

УДК 539.3

© 2001 г. И.В. Андрианов, М.А. Зарубинская, А.Н. Пасечник

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛОСЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

При помощи метода асимптотического разложения обобщенных функций, метода осреднения и сингулярных разложений строится приближенное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии подкрепленной двумерными ребрами анизотропной полосы.

Одна из простейших расчетных схем рассматриваемой задачи такова: ребра работают только на растяжение – сжатие, а обшивка (матрица) – на сдвиг [1, 2]. Такая модель, позволяя уловить многие характерные особенности явления, все же слишком груба с точки зрения механики деформируемого твердого тела. Для сильно анизотропных сред весьма эффективен метод, основанный на разложении по отношению геометрико-жесткостных параметров [3–5], однако точность его в изотропном случае ограничена. Методы теории функций комплексного переменного [6] приводят к необходимости решать бесконечные системы связанных линейных алгебраических уравнений, причем, как правило, замкнутые решения удастся получить лишь для одного стрингера [7]. Точные решения периодической задачи в двойных тригонометрических рядах возможны только при некоторых специальных граничных условиях [8, 9]. Метод осреднения [10, 11] позволил получить весьма простое алгебраическое решение для одномерных ребер, однако его обобщение на двумерный случай [12] выглядит весьма искусственно.

Ниже для получения аналитического решения используется метод осреднения в предложенной ранее [13] модификации, а для учета ширины ребер – асимптотический метод, основанный на разложениях с использованием обобщенных функций [14, 15].

1. Постановка задачи. Рассматривается напряженно-деформированное состояние полосы, подкрепленной двумерными ребрами жесткости. Изгибная жесткость ребер не учитывается, что оправдано малостью этой величины по сравнению с приведенными жесткостями на растяжение – сжатие. В отсутствие массовых сил исходные уравнения для анизотропного материала обшивки (матрицы), главные направления анизотропии которого совпадают с декартовыми осями координат, записываются в виде [4]

$$\begin{aligned} [B_{11} + B_0\Phi_0(y)]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (B_{33} + B_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} &= 0 \\ B_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{33}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (B_{33} + B_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= 0 \\ \Phi_0(y) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [H(y + kb - \varepsilon) + H(y - kb + \varepsilon)] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $H(\dots)$ – функция Хевисайда; B_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2$) – жесткостные параметры, характеризующие обшивку (матрицу); B_0 – жесткость ребер на растяжение – сжатие; u, v – перемещения в направлении осей x и y соответственно, b – расстояние между средними линиями соседних ребер.

Граничные условия примем в виде

$$x = 0, H: \quad v = 0, \quad [B_{11} + B_0 \Phi_0(y)] \frac{\partial u}{\partial x} = P(y) \Phi_0(y) \quad (1.2)$$

Здесь H – ширина полосы, $P(y)$ – заданная краевая нагрузка.

С физической точки зрения выписанные граничные условия соответствуют передаче нагрузки на ребра при закреплённой от смещений в направлении оси y полосе. Отметим, что в принятой схеме особенности решения в местах контакта ребер и обшивки отсутствуют [7].

2. Переход к одномерным ребрам. Учтем сначала ширину ребер 2ε . Считая ребра тонкими и принимая ε в качестве малого параметра, разложим функцию $\Phi_0(y)$ в ряд по ε [14, 15]. Применяя двустороннее преобразование Лапласа, раскладывая изображения в ряд по ε и выполняя обратное преобразование (обоснованное в рамках теории обобщенных функций [14, 15]), получаем

$$\Phi_0(y) = 2\varepsilon \Phi(y) + 2\varepsilon \sum_{n=1,3,5,\dots} \varepsilon^n \Phi^{(n)}(y), \quad \Phi(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(y - kb)$$

Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Теперь представим решение исходной краевой задачи (1.1), (1.2) в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \quad (2.1)$$

