

УДК 532.5+539.3

© 2000 г. П.А. Мазуров

К ПОСТРОЕНИЮ ДВОЙСТВЕННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В НЕКОТОРЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СЛОЖНЫХ СРЕДАХ

Приводится метод построения двойственных вариационных принципов (ВП) для задач фильтрации несжимаемой жидкости в деформируемых средах со сложной реологией. Построены двойственные ВП фильтрации жидкости в одной из типовых деформируемых сред со сложной реологией [1, 2]: элемент Максвелла, параллельно соединенный с вязкопластическим или упругим элементом. ВП выводятся из вариационных задач, составленных для определяющих соотношений жидкой и твердой фаз.

В основе составления вариационных задач лежат соображения минимума скорости диссипации и накопления энергии. Одной из особенностей построения рассматриваемых ВП является связанность механизмов диссипации и накопления энергии [3]. Другая особенность в отличие от методов, изложенных ранее [4, 5], заключается в независимом друг от друга построении двойственных ВП.

Цель данной работы – доработка метода, предложенного в предыдущих статьях [6–9]¹, и демонстрация его работоспособности при построении новых ВП.

1. Схема вывода ВП. Рассмотрим механическую систему, поведение которой определяется N диссипативными механизмами [3] $\Psi_i(Y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), где диссипативные потенциалы $\Psi_i(Y_i)$ – гладкие выпуклые функционалы, $Y_i = Y_i(c)$ – обобщенные скорости, $c = \{c_\alpha\}$ – набор независимых переменных c_α . Например, в случае двух диссипативных механизмов ($Y_1 = e(\dot{u})$, $Y_2 = q$): $c = \{\dot{u}, q\}$, где e – тензор скоростей деформации, q – вектор скорости фильтрации, $\dot{u}$ – вектор скорости перемещений, u – вектор перемещений. Диссипативные механизмы считаются несвязанными [3], если любой из механизмов $\Psi_i(Y_i)$ не зависит от переменных c_α , от которых зависят остальные диссипативные механизмы. Далее допускаются связанные диссипативные механизмы, где частным случаем является механическая система, в которой переменные c_α одного из диссипативных механизмов выражаются через c_α , входящие в остальные диссипативные механизмы.

Для стационарных процессов в термодинамике необратимых процессов один из ВП – принцип наименьшего рассеяния энергии, выражающийся минимумом диссипативных потенциалов [10, 11]

$$\int_{\Omega} \varphi(\cdot) d\Omega, \quad \varphi(\cdot) = \sum_{i=1}^N \Psi_i(Y_i) \quad (1.1)$$

Примем, что для рассматриваемой механической системы при стационарных условиях существует ВП, основой которого является функционал (1.1). Тогда ВП будет

¹ См. также: Мазуров П.А. Вариационный подход в теориях фильтрационной консолидации и двухфазной фильтрации. Казань: Казан. физ.-техн. ин-т КФ АН СССР, 1989. 24 с. – Деп. в ВИНТИ 20.04.89, № 2586-В.

иметь следующий вид:

$$\inf_{\mathbf{c} \in M_c} I_1(\mathbf{c}) = \inf_{\mathbf{c} \in M_c} \left[\int_{\Omega} (\varphi(\cdot) + f_1(\mathbf{c})) d\Omega + \int_{\Gamma} F_1(\mathbf{c}) d\Gamma \right] \quad (1.2)$$

где $f_1(\mathbf{c})$, $F_1(\mathbf{c})$ – линейные функционалы относительно переменных $\mathbf{c}_\alpha$, Γ – граница области Ω . Из (1.2) понятно, что ВП в других наборах переменных могут быть записаны в виде

$$\inf_{\mathbf{c} \in M_c} \sup_{\mathbf{b} \in M_b} I(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \inf_{\mathbf{c} \in M_c} \sup_{\mathbf{b} \in M_b} \left[\int_{\Omega} (\Psi(\cdot) - \Phi^*(\cdot) + f(\mathbf{c}, \mathbf{b})) d\Omega + \int_{\Gamma} F(\mathbf{c}, \mathbf{b}) d\Gamma \right] \quad (1.3)$$

$$\Psi(\cdot) = \sum_{i=1}^L \Psi_i(\mathbf{Y}_i), \quad \Phi^*(\cdot) = \sum_{i=L+1}^N \Phi_i^*(\mathbf{X}_i), \quad \mathbf{X}_i = \text{grad } \Psi_i(\mathbf{Y}_i)$$

