

УДК 539.3:534.1

© 2001 г. В.М. Александров, Е.С. Зайцева

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ПО ДВУХСЛОЙНОМУ УПРУГОМУ ОСНОВАНИЮ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Исследуется задача, моделирующая движение силового возмущения в неоднородной по глубине упругой среде. Именно в антиплоской постановке в подвижной системе координат рассматриваются все возможные варианты отношения скорости движения поверхностной сосредоточенной касательной нагрузки к скоростям сдвиговых волн в слоях двухслойного упругого основания. Случаи дозвукового режима (ДР) в верхнем и нижнем слоях, сверхзвукового режима (СР) в верхнем слое и ДР в нижнем слое, ДР в верхнем слое и СР в нижнем слое изучаются с помощью применения преобразования Фурье и теории вычетов. Последние два случая весьма интересны в математическом отношении, ибо здесь на границе между слоями стыкуются решения уравнений эллиптического и гиперболического типов и в перемещениях возникают ранее неизвестные особенности, которые, по-видимому, должны иметь место и в решении соответствующей плоской задачи. Случай СР в верхнем и нижнем слоях изучается с помощью специального приема последовательного учета падающих, отраженных и преломленных фронтов ударных волн. Во всех случаях получены выражения для перемещений в слоях, исследованы их характерные особенности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двухслойное упругое основание. Верхний слой (1) имеет высоту h , а нижний слой (2) – высоту H . Нижний слой зашпелен по основанию, и между слоями осуществлено полное сцепление. Введем систему координат $Oxyz$, как показано на фиг. 1, движущуюся в направлении оси x со скоростью v . Допустим, что на основание в точке $x = 0$, $y = h$ в направлении оси z действует сосредоточенная касательная нагрузка T , отнесенная к единице длины и не зависящая от z .

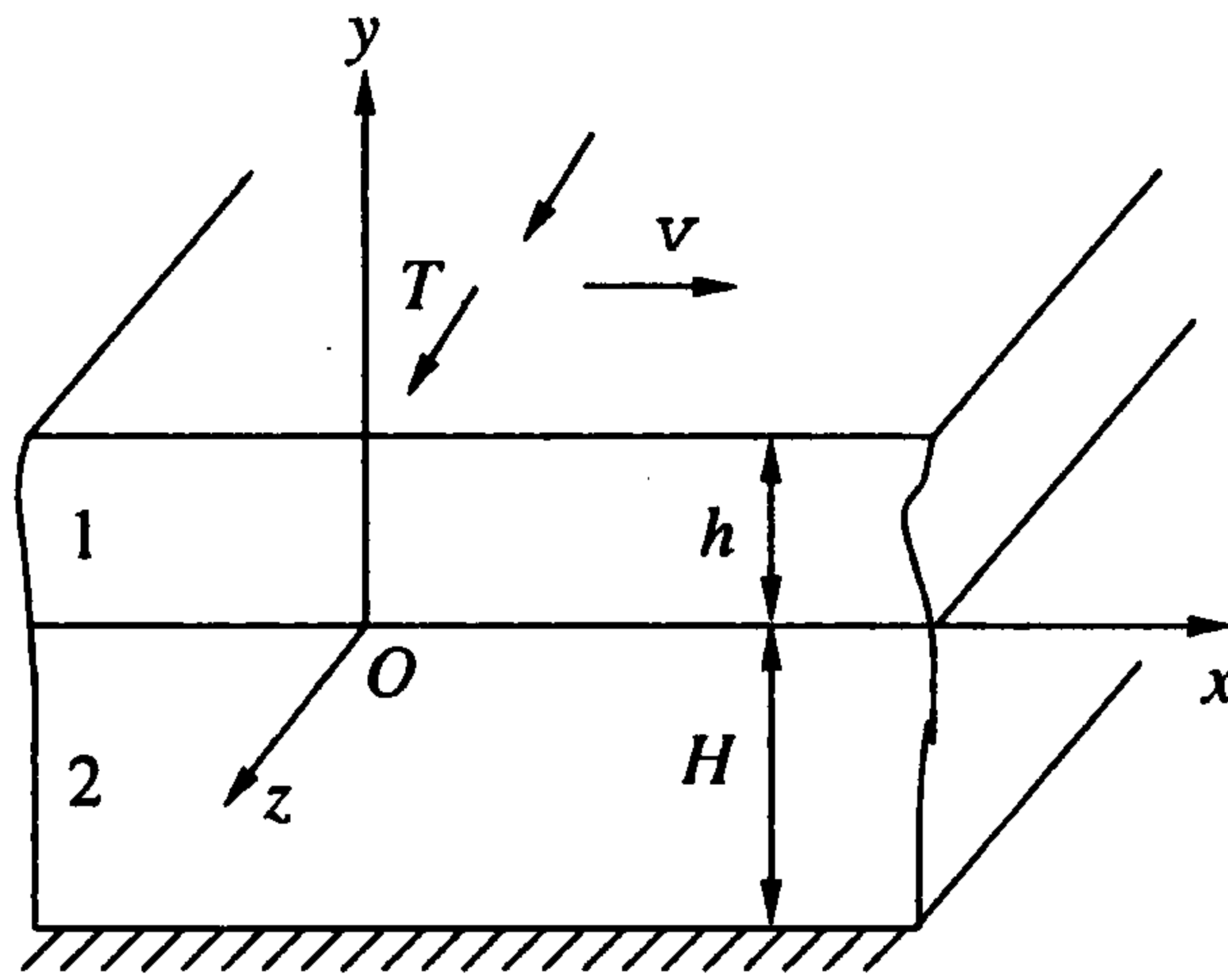
Пусть $c_1 = \sqrt{G_1/\rho_1}$ и $c_2 = \sqrt{G_2/\rho_2}$ – скорости распространения сдвиговых волн в слоях, где G_1 , G_2 и ρ_1 , ρ_2 – их модули сдвига и плотности материалов. При $v < c_1$ и $v < c_2$ для решения задачи будем иметь уравнения