и перейдем к рекуррентной последовательности краевых задач

$$\begin{aligned} L_1(u_0, v_0) &\equiv [B_{11} + B_c \Phi(y)] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (B_{33} + B_{12}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} = 0 \\ L_2(u_0, v_0) &\equiv B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (B_{33} + B_{12}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$L_1(u_1, v_1) = -\frac{1}{2} B_c \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \Phi'(y), \quad L_2(u_1, v_1) = 0, \dots$$

$$L_1(u_n, v_n) = -B_c \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \Phi^{(n-i)}(y), \quad L_2(u_n, v_n) = 0$$

$$x = 0, H: \quad v_i = 0, \dots \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$L_3(u_0) \equiv [B_{11} + B_c \Phi(y)] \frac{\partial u_0}{\partial x} = P(y) \Phi(y)$$

$$L_3(u_1) = \frac{1}{2} \left[-B_c \frac{\partial u_0}{\partial x} + P(y) \right] \Phi'(y) \quad (2.3)$$

$$L_3(u_n) = -\frac{1}{2} B_c \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial x} \Phi^{(n-i)}(y) + P(y) \Phi^{(n)}(y); \quad B_c = 2\varepsilon B_0$$

3. Осредненные соотношения. Будем использовать метод двух масштабов [13, 16, 17]. Сначала введем некоторые оценки. Считаем полосу достаточно широкой ($H \gg 2b$), а внешнюю нагрузку изменяющейся плавно от ребра к ребру. В качестве малого параметра ε_1 используем соотношение $\varepsilon_1 = b/H$. Ребра считаются достаточно жесткими, $B_c b / B_{11} \sim \varepsilon_1^{-1}$. Иными словами, приведенная жесткость ребра существенно превосходит жесткость полосы на растяжение – сжатие.

В безразмерных переменных $\xi = x/H$; $\eta = y/H$ первые два уравнения системы (2.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} L_{11}(u_0, v_0) &\equiv B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + B_{33} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + (B_{33} + B_{12}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \\ L_{12}(u_0, v_0) &\equiv B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + B_{33} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta^2} + (B_{33} + B_{12}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \\ \varepsilon_1 k < y < \varepsilon_1 (k+1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \left\{ u_0^+, v_0^+, \frac{\partial v_0^+}{\partial y} \right\} &= \left\{ u_0^-, v_0^-, \frac{\partial v_0^-}{\partial y} \right\} \\ B_{11} \left(\frac{\partial u_0^+}{\partial \eta} - \frac{\partial u_0^-}{\partial \eta} \right) &= \frac{B_c}{H} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} \quad \left((\dots)^\pm = \lim_{\eta \rightarrow \varepsilon_1 k \pm 0} (\dots) \right) \end{aligned}$$

В соответствии с методом двух масштабов введем "быструю" переменную $\eta_1 = y/b$, оставив для "медленной" переменной обозначение η . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \varepsilon_1^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \quad (3.2)$$

Решение будем искать в виде

$$u_0 = u^{(0)} + \varepsilon_1^2 u^{(1)} + \varepsilon_1^3 u^{(2)} + \dots, \quad v_0 = v^{(0)} + \varepsilon_1^2 v^{(1)} + \varepsilon_1^3 v^{(2)} + \dots \quad (3.3)$$

При этом

$$\begin{aligned} u^{(0)} &\equiv u^{(0)}(\xi, \eta), \quad v^{(0)} \equiv v^{(0)}(\xi, \eta) \\ u^{(i)} &\equiv u^{(i)}(\xi, \eta, \eta_1), \quad v^{(i)} \equiv v^{(i)}(\xi, \eta, \eta_1), \quad i = 1, 2, \dots \\ u^{(i)}(\xi, \eta, \eta_1 + 1) &= u^{(i)}(\xi, \eta, \eta_1), \quad v^{(i)}(\xi, \eta, \eta_1 + 1) = v^{(i)}(\xi, \eta, \eta_1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Используя соотношения (3.1) – (3.4), после расщепления по ε_1 получаем

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \eta_1^2} = -L_{11}(u^{(0)}, v^{(0)}), \quad \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \eta_1^2} = -L_{12}(u^{(0)}, v^{(0)}) \quad (3.5)$$

