

УДК 539.375 : 534.1

© 2001 г. А.А. Золотарев

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ЧАСТИЧНОМ ИМПУЛЬСНОМ РАССЛОЕНИИ СРЕД

Обобщается методика решения неустановившихся волновых задач со смешанными граничными условиями для слоистых сред [1–3] в приложении к проблемам нарушения сплошности. В отличие от известных результатов [1, 4, 5], полученных для случая распространения с начального момента времени лишь гармонических возмущений, на основе асимптотического анализа решения системы функциональных уравнений типа Винера – Хопфа выявлена пространственно-временная структура волновых полей в случае импульсных режимов их генерирования. Анализируются условия возникновения слабых волноводных эффектов для неустановившихся волн, обусловленных слоистой структурой полугораниченных сред.

Рассматривается двухслойный пакет упругих сред постоянной толщины h ($h = h_1 + h_2$), неограниченный в направлении горизонтальных плоскопараллельных границ. Изучим характер волновых полей, возбуждаемых с начального момента времени $t = 0$ импульсным разрывом сплошности в полуплоскости D на границе раздела слоев

$$\mathbf{L}_j \cdot \mathbf{v}_j = \rho_j \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{v}_j; \quad |\mathbf{x}| < \infty, \quad -h_1 \leq z \leq h_2 \quad (1)$$

$$\mathbf{L}_j = (\lambda_j + \mu_j) \text{grad div} + \mu_j \text{rot rot}$$

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{x}, t) = (u_j, w_j), \quad \mathbf{p}_j(\mathbf{x}, t) = (\sigma_j, \tau_j), \quad j = 1, 2$$

$$\mathbf{x} = (x, z), \quad D = \{\mathbf{x}: |x| > 0, z = 0\}$$

$$z = 0: \quad \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{cases} \Delta \mathbf{v}, & \mathbf{x} \in D \\ 0, & \mathbf{x} \notin D \end{cases}, \quad \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \begin{cases} \Delta \mathbf{p}, & \mathbf{x} \in D \\ 0, & \mathbf{x} \notin D \end{cases}$$

$$z = -h_1: w_1 = 0, \quad \tau_1 = 0; \quad z = h_2: \mathbf{p}_2 = \mathbf{f}(x, t) \quad (2)$$

$$t = 0: \quad \mathbf{v}_j = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_j = 0 \quad (3)$$

Здесь (x, z) – декартова прямоугольная система координат с началом на границе раздела сред $z = 0$; $\rho_j, \lambda_j, \mu_j, h_j$ – плотность, параметры Ламе и толщина j -го слоя; $\mathbf{p}_j, \mathbf{v}_j, \Delta \mathbf{p}, \Delta \mathbf{v}$ – компоненты тензора напряжений (σ_j, τ_j – нормальные и касательные), вектора смещений и их скачки соответственно. Предполагается, что материал подчиняется закону Гука, а известными являются напряжения $\mathbf{p}_j$ на берегах разрыва сплошности в области D (следовательно, – их скачок $\Delta \mathbf{p}$ в (2) и внешние воздействия $\mathbf{f}$). Используются нулевые начальные условия (3).

Метод интегральных преобразований Фурье и Лапласа по переменным x и t с параметрами α и s позволяет свести задачу (1) – (3) к системе функциональных

уравнений типа Винера – Хопфа

$$K\Delta W^+ = S^+ + S^- - K_0(T^+ + T^-) + \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}$$

$$G\Delta U^+ - K\Delta W^+ = G_0(T^+ + T^-) + \mathbf{N} \cdot \mathbf{F} \quad (4)$$

$$\alpha \in E, \quad \operatorname{Re} s \geq \delta_0 > 0$$

где E – общая для всех функций в (4) полоса регулярности в комплексной плоскости α , содержащая действительную ось; δ_0 – абсцисса сходимости преобразования Лапласа; $S^\pm$, $T^\pm$, $\Delta W^\pm$, $\Delta U^\pm$ – трансформанты функций σ , τ , Δw , Δu в плоскости раздела слоев ($z = 0$). Верхний индекс плюс (минус) соответствует указанным функциям, определенным для $x > 0$ ($x < 0$), и означает всюду в дальнейшем регулярность их образов в верхней ($E \cup \{\alpha: \operatorname{Im} \alpha > 0\}$) или нижней ($E \cup \{\alpha: \operatorname{Im} \alpha < 0\}$) полуплоскости как функций комплексной переменной α .

