l} \quad (3.4)$$

Равенства (3.1), (3.3), (3.4) в явном виде определяют подынтегральные выражения в (2.8). Выполняя численное интегрирование, можно найти правые части (2.8) и сравнить их с известными из (3.2) значениями $w'_3(0)$, $w'_4(0)$.

Расчеты проводились при $l = 1$ м, $a_0 = 1$ м, $\tau = -10^5$ Па, $\sigma = 10^5$ Па, $\nu_2 = 0,25$, $G_2 = 10^{10}$ Па.

На фиг. 2 показаны зависимости от h_* (сплошные линии) расчетных значений правых частей первого и второго соотношений (2.8) при $x = 0$. Штрих-пунктирными линиями представлены значения $w'_3(0)$ и $w'_4(0)$ левых частей (2.8) согласно (3.2). Штриховые линии 1 соответствуют правым частям (2.8) с опущенными последними слагаемыми, тогда как штриховые линии 2 – классическим выражениям для $w'_3(0)$, $w'_4(0)$ вида (2.1).

Представленные графики свидетельствуют о том, что расхождение левых и правых частей (2.8) уменьшается до нуля при $h_* \rightarrow 0$, причем расхождение имеет квадратичный порядок малости по h_* . Это свидетельствует о справедливости соотношений (2.8), точность которых также имеет квадратичный порядок малости по $\epsilon \sim h_*$ (напомним, что члены $O(\epsilon^2)$ при выводе (2.7), (2.8) опускались).

Удержание некоторых членов в правых частях соотношений (2.8) уменьшает порядок их точности. Классические соотношения вида (2.1) также не обладают столь высокой точностью, как (2.8).

4. Примеры. Соотношения (2.7) обобщают известные соотношения [1] на случай полосы со слабоизменяющейся шириной. В связи с этим возникает вопрос: насколько существенным может оказаться различие в результатах при использовании соотношений (2.7) вместо полученных ранее [1]? Для ответа на этот вопрос ниже рассматриваются два примера, касающиеся анализа изнашивания тонкого покрытия, деформационные свойства которого описываются рассмотренной выше моделью упругой полосы.

Рассмотрим покрытие толщины $h_0 = \text{const}$, связанное с жесткой подложкой, в которое вдавливаются движущийся со скоростью V_s штамп, имеющий цилиндрическую форму с перпендикулярной плоскости xu образующей (фиг. 1). В результате такого взаимодействия покрытие изнашивается и его толщина уменьшается: $h = h_0 - W$, причем скорость износа W полагается пропорциональной контактному давлению $p = -q_v^+$:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \equiv -\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \alpha_0 |V_s| p(x, t), \quad W(x, 0) = 0, \quad h(x, 0) = h_0 \quad (4.1)$$

Для определения перемещения вдоль оси y верхней границы покрытия воспользуемся равенством $w_4 = -B\tilde{h}p$, которое при $\tilde{h} = h$ следует из второго соотношения (2.7), а при $\tilde{h} = h_0$ – из соотношений, полученных ранее [1], если учесть, что для жесткой подложки $G_2 = \infty$. Тогда условие контакта штампа с покрытием можно представить в виде [8, 9]

$$B\tilde{h}(x, t)p(x, t) + W(x, t) = d(x, t) \quad (4.2)$$

$$d(x, t) = -g(x) + \delta(t), \quad \tilde{h}(x, t) = \{h(x, t), h_0\}$$

где $g(x)$ – форма штампа, $\delta(t)$ – его внедрение.

Уравнения (4.1), (4.2) описывают процесс изнашивания покрытия на жесткой подложке, причем случай $\tilde{h}(x, t) = h(x, t)$ соответствует соотношениям (2.7), тогда как при $\tilde{h}(x, t) = h_0$ используются соотношения [1] и упругая податливость покрытия при изнашивании считается неизменной [8].