где $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(\mathbf{b})$ – обобщенные силы, $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_\alpha\}$ – набор независимых переменных $\mathbf{b}_\alpha$; $f(\mathbf{c}, \mathbf{b})$, $F(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ – линейные функционалы относительно переменных $\mathbf{c}_\alpha$ и $\mathbf{b}_\alpha$; $\Phi_i^*(\mathbf{X}_i)$ – сопряженные диссипативные потенциалы, связанные с диссипативными потенциалами $\Psi_i(\mathbf{Y}_i)$ преобразованием Юнга – Фенхеля [4]

$$\Phi_i^*(\mathbf{X}_i) = \sup_{\mathbf{Y}_i} [\mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i - \Psi_i(\mathbf{Y}_i)]$$

Частными видами ВП (1.3) являются ВП в обобщенных скоростях (1.2) и в обобщенных силах

$$\inf_{\mathbf{b} \in M_b} I_2(\mathbf{b}) = \inf_{\mathbf{b} \in M_b} \left[\int_{\Omega} (\varphi^*(\cdot) + f_2(\mathbf{b})) d\Omega + \int_{\Gamma} F_2(\mathbf{b}) d\Gamma \right], \quad \varphi^*(\cdot) = \sum_{i=1}^N \Phi_i^*(\mathbf{X}_i)$$

Заметим, что в общем случае при связанных механизмах диссипации функционал $\varphi^*(\cdot)$ не будет сопряженным к функционалу $\varphi(\cdot)$ [3].

Пусть для определенной краевой задачи существуют решение и ВП (1.3). В ВП (1.3) требуется установить вид функционалов $f(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ и $F(\mathbf{c}, \mathbf{b})$, а также множества ограничений M_c и M_b , накладываемых на $\mathbf{c}_\alpha$ и $\mathbf{b}_\alpha$. Введем следующие обозначения для переменных на решении:

$$\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{c}_\alpha^\circ, \quad \mathbf{b}_\alpha = \mathbf{b}_\alpha^\circ, \quad \mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{c}^\circ) = \mathbf{Y}_i^\circ, \quad \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(\mathbf{b}^\circ) = \mathbf{X}_i^\circ$$

ВП (1.3) поставим в соответствие вариационную задачу

$$\inf_{\mathbf{c}} \sup_{\mathbf{b}} B(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \inf_{\mathbf{c}} \sup_{\mathbf{b}} \int_{\Omega} \left[\Psi(\cdot) - \Phi^*(\cdot) - \sum_{i=1}^L \mathbf{X}_i^\circ \mathbf{Y}_i + \sum_{i=L+1}^N \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^\circ \right] d\Omega \quad (1.4)$$

Решение $\mathbf{c}_\alpha^\circ, \mathbf{b}_\alpha^\circ$ задачи (1.3) является и решением задачи (1.4) [12, 13]. В то же время даже при единственном решении ВП (1.3) $\mathbf{c}_\alpha^\circ, \mathbf{b}_\alpha^\circ$ задача (1.4) может иметь множество других решений $\mathbf{c}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha$, при которых $\mathbf{Y}_i(\mathbf{c}) = \mathbf{Y}_i^\circ$, $\mathbf{X}_i(\mathbf{b}) = \mathbf{X}_i^\circ$. Для построения полноценного ВП (1.3) необходимо преобразовать вариационную задачу (1.4) к виду (1.3). Преобразования считаются допустимыми, если $\mathbf{c}_\alpha^\circ, \mathbf{b}_\alpha^\circ$ – решение вариационных задач, связанных преобразованиями.