$$\gamma^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0, \quad \delta^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_1^2}}, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_2^2}}$$

$$\tau_{xz}^{(j)} = G_j \frac{\partial w_j}{\partial x}, \quad \tau_{yz}^{(j)} = G_j \frac{\partial w_j}{\partial y} \quad (j = 1, 2)$$

При $v > c_1$ и $v < c_2$ в первом уравнении (1.1) следует заменить γ на $i\gamma_*$, при $v < c_1$ и



Фиг. 1

$v > c_2$ во втором уравнении (1.1) следует заменить δ на $i\delta_*$, где

$$\gamma_* = \sqrt{\frac{v^2}{c_1^2} - 1}, \quad \delta_* = \sqrt{\frac{v^2}{c_2^2} - 1} \quad (1.2)$$

При $v > c_1$ и $v > c_2$ указанные замены в обоих уравнениях (1.1) нужно произвести одновременно.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} y = -H: \quad w_2 &= 0 \\ y = 0: \quad w_1 &= w_2, \quad \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)} \\ y = h: \quad \tau_{yz}^{(1)} &= T\delta(x) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция.

2. Случай ДР в верхнем и в нижнем слоях. Пусть $v < c_1$ и $v < c_2$, при этом оба уравнения (1.1) являются уравнениями эллиптического типа. Будем искать решение задачи в форме интегралов Фурье [1]

$$w_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_j(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.1)$$

На основании уравнений (1.1) имеем

$$W_1(\alpha, y) = A_1(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha\gamma y) + B_1(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha\gamma y) \quad (2.2)$$

$$W_2(\alpha, y) = A_2(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha\delta y) + B_2(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha\delta y)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), найдем $A_j(\alpha)$, $B_j(\alpha)$ и получим

$$w_j = \frac{T}{2\pi G_1 \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_j(\alpha, y)}{\alpha \Delta(\alpha)} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.3)$$

$$\Delta_1(\alpha, y) = k \operatorname{sh}(\alpha\gamma y) \operatorname{ch}(\alpha\delta H) + \operatorname{sh}(\alpha\delta H) \operatorname{ch}(\alpha\gamma y)$$

$$\Delta_2(\alpha, y) = \operatorname{sh}(\alpha\delta y) \operatorname{ch}(\alpha\delta H) + \operatorname{sh}(\alpha\delta H) \operatorname{ch}(\alpha\delta y)$$

$$\Delta(\alpha) = k \operatorname{ch}(\alpha\gamma h) \operatorname{ch}(\alpha\delta H) + \operatorname{sh}(\alpha\gamma h) \operatorname{sh}(\alpha\delta H), \quad k = G_2 \delta / (G_1 \gamma)$$

Разложим интегралы в (2.3) по вычетам. Можно показать, что корни трансцендентного уравнения $\Delta(\alpha) = 0$ на комплексной плоскости $z = \alpha\gamma h$ являются однократными мнимыми. Для некоторых значений параметров k и $l = \delta H / (\gamma h)$ они приведены в табл. 1, где $r = 0, 1, \dots$