1°. Пусть штамп движется перпендикулярно плоскости xu и его область контакта с покрытием является постоянной (подобная постановка износоконтактной задачи рассматривалась, например, в [9]). Внедрение δ положим линейно возрастающим во времени: $\delta(t) = \delta_0 + \delta_1 t$. Исключая из равенства (4.2) с помощью (4.1) функцию $p(x, t)$ и обозначая $\alpha = \alpha_0 |V_s|$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{B}{\alpha} \tilde{h}(x, t) \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + h(x, t) = h_0 + g(x) - \delta_0 - \delta_1 t, \quad h(x, 0) = h_0 \quad (4.3)$$

решение которого при $\tilde{h}(x, t) = h_0$ получается элементарно, а при $\tilde{h}(x, t) = h(x, t)$ может быть найдено в параметрическом виде [10] (ξ – параметр)

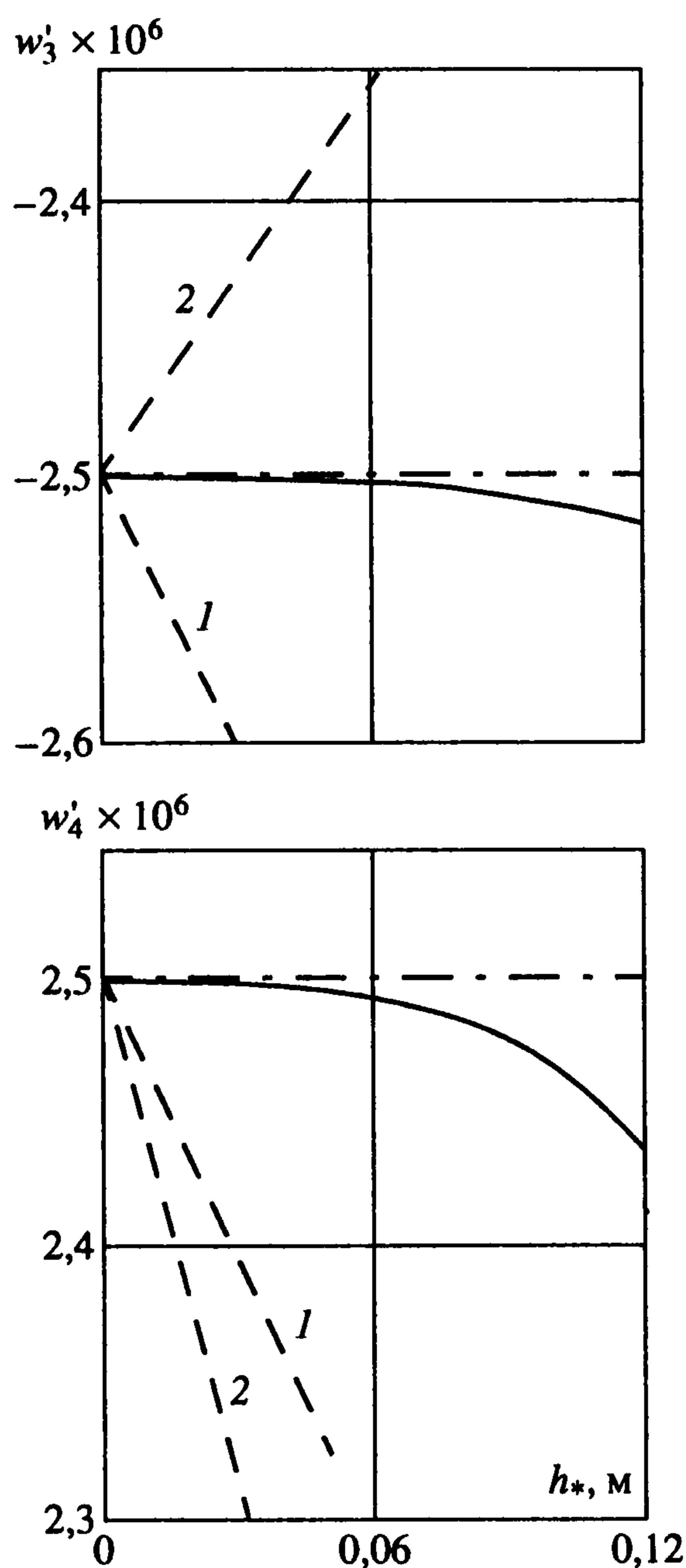
$$h(x, t) = h_0 \frac{A_2(x)}{A_1} \xi \exp[\varphi(\xi_0) - \varphi(\xi)]$$