Уравнения (3.5) без труда интегрируются

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= -\frac{1}{2} \eta_1^2 L_{11}(u^{(0)}, v^{(0)}) + C_1(\xi, \eta) \eta_1 + C_2(\xi, \eta) \\ v^{(1)} &= -\frac{1}{2} \eta_1^2 L_{12}(u^{(0)}, v^{(0)}) + C_3(\xi, \eta) \eta_1 + C_4(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Третье и четвертое условия (3.1) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \left\{ u^{(1)}, v^{(1)}, \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \eta_1} \right\} \Big|_{\eta_1=0} &= \left\{ u^{(1)}, v^{(1)}, \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \eta_1} \right\} \Big|_{\eta_1=0} \\ B_{11} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=1} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} \right) &= B_1 \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2}, \quad B_1 = \frac{B_c}{b} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Постоянные C_1, C_2 не определяются из условий (3.7) (они должны быть отнесены к

следующему осредненному приближению [13]). Из первого условия (3.7) получаем уравнение

$$L_{12}(u^{(0)}, v^{(0)}) = 0 \quad (3.8)$$

а также значения

$$C_3 = 0, \quad C_1 = L_{11}(u^{(0)}, v^{(0)})$$

Удовлетворяя второму условию (3.7), получаем осредненное уравнение

$$L_{11}(u^{(0)}, v^{(0)}) + B_1 \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.9)$$

Уравнения (3.8), (3.9) образуют искомую осредненную систему уравнений. Первая "быстрая" поправка может быть записана так

$$u_1 = \eta_1 \left(\frac{1}{2} - \eta_1 \right) B_1 \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi^2}, \quad v_1 = 0 \quad (3.10)$$

Перейдем к анализу краевых условий (2.3). Из первого граничного условия (2.3) получаем

$$\xi = 0, 1: \quad v^{(0)} = 0 \quad (3.11)$$

Осредняя второе из соотношений (2.3), имеем

$$\xi = 0, 1 \quad (B_{11} + B_1) \partial u^{(0)} / \partial \xi = P_1(\eta), \quad P_1(\eta) = P_1 H / b \quad (3.12)$$

Уравнения (3.9), (3.10) с граничными условиями (3.11), (3.12) дают искомую осредненную краевую задачу.

4. Пограничный слой. Второе граничное условие (2.3) выполняется, таким образом, в среднем. Невязки в выполнении граничных условий при этом получаются самоуравновешенными на участках $k - 1 < \eta < k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$). Следовательно, соответствующее этим фиктивным нагрузкам напряженно-деформированное состояние будет сосредоточено вблизи краев полосы и затухать по ξ на расстояниях порядка ϵ_1 . Иными словами, имеем дело с напряженным состоянием типа пограничного слоя, к анализу которого и переходим.

Введем новую "быструю" переменную $\xi_1 = \xi / \epsilon_1$, оставив за "медленной" обозначение ξ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon_1^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \quad (4.1)$$

Будем искать решение типа пограничного слоя в виде

$$u_n = \epsilon_1 u_n^{(0)} + \epsilon_1^2 u_n^{(2)} + \dots, \quad v_n = \epsilon_1 v_n^{(0)} + \epsilon_1^2 v_n^{(2)} + \dots \quad (4.2)$$

Функции в правых частях выражения (4.2) зависят от переменных ξ, ξ_1, η, η_1 .

Подставляя выражение (4.1) и разложения (4.2) в исходные соотношения, после расщепления по ϵ_1 получаем в первом приближении