Таблица 1

k	$l = 2$	$l = 1$	$l = 1/2$
2	$\pm i(0,6154797 + \pi r)$	$\pm i(0,9553166 + \pi r)$	$\pm i(1,2309594 + \pi r)$
1	$\pm i(\pi/6 + \pi r)$	$\pm i(\pi/4 + \pi r)$	$\pm i(\pi/3 + \pi r)$
$1/2$	$\pm i(0,4205343 + \pi r)$	$\pm i(0,6154797 + \pi r)$	$\pm i(0,8410687 + \pi r)$

Таблица 2

m	$n = 2$	$n = 1$	$n = 1/2$
2	$\pm i(0,9639096 + \pi/2)$	$\pm i(2,0205285 + \pi r)$	$\pm i(4,0684198 + 2\pi r)$
1	$\pm i(1,1256602 + \pi/2)$	$\pm i(2,3470456 + \pi r)$	$\pm i(4,7122275 + 2\pi r)$
$1/2$	$\pm i(1,3084609 + \pi/2)$	$\pm i(2,6741290 + \pi r)$	$\pm i(5,3558443 + 2\pi r)$

Обозначая через $\alpha_s = ia_s$ ($s = 1, 2, \dots$) корни уравнения $\Delta(\alpha) = 0$, лежащие в верхней полуплоскости, получим

$$w_1 = \frac{T}{G_1 \gamma} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k \sin(\alpha_s \gamma y) \cos(a_s \delta H) + \sin(\alpha_s \delta H) \cos(a_s \gamma y)}{a_s D(a_s)} e^{-a_s |x|} \quad (2.4)$$

$$w_2 = \frac{T}{G_1 \gamma} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_s \delta y) \cos(a_s \delta H) + \sin(\alpha_s \delta H) \cos(a_s \delta y)}{a_s D(a_s)} e^{-a_s |x|}$$

$$D(a_s) = (k\gamma h + \delta H) \sin(\alpha_s \gamma h) \cos(a_s \delta H) + (k\delta H + \gamma h) \sin(\alpha_s \delta H) \cos(a_s \gamma h)$$

Поскольку $a_s \sim \pi s$ при $s \rightarrow \infty$, то нетрудно установить, что ряд для w_1 сходится к непрерывной функции при всех $0 \leq y \leq h$ и $|x| < \infty$, исключая при $y = h$ окрестность точки $x = 0$, где он ведет себя с точностью до множителя, как $-\ln |x|$. Ряд для w_2 сходится к непрерывной функции при всех $-H \leq y \leq 0$ и $|x| < \infty$.

3. Случай СР в верхнем слое и ДР в нижнем. Пусть $v > c_1$ и $v < c_2$, при этом уравнения (1.1) являются уравнениями гиперболического и эллиптического типа соответственно. В формулах (2.3) нужно заменить γ на $i\gamma_*$ и k на $m i^{-1}$, где $m = G_2 \delta / (G_1 \gamma_*)$. В результате будем иметь

$$w_j = \frac{T}{2\pi G_1 \gamma_*} \int_{\Gamma} \frac{\Delta_j(\alpha, y)}{\alpha \Delta(\alpha)} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (3.1)$$

$$\Delta_1(\alpha, y) = m \sin(\alpha \gamma_* y) \operatorname{ch}(\alpha \delta H) + \operatorname{sh}(\alpha \delta H) \cos(\alpha \gamma_* y)$$

$$\Delta_2(\alpha, y) = \operatorname{sh}(\alpha \delta y) \operatorname{ch}(\alpha \delta H) + \operatorname{sh}(\alpha \delta H) \operatorname{ch}(\alpha \delta y)$$

$$\Delta(\alpha) = m \cos(\alpha \gamma_* h) \operatorname{ch}(\alpha \delta H) - \sin(\alpha \gamma_* h) \operatorname{sh}(\alpha \delta H)$$

Разложим интеграл в (3.1) по вычетам. Можно показать, что теперь трансцендентное уравнение $\Delta(\alpha) = 0$ на комплексной плоскости $z = \alpha \gamma_* h$ будет иметь однократные как мнимые, так и вещественные корни. Для некоторых значений параметров m и $n = \delta H / (\gamma_* H)$ они представлены в табл. 2 (мнимые корни) и табл. 3 (вещественные корни), где $r = 0, 1, \dots$. Контур интегрирования Γ в (3.1) выберем так, чтобы он шел по вещественной оси, обходя вещественные полюса сверху при $x < 0$ и снизу при $x > 0$.

