

УДК (539.3 + 624.07) : 534.1

© 2001 г. А.П. Малышев

О ДИНАМИКЕ ДВУХСЛОЙНОЙ БАЛКИ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ СЛОЕВ

На примере решения модельной задачи о колебаниях двухслойной балки изучается возможный тип конструкционного демпфирования в механических системах при различной зависимости декремента колебаний от амплитуды. Предполагается, что проскальзывание слоев происходит только вдоль оси балки, а в поперечном направлении слои движутся совместно. Взаимодействие слоев носит упругофрикционный характер. Уравнения движения балки в форме Тимошенко интегрируются численно на основе разностной схемы Годунова.

Колебания двухслойной консольной балки при поперечном изгибе исследовались в одной из первых работ по конструкционному демпфированию [1, 2]. Задача была решена в квазистатической постановке для случая, когда между слоями действуют силы сухого трения, подчиняющиеся закону Амонтона – Кулона.

В настоящей работе принимается, что фрикционные силы связаны с усилием полного торможения относительного проскальзывания контактных поверхностей. Такой подход позволяет описать конструкционное демпфирование при различной зависимости декремента колебаний от амплитуды. Рассматриваются свободные колебания балки, в том числе со слоями из различных материалов, а также проскальзывание поверхностей на волновой стадии переходных процессов.

1. Постановка задачи. Движение i -го слоя балки при учете сдвига и инерции поворота сечений описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \partial N_i / \partial x &= \rho_i F_i \partial U_i / \partial t - (-1)^i q, & \partial N_i / \partial t &= E_i F_i \partial U_i / \partial x \\ \partial Q_i / \partial x &= \rho_i F_i \partial W_i / \partial t, & \partial Q_i / \partial t &= k_s G_i F_i (\partial W / \partial x - \Phi_i) \\ \partial M_i / \partial x &= \rho_i J_i \partial \Phi_i / \partial t - Q_i + q h_i / 2, & \partial M_i / \partial t &= E_i J_i \partial \Phi_i / \partial x, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где N_i , Q_i , M_i – продольная сила, перерезывающая сила и изгибающий момент, U_i , W_i , Φ_i – продольная, поперечная и угловая скорости сечений, E_i , G_i – модули упругости при растяжении и сдвиге, F_i , J_i , h_i , k_s – площадь, момент инерции, высота и коэффициент формы сечения, ρ_i – плотность, q – погонное усилие взаимодействия слоев, t – время, x – осевая координата.

В уравнениях (1.1) учтено, что проскальзывание слоев происходит только вдоль оси балки, а в поперечном направлении слои движутся совместно.

Введем безразмерные параметры согласно зависимостям

$$\begin{aligned} N_i &= E_0 F_0 N_i^\circ, & Q_i &= E_0 F_0 Q_i^\circ, & M_i &= E_0 F_0 A_0 M_i^\circ, & U_i &= c_0 U_i^\circ \\ W &= c_0 W^\circ, & \Phi_i &= c_0 \Phi_i^\circ / A_0, & E_i &= E_0 E_i^\circ, & G_i &= E_0 G_i^\circ, & \rho_i &= \rho_0 \rho_i^\circ \\ F_i &= F_0 F_i^\circ, & J_i &= F_0^2 J_i^\circ, & h_i &= A_0 h_i^\circ, & x &= A_0 x^\circ, & t &= A_0 t^\circ / c_0 \\ q &= E_0 A_0 q^\circ, & A_0^2 &= F_0, & c_0^2 &= E_0 / \rho_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Верхним индексом "градус" помечены безразмерные параметры, а нижним нулевым

индексом – размерные величины, по которым проводится нормирование. Индекс "градус" далее ради краткости не приводится. Уравнения для безразмерных параметров идентичны (1.1).

Взаимодействие слоев носит упругофрикционный характер:

$$\begin{aligned} q &= \psi \operatorname{sign} V + \xi v, \quad V \neq 0 \\ q &= q_b + \xi v, \quad V = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где v и V – относительное смещение соприкасающихся поверхностей и его скорость, q_b – фрикционное усилие, соответствующее полному торможению относительного проскальзывания поверхностей.