Допустим, что в рассматриваемой системе помимо диссипации происходит накопление упругой энергии, определяемое упругими выпуклыми гладкими потенциалами $W_j(\mathbf{Z}_j)$ ($j = 1, 2, \dots, K$). Например, $\mathbf{Z}_j = \boldsymbol{\epsilon}_j$ – тензор деформаций, $\partial W_j(\mathbf{Z}_j) / \partial \mathbf{Z}_j = \mathbf{P}_j$, $\mathbf{P}_j = \boldsymbol{\sigma}_j$ – тензор напряжений. По аналогии с (1.1) запишем функционал, отражающий

где (2.1), (2.2) – балансовые уравнения, (2.3), (2.4) – определяющие соотношения для жидкой и твердой фаз, $\Psi^q(q)$, $\Phi^p(\Delta p)$ – диссипативный и сопряженный диссипативный потенциалы для жидкой фазы, p – давление, u_i – компоненты вектора перемещений u , σ_{ij}^f – компоненты тензора эффективных напряжений σ^f , $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ – компоненты

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^f &= F_{ij}(\varepsilon_{ij}, e_{ij}) & (2.1) \\ \sigma_{ij,j}^f - p_i &= 0 \quad (\Pi_{ij,j} = 0) & (2.2) \\ \operatorname{div} q + \operatorname{div} u &= 0 & (2.3) \\ q &= -\partial \Phi^p(\Delta p) / \partial \Delta p \text{ или } -\Delta p = \partial \Psi^q(q) / \partial q & (2.4) \end{aligned}$$

формируемой среде [14] запишем в виде

2. Построение ВП. Систему уравнений фильтрации несжимаемой жидкости в де-гладного $\Psi^i(Y_i)$ из одного элемента град $\Psi^i(Y_i)$.
множество всех субградиентов функционала $\Psi^i(Y_i)$ в точке Y_i , состоящее в случае собственных функционалы, X_i – субградиент функционала $\Psi^i(Y_i)$ в точке Y_i , $\partial \Psi^i(Y_i)$ – типа [12, 13] $X_i \in \partial \Psi^i(Y_i)$ ($P_j \in \partial W_j(Z_j)$), где $\Psi^i(Y_i)$ – выпуклые непрерывные снизу Изложенное выше справедливо для определяющих соотношений субградиентного (1.4).
Для построения двойственных ВП записываются вариационные задачи, подобные

$$\inf_{\Omega} B_1(c) = \inf_{\Omega} \left[\Phi(\cdot) - \sum_{i=1}^N X_i^0 Y_i - P_i^0 Z_i - P_i^0 \frac{Z_2 - Z_2^{k-1}}{\Delta t} \right] d\Omega$$

а соответствующая вариационная задача

$$\Phi(\cdot) = \sum_{i=1}^N \Psi^i(Y_i) + \frac{\partial W_1(Z_1)}{\partial Z_1} Z_1 + \frac{\partial W_2(Z_2)}{\partial Z_2} Z_2 - W_2(Z_2^{k-1}) \Delta t$$

ВП, подобный (1.2), будет иметь аналогичный вид, где

$$\dot{W}_1(Z_1) = \frac{\partial W_1(Z_1)}{\partial Z_1} Z_1 \quad \text{и} \quad \dot{W}_2(Z_2) \approx \frac{\partial W_2(Z_2)}{\partial Z_2} Z_2 - W_2(Z_2^{k-1}) \Delta t$$

В случае двух механизмов накопления

входящие в $\Psi^i(Y_i)$ и в те потенциалы $\dot{W}_j(Z_j)$, которые даны вторым представлением. возможно, если переменные c_α , входящие в $Z_j(c)$, выражаются через переменные c_α , выпуклости функционала (1.5) по переменным c_α первое представление для $\dot{W}_j(Z_j) = Z_j(t - \Delta t)$. В первом представлении (1.6) $Z_j = Z_j(c)$, во втором $Z_j = Z_j(c)$. Для где все переменные даны на текущий момент времени t , за исключением $Z_j^{k-1} =$

$$\dot{W}_j(Z_j) = \frac{\partial W_j(Z_j)}{\partial Z_j} Z_j \quad \text{или} \quad \dot{W}_j(Z_j) \approx \frac{\partial W_j(Z_j)}{\partial Z_j} Z_j - W_j(Z_j^{k-1}) \Delta t \quad (1.6)$$

дов:

Производные $\dot{W}_j(Z_j)$ в (1.5) могут быть представлены в одном из следующих ви-

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^N \Psi^i(Y_i) + \sum_{j=1}^K \dot{W}_j(Z_j) \right] d\Omega \quad (1.5)$$

скорость диссипации и накопления энергии,

тензора деформаций $\epsilon, e_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$, Π_{ij} – компоненты тензора полных напряжений $\Pi = \sigma^f - p$, p – шаровой тензор с компонентами $\delta_{ij}p$.