Таблица 3

m	$n = 2$	$n = 1$	$n = 1/2$
2	$\pm(1,1162877 + \pi r)$	$\pm(1,1786902 + \pi r)$	$\pm(1,2934123 + \pi r)$
1	$\pm(0,8226173 + \pi r)$	$\pm(0,9375520 + \pi r)$	$\pm(1,1051875 + \pi r)$
$1/2$	$\pm(0,5559512 + \pi r)$	$\pm(0,6941913 + \pi r)$	$\pm(0,8797559 + \pi r)$

Обозначая через $\alpha_s = ia_s$ ($s = 1, 2, \dots$) мнимые корни, лежащие в верхней полуплоскости, а через β_s ($s = 1, 2, \dots$) вещественные корни, лежащие в правой полуплоскости, получим

$$\begin{aligned}
 w_1 = & \frac{T}{G_1 \gamma_*} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m \operatorname{sh}(a_s \gamma_* y) \cos(a_s \delta H) + \sin(a_s \delta H) \operatorname{ch}(a_s \gamma_* y)}{a_s D(a_s)} e^{-a_s |x|} - \right. \\
 & \left. - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Delta_1(\beta_s, y)}{\beta_s D_*(\beta_s)} \sin(\beta_s |x|) \right\} \\
 w_2 = & \frac{T}{G_1 \gamma_*} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin(a_s \delta y) \cos(a_s \delta H) + \sin(a_s \delta H) \cos(a_s \delta y)}{a_s D(a_s)} e^{-a_s |x|} - \right. \\
 & \left. - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Delta_2(\beta_s, y)}{\beta_s D_*(\beta_s)} \sin(\beta_s |x|) \right\}
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$D(a_s) = -(m\gamma_* h + \delta H) \operatorname{sh}(a_s \gamma_* h) \cos(a_s \delta H) + (m\delta H - \gamma_* h) \operatorname{ch}(a_s \gamma_* h) \sin(a_s \delta H)$$

$$D_*(\beta_s) = -(m\gamma_* h + \delta H) \sin(\beta_s \gamma_* h) \operatorname{ch}(\beta_s \delta H) + (m\delta H - \gamma_* h) \cos(\beta_s \gamma_* h) \operatorname{sh}(\beta_s \delta H)$$

Поскольку $a_s \sim \pi s/n$ при $s \rightarrow \infty$, то нетрудно убедиться, что первый ряд в выражении для w_1 сходится к непрерывной функции при всех $0 \leq y \leq h$ и $|x| < \infty$, исключая при $y = h$ окрестность точки $x = 0$, где он ведет себя, с точностью до множителя, как $-\ln |x|$. Относительно второго ряда в w_1 с учетом $\beta_s \sim \pi s$ при $s \rightarrow \infty$ можно утверждать, что его главная часть представляет собой функцию

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2(m\delta H - \gamma_* h)} \left\{ m \left[\ln \left| 2 \cos \left(\frac{t_- - 2r}{2} \right) \right| - \ln \left| 2 \cos \left(\frac{t_+ - 2r}{2} \right) \right| \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{t_- + t_+ - 4r}{2} \right\} \left(t_{\pm} = \frac{1}{h} \left(\frac{|x|}{\gamma_*} \pm y \right) \right)
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $r = 0, 1, \dots$, причем $-1 < t_- < 1$ и $0 \leq t_+ < 1$ при $r = 0$, $(2r - 1) < t_{\pm} < (2r + 1)$ при $r \geq 1$. Таким образом, второй ряд в w_1 имеет разрывы первого рода типа sgn и разрывы второго рода логарифмического типа на линиях

$$|x| = \pm \gamma_* y + (2r \mp 1) \gamma_* h \quad (r = 0, 1, \dots, \quad 0 < y < h) \quad (3.4)$$

При $y = h$ главная часть второго ряда в w_1 представляет собой функцию

$$\frac{t - 2r - 1}{2(m\delta H - \gamma_* h)} \left(t = \frac{|x|}{\gamma_* h} \right) \quad (3.5)$$

где $r = 0, 1, \dots$ и $2r < t < 2r + 2$, а при $y = 0$ – функцию

$$\frac{t - 2r}{2(m\delta H - \gamma_* h)} \quad (3.6)$$

где $r = 0, 1, \dots$, причем $0 \leq t < 1$ при $r = 0$ и $2r - 1 < t < 2r + 1$ при $r \geq 1$. Таким образом, второй ряд в w_1 имеет при $y = h$ разрывы первого рода типа sgn в точках $|x| = (2r + 2)\gamma_* h$ ($r = 0, 1, \dots$) и излом в точке $x = 0$, при $y = 0$ разрывы первого рода типа sgn в точках $|x| = (2r + 1)\gamma_* h$ ($r = 0, 1, \dots$) и излом в точке $x = 0$. Разрывы второго рода логарифмического типа в w_1 на поверхности $y = h$ и $y = 0$ не выходят.

К результатам (3.3)–(3.6) можно прийти на основании соотношений [2] (1.441(1, 3, 4)).