Для однозначно разрешимой начально-краевой задачи (1) – (3) функции Грина (4) в пространстве образов являются однозначными аналитическими, четными по совокупности переменных α , s с асимптотическим поведением

$$K, G = O(|\alpha|), \quad K_0, G_0 = O(1); \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad s = \text{const}$$

Для двухслойного пакета сред в отсутствие поверхностных воздействий ($\mathbf{F} = 0$) конкретный вид этих функций был определен ранее [4] и в силу громоздкости выражений здесь не выписывается. Ниже по мере построения решения будет приводиться лишь структура наиболее необходимых из них.

Как известно, вне общей полосы регулярности E функции Грина имеют счетные множества нулей и полюсов, являющихся волновыми числами, определяющими дисперсионные свойства рассматриваемой композитной среды. В частности, для них введем обозначения

$$\alpha = \alpha_n^\pm(s), \quad \eta = \eta_m^\pm(s), \quad K(\alpha_n^\pm, s) = K^{-1}(\eta_m^\pm, s) = 0 \quad (5)$$

$$\operatorname{Im} \{\alpha_n^+, \eta_m^+\} > 0, \quad \operatorname{Im} \{\alpha_n^-, \eta_m^-\} < 0, \quad \operatorname{Re} s \geq \delta_0 > 0$$

Для определенности в дальнейшем волновые числа будем считать пронумерованными в порядке возрастания их модулей.

Метод факторизации функций, обобщенный на случай неустановившихся задач [3, 4], позволяет представить решение системы (4) для образов искомых скачков смещений в области разрыва, а затем, используя последние, определить и волновые поля во всем волноводе. Например, в обозначениях (4), (5) для трансформант напряжений на границе раздела слоев вне дефекта получим

$$T^-(\alpha, s) = L^-(\alpha, s) \sum_m \frac{T_m^-}{\alpha - \eta_m^+}, \quad S^-(\alpha, s) = K^-(\alpha, s) \sum_m \frac{S_n^-}{\alpha - \alpha_n^+}$$

$$L^-(\alpha, s) = \frac{G^-(\alpha, s)}{G_0^-(\alpha, s)} \quad (6)$$

$$L^-(\eta_m^+, s) = 0, \quad (L^-(\beta_l^+, s))^{-1} = 0, \quad \operatorname{Im} \beta_l^+ > 0$$

$$T_m^- = - \frac{\Delta W^+(\eta_m^+, s)}{G^-(\eta_m^+, s) G_0^+(\eta_m^+, s) (K^{-1}(\eta_m^+, s))'}$$

$$S_n^- = \frac{T^-(\alpha_n^+, s) K_0(\alpha_n^+, s) - S^+(\alpha_n^+, s)}{(K^-(\alpha_n^+, s))'}$$

$$(K^-(\alpha_n^+, s))' = \frac{\partial}{\partial \alpha} (K^-(\alpha, s))$$

Здесь для функций K, G, K_0, G_0 реализована факторизация в виде произведения (например, $K(\alpha, s) = K^+(\alpha, s)K^-(\alpha, s)$), а неизвестные $\Delta W^+(\eta_m^+, s)$ удовлетворяют бесконечной линейной системе (откуда они и могут быть определены, например, методом редукции [3, 4] или методом последовательных приближений [5])

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{W} = \mathbf{B} \quad (7)$$

$$\mathbf{A} = \{a_{ml}\}, \quad \Delta \mathbf{W} = \{\Delta W^+(\eta_m^+, s)\}, \quad \mathbf{B} = \{b_m\}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Результаты (6) получены в предположении, что на разрыве отсутствуют касательные нагрузки, а нормальные нагрузки равны и противоположно направлены, т.е. $\{T^+, \Delta T^+, \Delta S^+\} = 0$. Последние допущения не снижают общности изложения методики решения и дальнейшего качественного анализа результатов.