Будем считать, что величина ψ связана степенной зависимостью с усилием q_b

$$\psi = \gamma |q_b|^\alpha \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) согласуется с характерной для конструкционного демпфирования степенной зависимостью декремента колебаний от амплитуды, а при $\alpha = 0$ как частный случай из него следует закон сухого трения Амонтона – Кулона.

2. Метод решения. Численное моделирование динамических процессов в балке проводилось на основе разностной схемы С.К. Годунова [3]. Расчетные соотношения для участка стержня между сечениями $x = x_{n-1}$ и $x = x_n$ имеют вид

$$\begin{aligned} N_i^* &= N_{i,*} + E_i F_i (U_{i,n} - U_{i,n-1}) \Delta t / \Delta x \\ M_i^* &= M_{i,*} + E_i J_i (\Phi_{i,n} - \Phi_{i,n-1}) \Delta t / \Delta x \\ W^* &= W_* + (Q_{1,n} + Q_{2,n} - Q_{1,n-1} - Q_{2,n-1}) / (\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2) \\ Q_i^* &= (b_1 \rho_i J_i - b_4 k_s G_i F_i \Delta t) / b_3, \quad \Phi_i^* = A_i - B_i q^*, \quad U_i^* = C_i - D_i q^* \\ b_1 &= Q_{i,*} + k_s G_i F_i (W_n - W_{n-1}) \Delta t / \Delta x \\ b_2 &= \rho_i J_i \Phi_{i,*} + (M_{i,n} - M_{i,n-1}) \Delta t / \Delta x, \quad b_3 = \rho_i J_i + k_s G_i F_i \Delta t^2 \\ b_4 &= b_2 - h_i \Delta t q^* / 2, \quad A_i = (b_2 + b_1 \Delta t) / b_3, \quad B_i = h_i \Delta t / (2 b_3) \\ C_i &= U_{i,*} + (N_{i,n} - N_{i,n-1}) \Delta t / (\rho_i F_i \Delta x), \quad D_i = (-1)^{i-1} \Delta t / (\rho_i F_i), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь i – номер слоя, звездочками в нижнем и верхнем индексах помечены среднеинтегральные в пределах участка значения параметров при t и $t + \Delta t$ соответственно, индексы n и $n - 1$ относятся к величинам, среднеинтегральным в пределах Δt для сечений x_n и x_{n-1} , Δt – шаг по времени, Δx – шаг по координате.

Усилие полного торможения взаимного проскальзывания слоев определяется по формуле

$$q_b^* = [C_1 - C_2 + (h_1 A_1 + h_2 A_2) / 2] / [D_1 - D_2 + (h_1 B_1 + h_2 B_2) / 2] \quad (2.2)$$

Для вычисления параметров на сторонах x_n и x_{n-1} ячейки разностной сетки используются соотношения на характеристиках

$$\begin{aligned} N_{i,n} - (j c_{1,i} \rho_i F_i)_{n-j/2} U_{i,n} &= (N_i - j c_{1,i} \rho_i F_i U_i)_{n-j/2} \\ Q_{i,n} - (j c_{2,i} \rho_i F_i)_{n-j/2} W_n &= (Q_i - j c_{2,i} \rho_i F_i W)_{n-j/2} \\ M_{i,n} - (j c_{1,i} \rho_i J_i)_{n-j/2} \Phi_{i,n} &= (M_i - j c_{1,i} \rho_i J_i \Phi_i)_{n-j/2} \\ c_{1,i}^2 &= E_i / \rho_i, \quad c_{2,i}^2 = k_s G_i / \rho_i, \quad j = 1, -1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где j – направляющий косинус внешней нормали к торцу элемента балки.

На краях балки одна из величин, входящих в пары $(N_{i,n}, U_{i,n})$, $(Q_{i,n}, W_n)$ и $(M_{i,n}, \Phi_{i,n})$, задана, а другая определяется с помощью соотношений (2.3).