Первый ряд в выражении для w_2 сходится к непрерывной функции при всех $-H \leq y < 0$ и $|x| < \infty$. Второй ряд в w_2 сходится к непрерывной функции при всех $-H \leq y < 0$ и $|x| < \infty$; при $y = 0$ он представляет собой в главном функцию (3.6), т.е. ведет себя очевидно так же, как второй ряд в w_1 при $y = 0$.

4. Случай ДР в верхнем слое и СР в нижнем. Пусть $v < c_1$ и $v > c_2$, при этом уравнения (1.1) являются уравнениями эллиптического и гиперболического типа соответственно. В формулах (2.3) нужно заменить δ на $i\delta_*$ и k на $-pi^{-1}$, где $p = G_2 \delta_*/(G_1 \gamma)$. В результате будем иметь

$$w_j = \frac{T}{2\pi G_1 \gamma} \int_{\Gamma} \frac{\Delta_j(\alpha, y)}{\alpha \Delta(\alpha)} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (4.1)$$

$$\Delta_1(\alpha, y) = p \operatorname{sh}(\alpha \gamma y) \cos(\alpha \delta_* H) + \sin(\alpha \delta_* H) \operatorname{ch}(\alpha \gamma y)$$

$$\Delta_2(\alpha, y) = \sin(\alpha \delta_* y) \cos(\alpha \delta_* H) + \sin(\alpha \delta_* H) \cos(\alpha \delta_* y)$$

$$\Delta(\alpha) = p \operatorname{ch}(\alpha \gamma h) \cos(\alpha \delta_* H) + \operatorname{sh}(\alpha \gamma h) \sin(\alpha \delta_* H)$$

Разложим интегралы в (4.1) по вычетам. Можно показать, что трансцендентное уравнение $\Delta(\alpha) = 0$ на комплексной плоскости $z = \alpha \gamma h$ будет вновь иметь однократные как мнимые, так и вещественные корни. Для некоторых значений параметров p и $q = \delta_* H/(\gamma h)$ они представлены в табл. 3 (мнимые корни, $m = p$, $n = q$, впереди всех значений нужно приписать мнимую единицу i) и табл. 2 (вещественные корни, $m = p$, $n = q$, впереди всех значений нужно убрать мнимую единицу i), где $r = 0, 1, \dots$. Контур интегрирования Γ в (4.1) опять выберем так, чтобы он шел по вещественной оси, обходя вещественные полюса сверху при $x < 0$ и снизу при $x > 0$.

Обозначая, как и выше, через $\alpha_s = i a_s$ ($s = 1, 2, \dots$) мнимые корни, лежащие в верхней полуплоскости, а через β_s ($s = 1, 2, \dots$) вещественные корни, лежащие в правой полуплоскости, получим