Твердая фаза моделируется элементом Максвелла, параллельно соединенным с вязким элементом [1, 2]. В элементе Максвелла диссипативный механизм определяется потенциалом $\Psi_1(e_1)$, механизм накопления потенциалом $W_2(\epsilon_2)$, в вязком элементе диссипативный механизм определяется потенциалом $\Psi_3(e_3)$. Определяющие соотношения (2.4) такой твердой фазы имеют вид

$$\sigma_1 = \partial\Psi_1(e_1)/\partial e_1, \quad \sigma_2 = \partial\Psi_2(\epsilon_2)/\partial \epsilon_2, \quad \sigma_3 = \partial\Psi_3(e_3)/\partial e_3 \quad (2.5)$$

$$\sigma^f = \sigma_1 + \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2, \quad e = e_1 + e_2 = e_3 \quad (2.6)$$

Из соображений минимума скорости диссипации и накопления энергии функционалы (1.5) для двух представлений потенциала $W_2(\epsilon_2)$ будут иметь соответственно вид

$$\int_{\Omega} \varphi_1(\cdot) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\Psi_1(e_1) + \frac{\partial W_2(\epsilon_2)}{\partial \epsilon_2} e_2 + \Psi_3(e_3) + \Psi_q(q) \right] d\Omega \quad (2.7)$$

$$\int_{\Omega} \varphi_2(\cdot) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\Psi_1(e_1) + \frac{W_2(\epsilon_2) - W_2(\epsilon_2^{k-1})}{\Delta t} + \Psi_3(e_3) + \Psi_q(q) \right] d\Omega \quad (2.8)$$

При учете соотношений (2.6) и равенства $\epsilon_2 = \epsilon_2^{k-1} + e_2 \Delta t$ для $W_2(\epsilon_2)$ в (2.8) заключаем, что функционалы (2.7), (2.8) имеют три независимые переменные c_α . Вариационная задача (1.4) для функционала (2.7) при $c = \{\dot{u}_1, \dot{u}, q\}$ записывается в виде

$$\inf_c B_1(c) = \inf_c \int_{\Omega} \left[\varphi_1(\cdot) - \sum_{i=1}^N \sigma_i^\circ e_i + \nabla p^\circ q \right] d\Omega \quad (2.9)$$

Преобразуем задачу (2.9) к ВП при учете соотношений (2.1) – (2.6)

$$\begin{aligned} \inf_c B_1(c) &= \inf_c \int_{\Omega} \left[\varphi_1(\cdot) - (\sigma_1^\circ e_1 + \sigma_2^\circ (e_3 - e_1) + \sigma_3^\circ e_3) + \nabla p^\circ q \right] d\Omega = \\ &= \inf_c \int_{\Omega} \left[\varphi_1(\cdot) - \sigma_f^\circ e + \nabla p^\circ q \right] d\Omega = \inf_c \int_{\Omega} \left[\varphi_1(\cdot) - \Pi_{ij}^\circ \dot{u}_{ij} - p^\circ \dot{u}_{i,i} + p_{,i}^\circ q_i \right] d\Omega = \\ &= \inf_c \left[\int_{\Omega} \varphi_1(\cdot) d\Omega - \int_{\Gamma} \Pi_{ij}^\circ n_j \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Gamma} p^\circ q_n d\Gamma - \int_{\Omega} p^\circ (\dot{u}_{i,i} + q_{i,i}) d\Omega \right] = \\ &= \inf_{c \in (2.2)} \left[\int_{\Omega} (\Psi_1(e_1) + \sigma_2^\circ (e - e_1) + \Psi_3(e) + \Psi_q(q)) d\Omega - \Gamma_1 + \Gamma_3 \right] = \\ &= \inf_{\dot{u}_1} \int_{\Omega} [\Psi_1(e_1) - \sigma_2^\circ e_1] d\Omega + \inf_{\dot{u}, q \in (2.2)} \left[\int_{\Omega} (\Psi_3(e) + \sigma_2^\circ e + \Psi_q(q)) d\Omega - \Gamma_1 + \Gamma_3 \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\Gamma_1 = \int_{\Gamma_1} \Pi_{ij}^\circ n_j \dot{u}_i d\Gamma, \quad \Gamma_3 = \int_{\Gamma_3} p^\circ q_n d\Gamma, \quad \sigma_2^\circ = \frac{\partial W_2(\epsilon_2)}{\partial \epsilon_2}$$