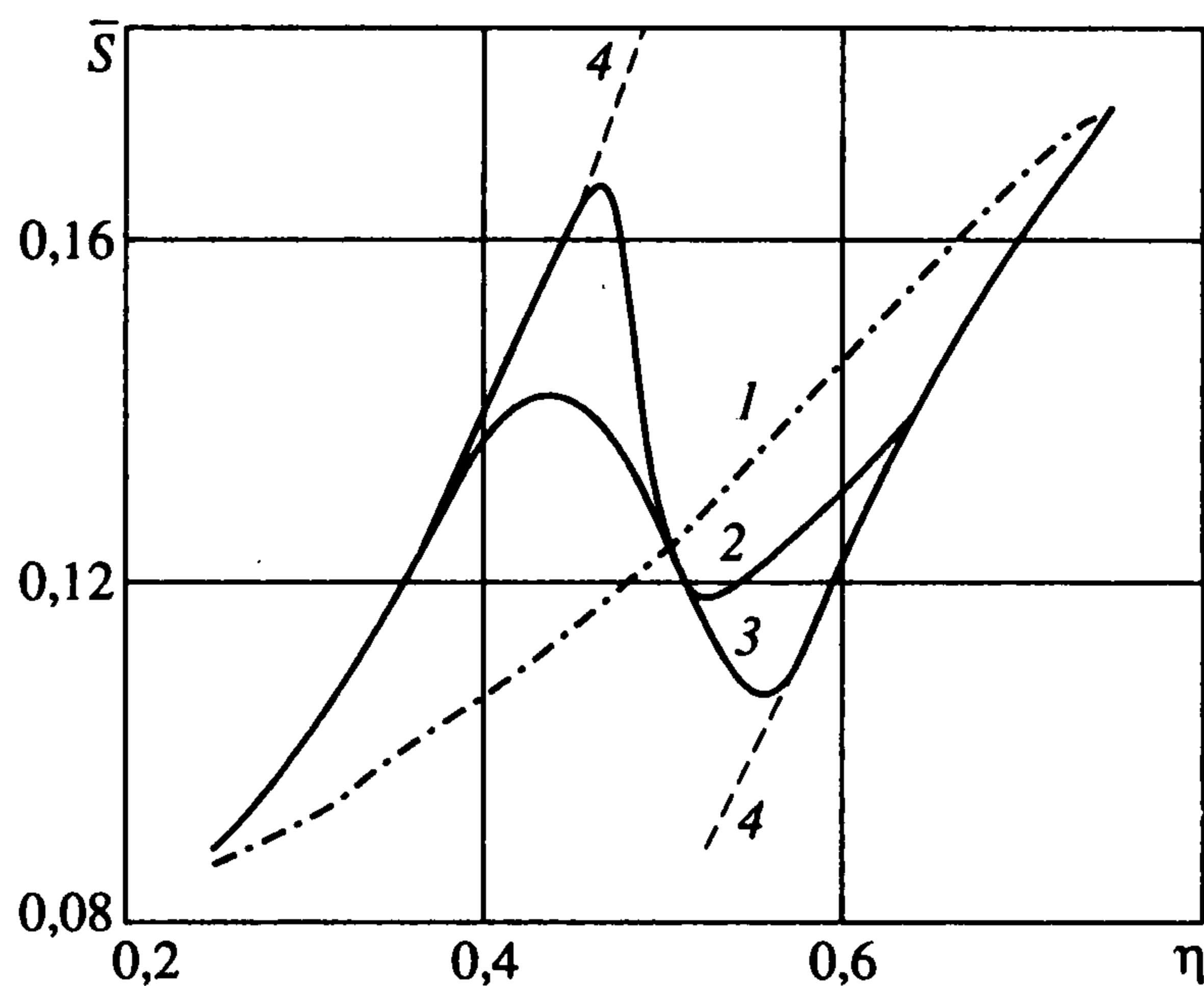
$$L_{11}^{(1)}(u_n^{(0)}, v_n^{(0)}) = 0, \quad L_{12}^{(1)}(u_n^{(0)}, v_n^{(0)}) = 0$$

$$u_n^{(0)} = v_n^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \eta_1 = k, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (4.3)$$

$$v_n^{(0)} = 0, \quad B_{11} \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial \xi_1} = -\epsilon_1 P_1(\eta) \quad \text{при} \quad \xi_1 = 0, \quad \epsilon_1^{-1} \quad (4.4)$$

$$u_n^{(0)}, v_n^{(0)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

$$u_n^{(0)}, v_n^{(0)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 \rightarrow -\infty \quad (4.6)$$



Фиг. 1

Операторы $L_{11}^{(1)}, L_{12}^{(1)}$ отличаются от операторов L_{11}, L_{12} в (3.1) заменой ξ, η на ξ_1, η_1 .

Можно решать задачу на одном периоде (скажем, при $k = 0, 1$) и ограничиться краевыми условиями (4.3) – (4.5) (для граничных условий (4.3), (4.4), (4.6) решение тогда выписывается автоматически).

Итак, для расчета пограничного слоя приходим к классической задаче теории упругости о защемленной на длинной стороне полуполосе, решение которой может быть получено разными методами.