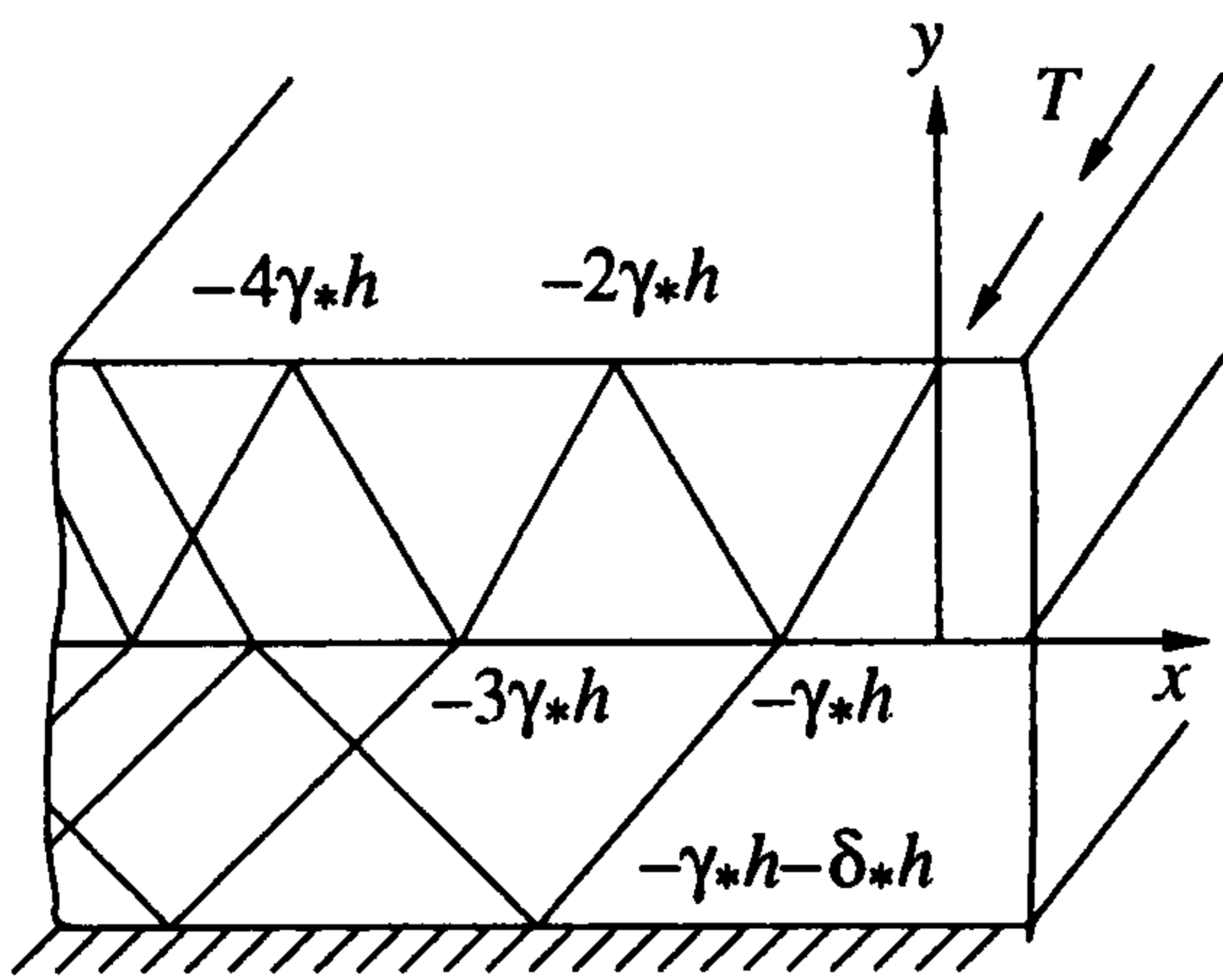
$$w_1 = \frac{T}{G_1 \gamma} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p \sin(a_s \gamma y) \operatorname{ch}(a_s \delta_* H) + \operatorname{sh}(a_s \delta_* H) \cos(a_s \gamma y)}{a_s D(a_s)} e^{-a_s |x|} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Delta_1(\beta_s, y)}{\beta_s D_*(\beta_s)} \sin(\beta_s |x|) \right\} \quad (4.2)$$

$$w_2 = \frac{T}{G_1 \gamma} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\alpha_s \delta_* y) \operatorname{ch}(a_s \delta_* H) + \operatorname{sh}(a_s \delta_* H) \operatorname{ch}(a_s \delta_* y)}{a_s D(a_s)} e^{-a_s |x|} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Delta_2(\beta_s, y)}{\beta_s D_*(\beta_s)} \sin(\beta_s |x|) \right\}$$