Обратные преобразования Фурье и Лапласа, примененные к найденным трансформантам решения, позволяют получить представления физических полей в интегральной форме. Так, для исследуемых напряжений на границе раздела сред (6) имеем

$$\mathbf{p}(x, t) = \frac{1}{4i\pi^2} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{st} ds \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}^-(\alpha, s) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (8)$$

$$\mathbf{P}^-(\alpha, s) = \{S^-(\alpha, s), T^-(\alpha, s)\}; \quad x < 0, \quad z = 0, \quad \delta \geq \delta_0 > 0$$

Значения S^-, T^- заданы в (6), а в силу непрерывности волновых полей вне области разрыва сплошности D приняты обозначения

$$\mathbf{p}(x, t) = \mathbf{p}_j(x, t)|_{z=0} = \{\sigma(x, t), \tau(x, t)\}, \quad j = 1, 2; \quad x < 0$$

Можно показать, что в соотношении (8) операторы обращения коммутативны для достаточно широкого класса возмущающих факторов, например $\mathbf{p}_j(x, t) \in C_{\{(x, t): |D \cap (t \geq 0)\}} -$ непрерывных и убывающих на бесконечности по каждой из переменных в отдельности ($|x| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$) или убывающих по x и монохроматических по времени t .

Вычислим вначале интеграл Фурье в соотношении (8), замкнув контур интегрирования в верхнюю полуплоскость α , где единственными полюсами подынтегральных функций являются $\eta_m^+(s)$ и $\beta_m^+(s)$ соответственно. Используя теорию вычетов, для напряжений выводим

$$\mathbf{p}(x, t) = \sum_m \mathbf{q}_m(x, t), \quad x < 0, \quad z = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{q}_m(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \mathbf{Q}_m(s) \exp(-ix\theta_m + st\mathbf{I}) ds \quad (10)$$

$$\mathbf{Q}_m(s) = \{S_m(s), T_m(s)\}, \quad \mathbf{I} = \{1, 1\}$$

$$\theta_m \equiv \{\theta_{jm}\}_{j=1,2} = \{\eta_m^+, \beta_m^+\}$$

$$S_m(s) = \frac{1}{(K^{-1}(\eta_m^+, s))'} \sum_n \frac{S_n^-}{\alpha_n^+ - \eta_m^+}$$

$$T_m(s) = \frac{1}{(L^{-1}(\beta_m^+, s))'} \sum_l \frac{T_l^-}{\beta_m^+ - \eta_l^+}$$

При импульсных режимах отслоения образ Лапласа компонент известных динамических воздействий в области разрыва не имеет особенностей в полуплоскости $\text{Re } s \geq 0$. Следовательно, можно положить $\delta = 0$ и интеграл (10) свести к интегрированию по мнимой оси, что при замене $s = -i\omega$ приводит к более удобному

выражению

$$q_m(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(-i\omega) \exp(i\Phi_m(\omega, \gamma)) d\omega \quad (11)$$

$$\Phi_m(\omega, \gamma) = \{\eta_m^+(-i\omega) - \gamma\omega, \beta_m^+(-i\omega) - \gamma\omega\}$$

$$\Phi_m(\omega, \gamma) \equiv \{\Phi_{jm}\}_{j=1,2} = \theta_m(-i\omega) - \gamma\omega I$$

$$\gamma = t/|x|$$

Здесь $q_m = \{\sigma_m, \tau_m\}$ – вклады соответствующих мод с волновыми числами η_m^+, β_m^+ в решение (9), описывающее волновые поля для напряжений на границе раздела слоев вне области их отслоения D .

Выполним асимптотический анализ интегралов (11). При фиксированном $\omega = \text{const}$ конечное количество волновых чисел ($0 \leq m \leq M$, $M = M(\omega)$) $\theta_m = \{\eta_m^+, \beta_m^+\}$ действительнозначно. Они определяют основной модальный состав неустановившихся волновых пакетов, амплитудные факторы которых, как будет показано ниже, степенным образом убывают при $|x|$, $t \rightarrow \infty$. Оставшиеся моды с номерами $m > M$, соответствующие комплекснозначным волновым числам, обуславливают экспоненциально затухающие вклады и в дальнейшем в выражениях (9) и (11) не учитываются.