В рассматриваемом случае, когда строится приближенное решение, вполне уместно ограничиться расщеплением по безразмерным параметрам [3, 4]. В соответствии с этим подходом в основном приближении решаем уравнения

$$B_{11} \frac{\partial^2 u_n^{(0)}}{\partial \xi_1^2} + B_{33} \frac{\partial^2 u_n^{(0)}}{\partial \eta_1^2} = 0 \quad (4.7)$$

с граничными условиями

$$\eta_1 = 0, 1: \quad u_n^{(0)} = 0; \quad \xi_1 = 0: \quad B_{11} \frac{\partial^2 u_n^{(0)}}{\partial \xi_1^2} = -\varepsilon_1 P_1(\eta) \quad (4.8)$$

$$u_n^{(0)} \rightarrow 0 \text{ при } \xi_1 \rightarrow \infty$$

В результате имеем

$$u_n^{(0)} = \bar{p} \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{e^{-\lambda_k \xi} \sin(k\pi x)}{k^2}; \quad \bar{p} = \frac{2\varepsilon P_1(\eta)}{\pi^2 \sqrt{B_{11} B_{33}}}; \quad \lambda_k = \sqrt{\frac{B_{33}}{B_{11}}} \pi k \quad (4.9)$$

Таким образом, использование асимптотических методов позволяет получить приближенное аналитическое решение поставленной задачи.

5. Пример расчета. Для примера рассмотрим деформацию изотропной полуплоскости при следующих граничных условиях

$$x = 0: \quad T_1 = E \cos \eta, \quad S = 0$$

где $\eta = y/l$, l – величина, характеризующая изменяемость внешней нагрузки, T_1 – усилие растяжения – сжатия в направлении оси x , S – сдвигающее усилие.

На фигуре приведены безразмерные значения $\bar{S} = S/E$. Отметим, что именно это усилие в наибольшей степени зависит от дискретности ребер. Принимались следующие значения параметров: $B_c = B$, $\nu = 0,3$, $b/l = 0,5$, $h/l = 1/32$, $F/(lh) = 3/32$. Кривая 1 соответствует конструктивно-ортотропному решению, кривые 2, 3 – решениям, учитывающим дискретность размещения ребер при $\epsilon/l = 3/32$; $\epsilon/l = 3/16$ соответственно. Для сравнения приведены графики изменения безразмерного сдвигового усилия, вычисленного при схеме контакта по линии (кривая 4).

Видно, что в окрестности подкрепления учет дискретности размещения ребер и их ширины необходим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuhn P. Stresses in Aircraft and Shell Structures. N.Y.: McGraw-Hill, 1956. = Кун П. Расчет на прочность оболочек в самолетостроении. М.: Оборонгиз, 1961. 306 с.
2. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.
3. Маневич Л.И., Павленко А.В., Шамровский А.Д. Приближенное решение контактных задач теории упругости для ортотропной полосы, подкрепленной ребрами жесткости // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1971. № 13. С. 102–112.
4. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев; Донецк: Вища шк., 1982. 153 с.
5. Cristensen R.M. Mechanics of Composite Materials. N.Y.: Willey, 1979. = Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
6. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
7. Sternberg E. Load-transfer and load-diffusion in elastostatics // Proceedings of the Sixth U.S. National Congress of Applied Mechanics. 1970. P. 34–61. = Штернберг Э. Передача нагрузки и диффузия нагрузки в статике упругого тела // Механика. Период. сб. иностр. ст. 1972. № 6. С. 112–149.
8. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек // Методы расчета оболочек. Т. 2. Киев: Наук. думка, 1980. 367 с.
9. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Статика, динамика и устойчивость ребристых оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1990. С. 132–191.
10. Андрианов И.В., Маневич Л.И. К расчету напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы, подкрепленной ребрами жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 4. С. 135–140.
11. Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.
12. Андрианов И.В., Лобода В.В. О влиянии ширины ребра на напряженное состояние подкрепленной пластины // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1981. № 28. С. 71–75.
13. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
14. Estrada R., Kanwal R.P. A distributional theory for asymptotic expansions // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1990. 428. № 1875. P. 399–430.
15. Estrada R., Kanwal R.P. Asymptotic Analysis: a Distributional Approach. Berlin: Birkhäuser, 1993. 350 p.
16. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
17. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structure. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.