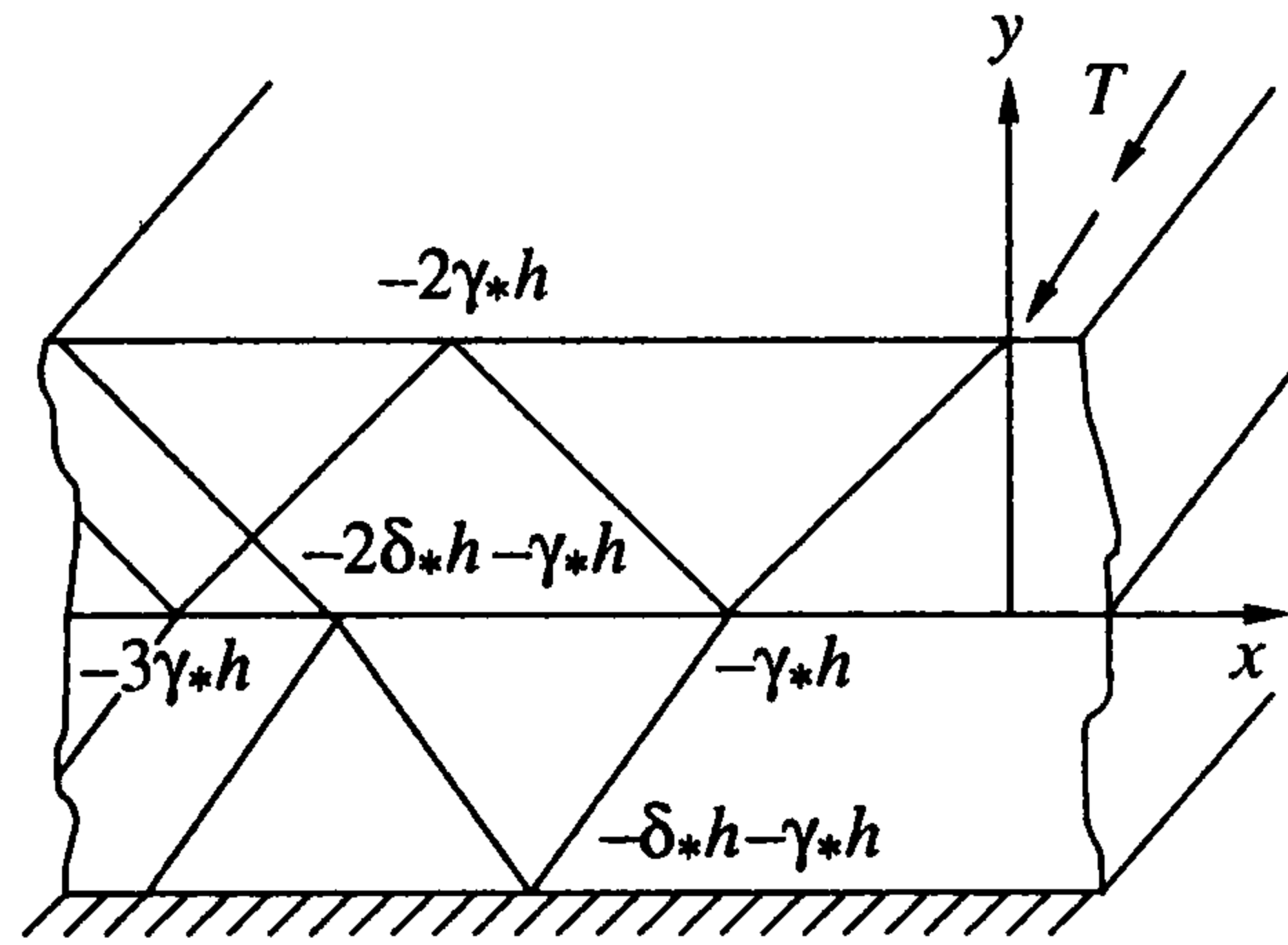
$$D(a_s) = (p \gamma h + \delta_* H) \sin(\alpha_s \gamma h) \operatorname{ch}(a_s \delta_* H) - (p \delta_* H - \gamma h) \cos(a_s \gamma h) \operatorname{sh}(a_s \delta_* H)$$

$$D_*(\beta_s) = (p \gamma h + \delta_* H) \operatorname{sh}(\beta_s \gamma h) \cos(\beta_s \delta_* H) - (p \delta_* H - \gamma h) \operatorname{ch}(\beta_s \gamma h) \sin(\beta_s \delta_* H)$$

Поскольку $a_s \sim \pi s$ при $s \rightarrow \infty$, то нетрудно установить, что первый ряд в выражении для w_1 сходится к непрерывной функции при всех $0 \leq y \leq h$ и $|x| < \infty$, исключая



Фиг. 2



Фиг. 3

окрестность точки $x = 0$, где он ведет себя, с точностью до множителя, как $-\ln |x|$. Относительно второго ряда в w_1 с учетом $\beta_s \sim \pi s/q$ при $s \rightarrow \infty$ можно утверждать, что при всех $0 \leq y < h$ и $|x| < \infty$ он сходится к непрерывной функции. При $y = h$ этот ряд в главном представляет собой функцию (3.5), где только теперь $t = \pi |x| / (\delta_* H)$. Таким образом, второй ряд в w_1 имеет при $y = h$ разрывы первого рода типа sgn в точках $|x| = (2r+2)\delta_* H$ ($r = 0, 1, \dots$) и излом в точке $x = 0$.

Интересно отметить, что для двух различных случаев ($\nu > c_1$ и $\nu < c_2$ и $\nu < c_1$ и $\nu > c_2$) характер поведения w_1 при $y = h$ один и тот же.

Первый и второй ряды в выражении для w_2 сходятся к непрерывным функциям при всех $-H \leq y \leq 0$ и $|x| < \infty$.

5. Случай СР в верхнем и нижнем слоях. Пусть $\nu > c_1$ и $\nu > c_2$, при этом оба уравнения (1.1) являются уравнениями гиперболического типа. Представим решение уравнений (1.1) при $\gamma = i\gamma_*$ и $\delta = i\delta_*$ в форме Даламбера

$$w_1 = f_1(x - \gamma_* y) + g_1(x + \gamma_* y), \quad w_2 = f_2(x - \delta_* y) + g_2(x + \delta_* y) \quad (5.1)$$

Для определения функций, входящих в (5.1), применим прием [3] последовательного учета при продвижении по оси x в отрицательном направлении от $x = 0$ падающих, отраженных и преломленных фронтов ударных волн с помощью линейной комбинации разрывной функции

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \quad (5.2)$$

от различных аргументов. Заметим, что при этом учитывается отсутствие движения точек в двуслойном основании при $x > 0$.