Для установившихся гармонических колебаний дисперсионные свойства широкого класса полубесконечных слоистых сред (при $s = -i\omega$, $\omega > 0$) хорошо изучены [1]. Анализ неустановившихся задач для этих сред на основе обобщения метода факторизации и представления решения в виде разложений по собственным функциям требует установления закона дисперсии $\alpha_m^+, \eta_m^+, \beta_m^+$ во всей области комплекснозначных s . Необходимое аналитическое продолжение дисперсионных зависимостей в эту область осуществим на основании выполнения естественного физического требования положительности групповых скоростей рассматриваемых мод [3]

$$C_{jm} = (\theta'_{jm})^{-1} > 0, \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (12)$$

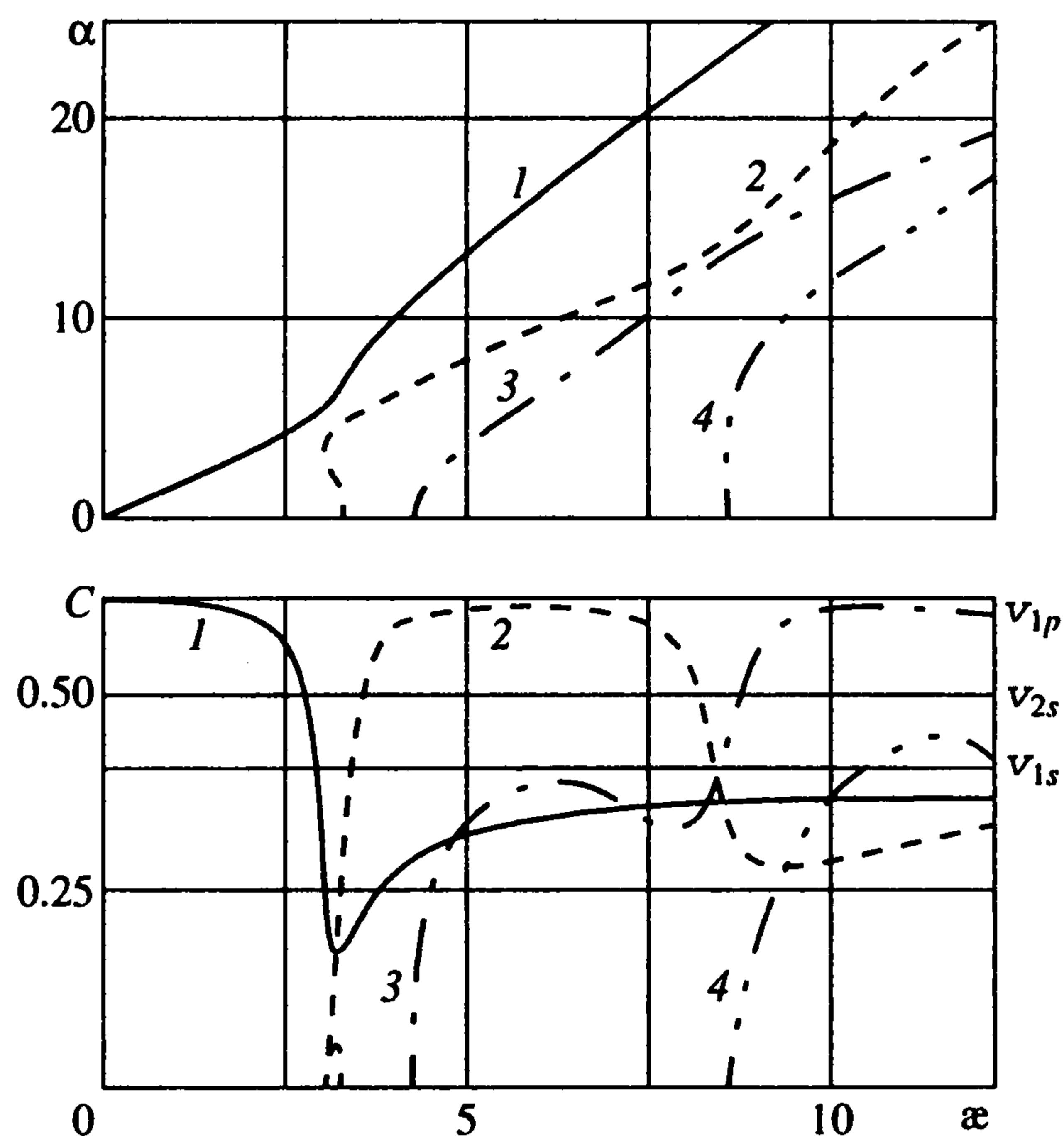
$$C_m^{-1} \equiv \{C_{jm}^{-1}(\omega)\}_{j=1,2} = \theta'_m = \partial \theta_m(-i\omega) / \partial \omega$$