$$t = \frac{Bh_0}{\alpha A_1} A_2(x) \{1 - \exp[\varphi(\xi_0) - \varphi(\xi)]\} \quad (4.4)$$

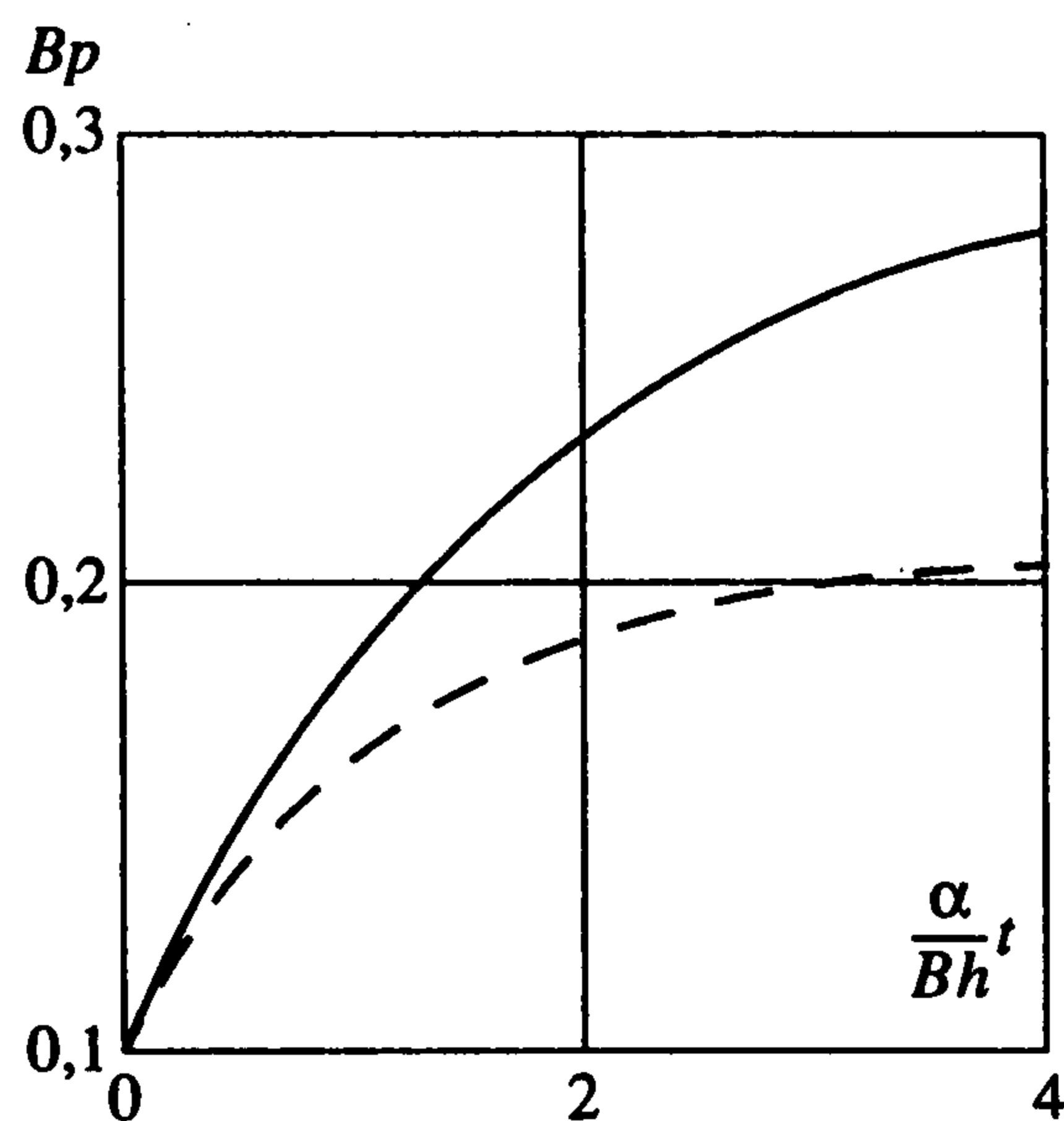
$$\xi_0 = \frac{A_1}{A_2(x)}, \quad A_1 = \frac{1}{\alpha} \delta_1 B, \quad A_2(x) = \frac{1}{h_0} [h_0 - \delta_0 + g(x)]$$