Далее, не нарушая общности рассуждений, для простоты положим $h = H$.

Пусть $c_1 > c_2$, тогда угол преломления фронтов ударных волн в нижнем слое будет больше угла их падения в верхнем слое (фиг. 2) и при $x > -4\gamma_* h$ функции f_1, f_2, g_1 и g_2 в (5.1) нужно взять в виде

$$\begin{aligned} f_1(x - \gamma_* y) &= A_1 \Pi[x - \gamma_*(y - h)] + A_2 \Pi[x - \gamma_*(y - 3h)] \\ g_1(x + \gamma_* y) &= B_1 \Pi[x + \gamma_*(y + h)] + B_2 \Pi[x + \gamma_*(y + 3h)] \\ f_2(x - \delta_* y) &= C_1 \Pi(x - \delta_* y + \gamma_* h) + C_2 \Pi(x - \delta_* y + 3\gamma_* h) \\ g_2(x + \delta_* y) &= D_1 \Pi[x + \delta_*(y + 2h) + \gamma_* h] \end{aligned} \quad (5.3)$$

Полагая, что $3\gamma_*/2 < \delta_* < 2\gamma_*$, и определяя затем из граничных условий (1.3), последнее из которых можно записать в виде

$$\gamma_* G_1[-f_1(x - \gamma_* h) + g_1(x + \gamma_* h)] = T \Pi(x) \quad (5.4)$$

коэффициенты $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ и D_1 в (5.3), в итоге найдем

$$w_1 = -\frac{T}{G_1 \gamma_*} \left\{ \Pi[x - \gamma_*(y - h)] + \frac{1 - k_*}{1 + k_*} \Pi[x - \gamma_*(y - 3h)] + \right. \\ \left. + \frac{1 - k_*}{1 + k_*} \Pi[x + \gamma_*(y + h)] + \left(\frac{1 - k_*}{1 + k_*} \right)^2 \Pi[x + \gamma_*(y + 3h)] \right\} \quad (5.5)$$

$$w_2 = -\frac{T}{G_1 \gamma_*} \left\{ \frac{2}{1 + k_*} \Pi(x - \delta_* y + \gamma_* h) - \frac{2}{1 + k_*} \Pi[x + \delta_*(y + 2h) + \gamma_* h] + \right. \\ \left. + \frac{2(1 - k_*)}{(1 + k_*)^2} \Pi(x - \delta_* y + 3\gamma_* h) \right\} \quad \left(k_* = \frac{G_2 \delta_*}{G_1 \gamma_*} \right)$$

Пусть теперь $c_1 < c_2$, тогда угол преломления фронтов ударных волн в нижнем слое меньше угла их падения в верхнем слое (фиг. 3) и при $x > -3\gamma_* h$ функции f_1 и g_2 в (5.1) нужно взять в виде (5.3), а функции g_1 и f_2 – в виде

$$g_1(x + \gamma_* y) = B_1 \Pi[x + \gamma_*(y + h)] + B_2 \Pi[x + \gamma_*(y + h) + 2\delta_* h] \quad (5.6)$$

$$f_2(x - \delta_* y) = C_1 \Pi(x - \delta_* y + \gamma_* h) + C_2 \Pi[x - \delta_*(y - 2h) + \gamma_* h]$$

Полагая, что $\gamma_* > \delta_* > 2\gamma_*/3$, и определяя затем из граничных условий (1.3) коэффициенты $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ и D_1 , в итоге найдем для w_1 и w_2 соотношения, отличающиеся от (5.5) заменой последнего слагаемого в фигурных скобках соответственно на

$$-\frac{4k_*}{(1 + k_*)^2} \Pi[x + \gamma_*(y + h) + 2\delta_* h], \quad \frac{2(1 - k_*)}{(1 + k_*)^2} \Pi[x - \delta_*(y - 2h) + \gamma_* h] \quad (5.7)$$

В заключение отметим, что во всех случаях соотношения ν с c_1 и c_2 переход к рассмотрению антиплоской задачи о движении по двухслойному основанию распределенной по x касательной нагрузки в силу принципа суперпозиции очевиден. При этом все разрывы в перемещениях исчезнут, но аналогичные разрывы останутся в напряжениях, в том числе бесконечные разрывы логарифмического типа в случае $\nu > c_1$ и $\nu < c_2$ внутри верхнего слоя. Этот факт представляется интересным с точки зрения вопросов сейсмологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
3. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.