Для каждого временного шага сначала проводится расчет без учета фрикционных

сил и определяется величина $\text{sign } V$, которая используется в дальнейшем расчете, поскольку фрикционные силы могут лишь затормозить относительное движение слоев, но не могут изменить его направления. Кроме того, вычисляется q_b^* . Равенство (2.2) отражает тот факт, что импульс нагрузки q_b^* на шаге Δt достаточен для полного торможения взаимного проскальзывания слоев, которое наблюдалось бы в конце шага при отсутствии диссипативных сил в течение Δt . Затем с помощью (1.3) и (1.4) определяется усилие взаимодействия слоев, а также другие параметры динамического процесса. Если оказывается, что скорость относительного смещения слоев все-таки меняет направление по сравнению с упругим решением, то принимается $V = 0$ и параметры процесса пересчитываются при фрикционном усилии, равном q_b^* .

Применение упрощенных, не содержащих членов порядка Δt соотношений на характеристиках и отнесение недиивергентных слагаемых в (2.1) к моменту $t + \Delta t$ повышают запас устойчивости разностной схемы. Вместе с тем построенная таким образом схема имеет только первый порядок аппроксимации. Чтобы поднять порядок аппроксимации до второго, был применен метод Рунге [4]. В соответствии с ним результаты расчетов уточнялись по формуле

$$R = 2R(\Delta x) - R(2\Delta x) \quad (2.4)$$

где $R(\Delta x)$, $R(2\Delta x)$ – значения параметра R , полученные при одинарном и удвоенном шаге сетки.

Для повышения точности описания волновой фазы движения и снижения сеточной вязкости была также использована шаговая процедура [5], позволяющая выдерживать равными единице числа Куранта для всех систем волн.

Указанный подход и использование шага $\Delta x = 0,0025$ позволили обеспечить достаточно низкий уровень сеточной вязкости при приемлемой затрате вычислительных ресурсов. Контрольные расчеты показали, что декремент, связанный с проявлениями сеточной вязкости, не превышал 1×10^{-4} .

3. Результаты численных расчетов. Сначала исследовались свободные колебания консольной балки, защемленной в сечении $x = 8$, при чисто фрикционном взаимодействии слоев ($\xi = 0$). Расчеты проводились для балки, состоящей из двух одинаковых слоев: $h_i = h$, $E_i = 1$, $\rho_i = 1$. Здесь и везде далее полагалось, что $k_s = 5/6$, ширина сечения $b = 1$, а коэффициент Пуассона равен 0,3. На торце $x = 0$ к каждому слою мгновенно прикладывалась постоянная перерезывающая сила, которая действовала в течение четверти периода основного тона поперечных колебаний, а затем снималась. По первым десяти амплитудам колебаний определялся логарифмический декремент колебаний δ .

Численный эксперимент показал, что в данном случае выражение (1.4) можно конкретизировать следующим образом:

$$\psi = \beta |q_b \Delta x|^\alpha, \quad \beta = k_q \frac{|Q_m|^{1-\alpha} \delta}{h} \quad (3.1)$$