В качестве характерного примера на фигуре в безразмерном виде приведен ряд первых дисперсионных зависимостей действительнозначных (при $s = -i\omega$) волновых чисел $\alpha = \alpha_n^+$ ($n = 1, 2, 3, 4$) и соответствующие им групповые скорости $C = C_n$. Переход к безразмерным величинам выполнен на основе характерных значений длины $h = h_1 + h_2$, скорости продольных волн $v = \max v_{j1}$ ($v_{j1} = \sqrt{(\lambda_j + \mu_j) / \rho_j}$) и плотности $\rho = \max \rho_j$. Результаты даны для безразмерных толщин слоев $H_j = h_j/h$ ($H_1 = 0,3$, $H_2 = 0,7$, $H = H_1 + H_2$), относительных плотностей $\rho_j^* = \rho_j / \rho$ ($\rho_1^* = 0,7$, $\rho_2^* = 1$), частоты κ , скоростей продольных v_{jp} и поперечных v_{js} волн, связанных с размерными величинами соотношениями

$$\kappa = \frac{\omega h}{v_{21}}, \quad v_{jp} = \frac{v_{j1}}{v_{21}} = \left[\frac{\rho_2(\lambda_j + \mu_j)}{\rho_j(\lambda_2 + \mu_2)} \right]^{1/2}$$

$$v_{js} = \frac{v_{j2}}{v_{21}} = \left[\frac{\rho_2 \mu_j}{\rho_j(\lambda_2 + \mu_2)} \right]^{1/2}; \quad j = 1, 2$$

На основании принципов локализации [6, 7] основные вклады в значение интеграла (11) вносят полюса подынтегральных функций и особые точки фазовых функций.



Фиг. 1

В силу импульсного по времени характера расслоения волновода амплитудные функции в (11) могут иметь полюса лишь в левой полуплоскости $\text{Im } s < 0$, не выходящие на контур интегрирования. Их вклады в силу экспоненциального затухания со временем не учитываются. Поэтому основной вклад в асимптотическое поведение интеграла (11) вносят действительные стационарные точки фазы

$$\omega = \pm \omega_{mn} \quad (n = 1, 2, \dots, N; \quad \partial \Phi_m(\pm \omega_{mn}, \gamma) / \partial \omega = 0) \quad (13)$$

В случае изолированных однократных стационарных точек (13), используя метод стационарной фазы [6], из (11) получим

$$\mathbf{q}_m(x, t) = \mathbf{q}_m^- - \mathbf{q}_m^+ + O(|t|^{-1}) \quad (14)$$

$$\mathbf{q}_m^\pm = \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{Y}_m(\pm \omega_{mn})}{|x|^{1/2}} \exp\left(\pm i |x| \Phi_m(\omega_{mn}, \gamma) \pm \frac{i\pi}{4} \chi_{mn} \mathbf{I}\right)$$

$$\mathbf{Y}_m(\omega) \equiv \{Y_{jm}(\omega)\}_{j=1,2} = \frac{U(\gamma)}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ \frac{S_m(i\omega)}{|\theta_{1m}''|^{1/2}}, \quad \frac{T_m(i\omega)}{|\theta_{2m}''|^{1/2}} \right\}$$

$$\theta_{jm}'' = \frac{\partial^2 \theta_{jm}(\pm i\omega_{mn})}{\partial \omega^2} \neq 0, \quad \theta_m'(\pm i\omega_{mn}) - \gamma \mathbf{I} = 0$$

$$\chi_{mn} = \text{sign } \theta_{jm}'', \quad U(\gamma) = \begin{cases} 1, & (x, t) \in D_n \\ 0, & (x, t) \notin D_n \end{cases}$$

$$D_n(x, t): \{C_{jmn}^- t < |x| < C_{jmn}^+ t\}$$

$$\gamma \equiv t/|x| = \text{const}, \quad x, t \rightarrow \infty$$

Выше для экстремальных значений групповых скоростей использованы обо-

значения

$$C_{jmn}^- = \min_{k=n-1, n} (C_{jmk}^*), \quad C_{jmn}^+ = \max_{k=n-1, n} (C_{jmk}^*)$$