$$\exp[\varphi(\xi)] = |\xi - \xi_1|^{(1-\gamma)/2} |\xi - \xi_2|^{(1+\gamma)/2}, \quad \xi_{1,2} = \frac{1}{2} [1 \mp (1 - 4A_1)^{1/2}]$$

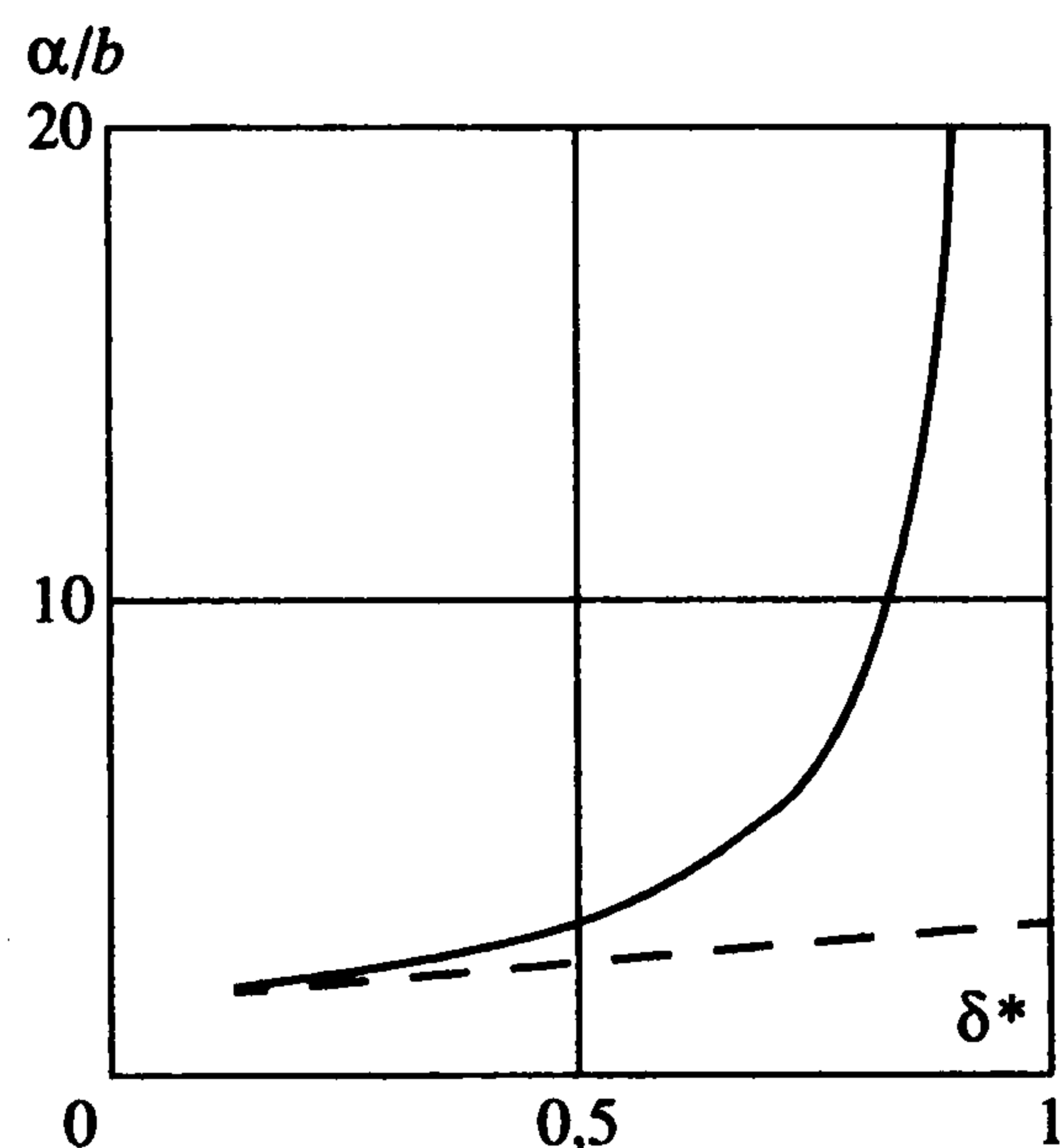
Согласно равенствам (4.4), при $g(x) \equiv 0$ контактное давление p и толщина h зависят только от времени t , являясь постоянными в пределах области контакта. На фиг. 3 показана зависимость $p(t)$. Штриховая линия соответствует решению уравнения (4.3) при $\tilde{h}(x, t) = h_0$.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