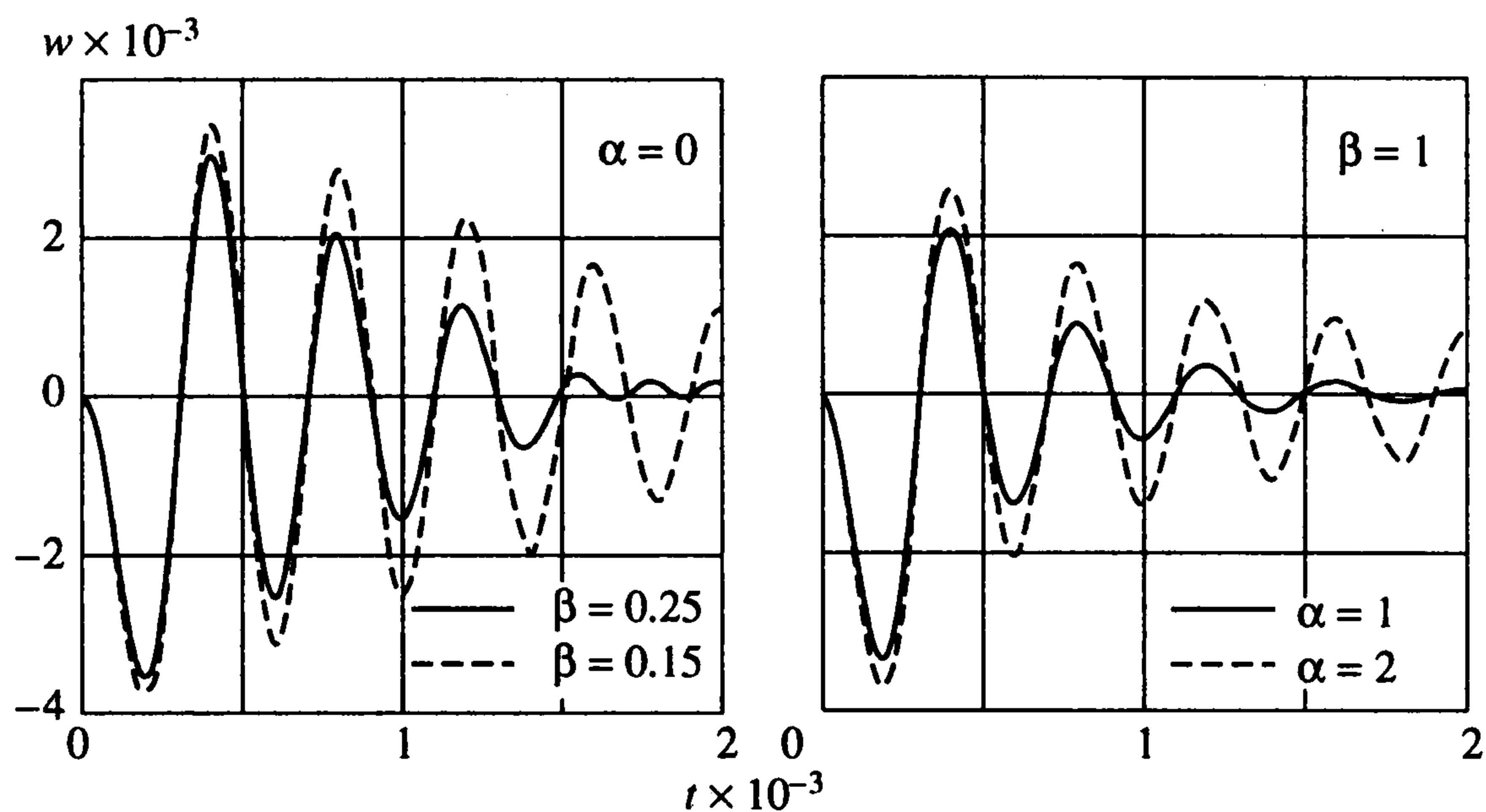
Здесь Q_m – текущая амплитуда перерезывающей силы в рассматриваемом сечении балки.

Очевидно, что $Q_m = k_f k_d$, где k_f – коэффициент, который зависит от формы колебаний, а k_d – текущий динамический коэффициент. Воспользовавшись тем, что $k_d = |w_m/w_c|$, где w_m – амплитуда прогиба на конце консоли, w_c – максимальный прогиб при статическом нагружении, получим

$$\beta = k \frac{\delta}{h} \left| \frac{w_m}{w_c} \right|^{1-\alpha}, \quad k = k_q k_f^{1-\alpha} \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что для фиксированного значения β в процессе свободных колебаний выполняются соотношения

$$\delta = a k_d^{\alpha-1}, \quad a = \beta h / k = \text{const} \quad (3.3)$$



Фиг. 1

Рассмотрим наиболее характерные значения α . Случай $\alpha = 0$ соответствует обычному сухому трению, для которого декремент колебаний, как известно, обратно пропорционален амплитуде. Именно такая зависимость следует и из соотношений (3.3). На фиг. 1 слева показано изменение прогиба w на конце балки при $\alpha = 0$. Видно характерное для сухого трения линейное убывание амплитуды. При $\beta = 0,25$ и $t > 1500$ происходит полное сцепление контактных поверхностей и наблюдаются незатухающие колебания с возросшей частотой.