$$C_{jmk}^* = C_{jm}(\omega_{mk}^*)$$

где ω_{mn}^* – граничные точки интервала Ω_n : $\{\omega_{mn-1}^* \leq \omega_{mn} \leq \omega_{mn}^*\}$ – области существования n -й стационарной точки ω_{mn} (13). Таким образом, в представлении (14) Ω_n определяет пространственно-временную область D_n , заполненную n -м волновым пакетом m -й моды для j -й компоненты волнового поля. Граничные значения ω_{mn}^* на интервале Ω_n (за исключением, быть может, ω_{m0}^* и $\omega_{mN}^* = \infty$) являются двухкратными стационарными точками соответствующих фазовых функций

$$\partial \Phi_m(\pm \omega_{mn}^*, \gamma^*) / \partial \omega = \partial^2 \Phi_m(\pm \omega_{mn}^*, \gamma^*) / \partial \omega^2 = 0$$

Поэтому при $\omega_{mn} \rightarrow \pm \omega_{mn}^*$ (что реализуется при условии $|x| \rightarrow C_{jmn}^* \cdot t$) интеграл (11) имеет отличное от (14) асимптотическое представление, которое может быть описано асимптотикой с использованием функций Эйри [6, 7] или эквивалентными разложениями [3]

$$\mathbf{q}_m(x, t) = \mathbf{q}_m^- - \mathbf{q}_m^+ + O(t^{-2/3}) \quad (15)$$

$$\mathbf{q}_m^\pm = \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{B}_m(\pm \omega_{mn}^*)}{|x|^{1/3}} \exp(\pm i |x| \Phi_m(\omega_{mn}^*, \gamma))$$

$$\mathbf{B}_m(\omega) \equiv \{B_{jm}(\omega)\} = \frac{\Gamma(1/3)}{\pi \cdot 2^{1/3}} \left\{ \frac{\chi_{mn} S_m(i\omega)}{|\theta_{1m}'''|^{1/3}}, \quad \frac{\chi_{mn} T_m(i\omega)}{|\theta_{2m}'''|^{1/3}} \right\}$$

$$j = 1, 2$$

$$\theta_m'(\pm i \omega_{mn}^*) - \gamma^* \mathbf{I} = 0, \quad \theta_m''(\pm i \omega_{mn}^*) = 0$$

$$\theta_{jm}''' = \frac{\partial^3 \theta_{jm}(\pm i \omega_{mn}^*)}{\partial \omega^3} \neq 0, \quad \chi_{mn} = U(\gamma) \text{sign } \theta_{jm}'''$$

$$U(\gamma) = \begin{cases} 1 & (x, t) \in D_n^* \\ 0 & (x, t) \notin D_n^* \end{cases}, \quad D_n^* : \left\{ |x| - C_{jmn}^* t < \varepsilon \ll 1 \right\}$$

$$t \rightarrow \infty, \quad |x| \rightarrow C_{jmn}^* t \quad (\gamma \rightarrow \gamma^*)$$

Из формул (9), (14), (15) видно, что волновое поле, порожденное импульсным во времени характером частичного отслоения сред, в пространственно-временных областях D_n представляет собой суперпозицию волновых пакетов, амплитуды которых убывают с расстоянием и затухают со временем ($|x| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$) как $|x|^{-1/2}$, $t^{-1/2}$ соответственно. Наибольших амплитуд эти волны достигают во фронтальных зонах D_n^* (в зоне переднего $|x| \rightarrow C_{jmn}^+ t$ и заднего $|x| \rightarrow C_{jmn}^- t$ фронтов каждого пакета). Здесь амплитудные факторы убывают и затухают слабее, пропорционально $|x|^{-1/3}$, $t^{-1/3}$.

Следует заметить, что образование таких волновых структур (с более медленным законом убывания амплитуд) характерно лишь для слоистых сред и может быть интерпретировано как проявление "слабых" волноводных эффектов для неустановившихся волн, генерируемых импульсными источниками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
3. *Золотарев А.А.* Один подход к решению интегральных уравнений начально-краевых задач для слоистых сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 30–35.
4. *Зайцева И.А., Золотарев А.А.* О пространственно-временной структуре волнового поля в двухслойной среде с граничной трещиной // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 172–179.
5. *Андрейчикова И.И., Золотарев А.А.* Дифракция волн на тонком включении в двухслойном волноводе // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 5. С. 773–781.
6. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
7. *Focke J.* Asimptotische Entwicklungen mittels der Methode der stationären Phase // Ber. Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. Math-naturwiss. Kl. 1954. Bd. 101. H. 3. S. 1–18.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
6.XII.1999