2°. Пусть параболический штамп движется в плоскости xu со скоростью V_s в направлении, противоположном оси x . Свяжем систему координат xu со штампом и рассмотрим в этой системе установившееся изнашивание покрытия (подобная постановка задачи рассматривалась, например, в [11]).

Если обозначить через $[-a, b]$ область контакта, то для параболического штампа $g(x) = kx^2$ правая часть равенства (4.2) имеет вид $d(x) = k(a^2 - x^2)$. Кроме того, справедливо соотношение [11] $W'(x) = -h'(x) = \alpha_0 p(x)$.

С помощью двух последних равенств из (4.2) можно получить уравнение

$$\frac{B}{\alpha_0} \tilde{h}(x) h'(x) + h(x) = h_0 - k(a^2 - x^2) \quad (4.5)$$

при следующих условиях: $h(-a) = h_0$, $p(-a) = p(b) = 0$. Соответствующее решение без труда строится численно с использованием разностной схемы [12].

На фиг. 4 представлены данные по зависимости отношения a/b , характеризующего асимметрию области контакта от величины относительного внедрения $\delta^* = ka^2/h_0$. Сплошная линия получается из уравнения (4.5) при $\tilde{h}(x) = h(x)$, штриховая – при $\tilde{h}(x) = h_0$. Величина $|h'(x)|$ для представленных зависимостей не превышала $5 \cdot 10^{-3}$.

Изображенные на фиг. 3 и 4 зависимости свидетельствуют о том, что учет изменения упругой податливости покрытия на основе соотношений (2.7) может существ-

венно влиять на результаты расчета изнашивания покрытия по сравнению с тем, что имеет место при использовании полученных ранее соотношений [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00901).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александрова Г.П.* Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 97–106.
2. *Солдатенков И.А.* Асимптотический анализ решения задачи теории упругости для полосы переменной ширины // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 57–73.
3. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
4. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. *Johnson K.L.* Contact mechanics. Cambridge University Press, 1985. = *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
8. *Коваленко Е.В.* К расчету изнашивания сопряжения вал – втулка // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 66–72.
9. *Горячева И.Г., Солдатенков И.А.* Теоретическое исследование приработки и установившегося режима изнашивания твердых смазочных покрытий // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 3. С. 420–431.
10. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997. 512 с.
11. *Солдатенков И.А.* Задача об изнашивании полуплоскости дисковым контртелом // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 107–110.
12. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.XI.1998