Когда $\alpha = 1$, имеем демпфирование, при котором декремент не зависит от амплитуды. Правая часть фиг. 1 соответствует $\beta = 1$. Уменьшение амплитуды при $\alpha = 1$ подчиняется обычному экспоненциальному закону, а сцепления слоев не наблюдается.

Наконец, если $\alpha = 2$, то логарифмический декремент колебаний, согласно (3.3), оказывается прямо пропорциональным амплитуде. Убывание амплитуды при ее малых величинах, как показано в правой части фиг. 1, замедляется по сравнению с экспоненциальным законом, что свидетельствует об уменьшении декремента при падении амплитуды.

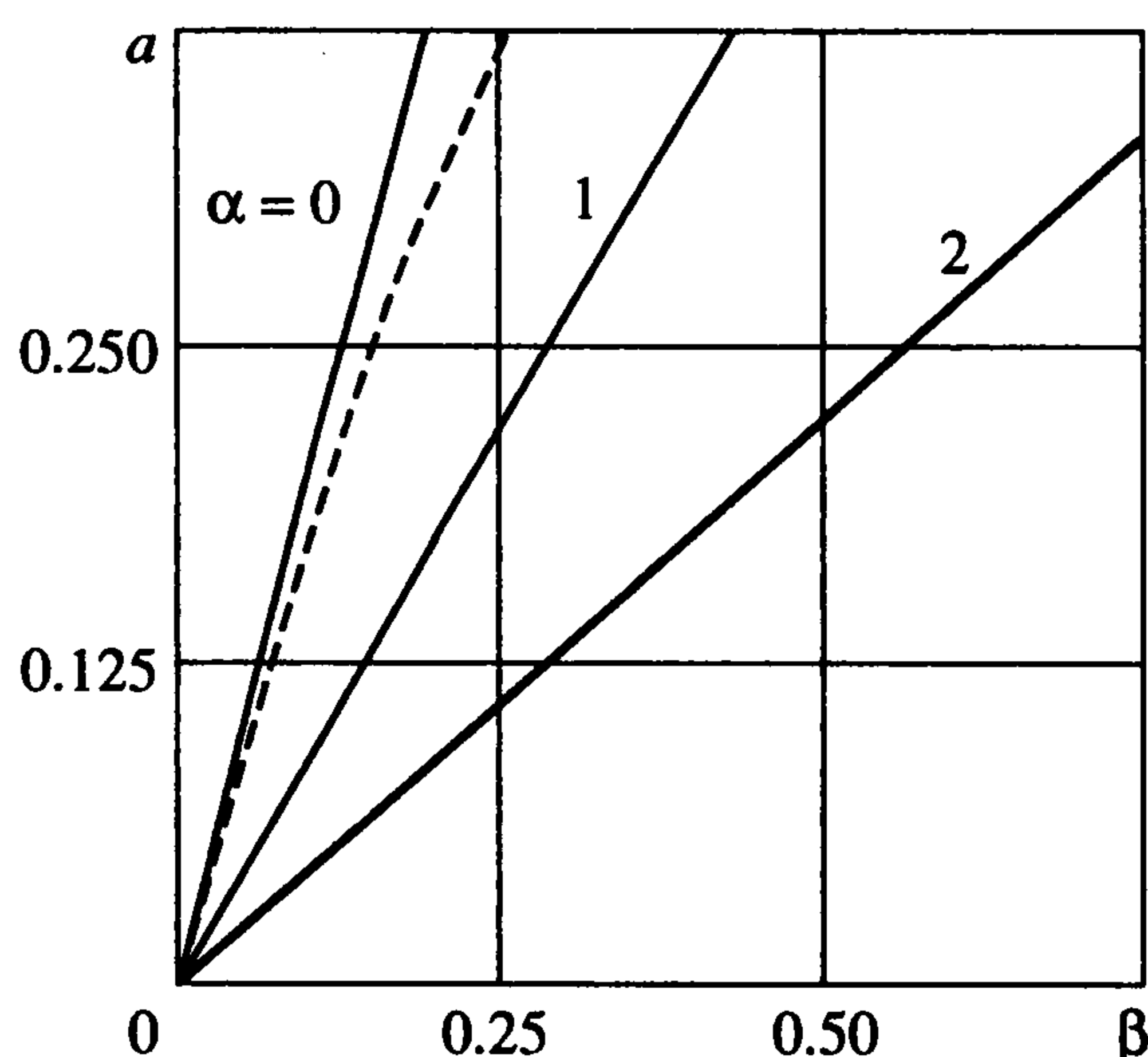
На фиг. 2 показано изменение параметра a в зависимости от β при разных значениях α . В качестве w_c принимался статический прогиб на конце консоли при отсутствии связи между слоями ($\beta = 0$). В рассмотренном диапазоне величина a линейно зависит от β при любом α . Штриховая линия соответствует результатам, полученным на основе квазистатического решения для симметричного цикла нагружения [1, 2], где, естественно, было принято $w_m = w_c$.

Исследование свободных колебаний балки, слои которой различаются своими механическими свойствами, показало, что уменьшение скорости звука в одном из слоев ведет к снижению декремента колебаний. Например, в случае $\alpha = 1$ и $\beta = 0,3$ для одинаковых слоев декремент $\delta = 0,26$. При тех же значениях α и β , если $c_{1,2} = 0,5c_{1,1}$, то $\delta = 0,20$, а если $c_{1,2} = 0,25c_{1,1}$, то $\delta = 0,12$. Интересно отметить, что результат получается одинаковым независимо от того, за счет какой характеристики материала — модуля упругости или плотности — изменяется скорость звука.

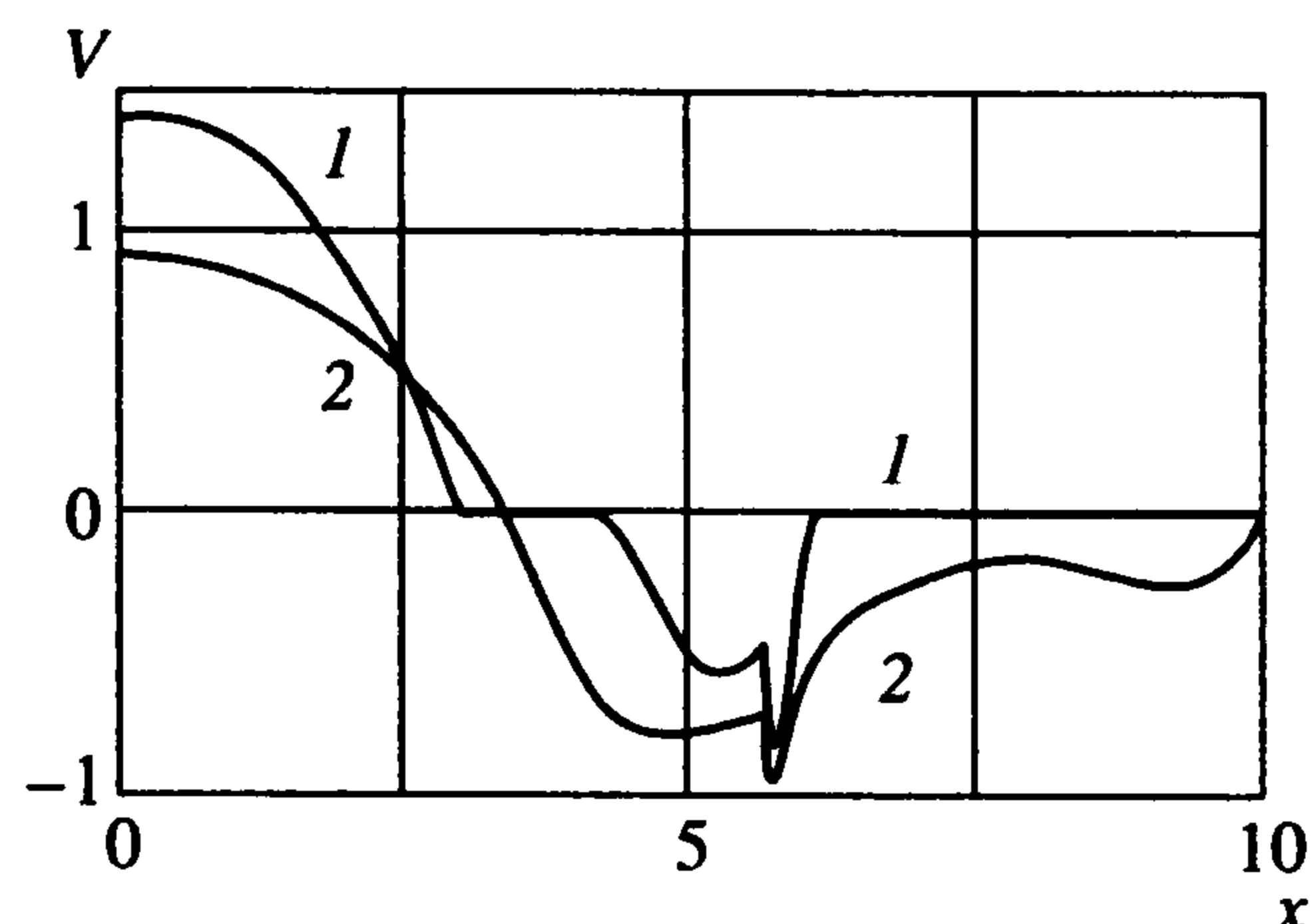
Ранее в квазистатической постановке было показано, что эффективность демпфирующих покрытий снижается с уменьшением их модуля упругости [6, 7]. Приведенные здесь результаты позволяют уточнить, что определяющим фактором является не модуль упругости слоя, а скорость звука в нем.

Когда $\alpha = 2$, аналогичные изменения наблюдаются для параметра a , который в этом случае равен δ/k_d . При $\beta = 0,6$ и одинаковых свойствах слоев $a = 0,27$. Когда $c_{1,2} = 0,5c_{1,1}$, при тех же остальных условиях $a = 0,16$, а если $c_{1,2} = 0,25c_{1,1}$, то $a = 0,06$.

Наличие помимо фрикционных еще и упругих сил взаимодействия слоев также



Фиг. 2



Фиг. 3

приводит к уменьшению затухания колебаний. Когда $\alpha = 1$ и $\beta = 0,3$, то уже при $\xi = 0,01$ декремент уменьшается в 3,4 раза, принимая значение 0,07. Если $\alpha = 2$, то подобное уменьшение наблюдается для величины a , что при одинаковой амплитуде также эквивалентно снижению декремента.

В квазистатической задаче предполагалось, что проскальзывание начинается одновременно по всей длине балки, причем в одном направлении [1, 2]. Вместе с тем исследование волновых переходных процессов показывает, что проскальзывание, по крайней мере, на начальной, волновой стадии происходит иначе. На фиг. 3 для $t = 10$ показана скорость относительного проскальзывания слоев полубесконечной балки с одинаковыми геометрическими и механическими характеристиками: $h_i = 1$, $E_i = 1$, $\rho_i = 1$. При $\alpha = 0$ и $\beta = 0,6$ (кривая 1) видна бегущая область сцепления в средней части балки. Кроме того, отсутствует проскальзывание перед фронтом волны сдвига. Когда $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$, подобные зоны сцепления отсутствуют. Кривая 2 соответствует распределению скорости проскальзывания для $\alpha = 2$ и $\beta = 50$. Отметим, что скорость проскальзывания имеет различное направление в разных частях балки.

Приведенные результаты показывают, что введение функциональной, в частности степенной, связи между фрикционными силами и усилием полного торможения является эффективным способом учета реальной зависимости конструкционного демпфирования от амплитуды, пригодным для описания как колебаний, так и волновых процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goodman L.E., Klumpp J.H. Analysis of slip damping with reference to turbine-blade vibration // J. Appl. Mech. 1956. V. 23. № 3. P. 421–429.
2. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
3. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271–306.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 430 с.
5. Малышев А.П. Численное моделирование волновых процессов в балке, соприкасающейся с шероховатой поверхностью // Изв. АН. МТТ. 1998. № 6. С. 149–155.
6. Фавстов Ю.К. К определению внутреннего трения демпфирующих покрытий // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 3. С. 127–128.
7. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1967. 420 с.