при условиях

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^\circ \text{ на } \Gamma_2, \quad q_n = q_n^\circ \text{ на } \Gamma_4, \quad \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma \quad (2.11)$$

Выражения $c \in (2.2)$ и $\dot{u}, q \in (2.2)$ в ВП (2.10) означают, что $\inf$ рассматривается на множестве указанных переменных, удовлетворяющих балансовому уравнению (2.2).

ВП (2.10) распадается на два ВП, независимых в каждый момент времени,

$$\inf_{\mathbf{e}_1} I_{11}(\mathbf{e}_1) = \inf_{\mathbf{e}_1} \int_{\Omega} (\Psi_1(\mathbf{e}_1) - \sigma_2^\circ \mathbf{e}_1) d\Omega \quad (2.12)$$

$$\inf_{\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q} \in (2.2), (2.11)} I_{12}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}) = \inf_{\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q} \in (2.2), (2.11)} \left[\int_{\Omega} (\Psi_3(\mathbf{e}) + \sigma_2^\circ \mathbf{e} + \Psi_q(\mathbf{q})) d\Omega - \Gamma_1 + \Gamma_3 \right] \quad (2.13)$$

ВП (2.12), (2.13) соответствуют следующей схеме численного решения:

$$\sigma_2(t) \xrightarrow{(2.12)(2.13)} \mathbf{e}_1(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{q}(t) \xrightarrow{\mathbf{e}_1(t), \epsilon(t)} \mathbf{e}_1(t + \Delta t), \epsilon(t + \Delta t) \xrightarrow{(2.6)} \epsilon_2(t + \Delta t) \xrightarrow{(2.5)} \sigma_2(t + \Delta t)$$

Из этой схемы понятна достаточность определения переменной $\mathbf{e}_1$ вместо $\dot{\mathbf{u}}_1$ при численном решении задачи.

Запишем вариационную задачу (1.4) для функционала (2.8) при $\mathbf{c} = \{\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}\}$

$$\inf_{\mathbf{c}} B_2(\mathbf{c}) = \inf_{\mathbf{c}} \int_{\Omega} \left[\varphi_2(\cdot) - \sigma_1^\circ \mathbf{e}_1 - \sigma_2^\circ \frac{\epsilon_2 - \epsilon_2^{k-1}}{\Delta t} - \sigma_3^\circ \mathbf{e}_3 + \nabla p^\circ \mathbf{q} \right] d\Omega \quad (2.14)$$

Преобразования задачи (2.14), аналогичные (2.10), при учете замечания относительно переменных $\dot{\mathbf{u}}_1$ и $\mathbf{e}_1$ приводят к ВП

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q} \in (2.2), (2.11)} I_2(\mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q}) = \\ = \inf_{\mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{q} \in (2.2), (2.11)} \left[\int_{\Omega} \left(\Psi_1(\mathbf{e}_1) + \frac{W_2(\epsilon_2^{k-1} + (\mathbf{e} - \mathbf{e}_1)\Delta t) - W_2(\epsilon_2^{k-1})}{\Delta t} + \Psi_3(\mathbf{e}) + \Psi_q(\mathbf{q}) \right) d\Omega - \right. \\ \left. - \Gamma_1 + \Gamma_3 \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

ВП (2.15) соответствует численной схеме

$$\epsilon_2(t) \xrightarrow{(2.15)} \mathbf{e}_1(t + \Delta t), \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t), \mathbf{q}(t + \Delta t) \xrightarrow{\mathbf{e}_1(t), \epsilon(t)} \mathbf{e}_1(t + \Delta t), \epsilon(t + \Delta t) \xrightarrow{(2.6)} \epsilon_2(t + \Delta t)$$

Из построенных ВП видно, что минимум функционалов (2.7), (2.8), характеризующих скорость диссипации и накопления энергии, достигается на решении исходной задачи при задании соответствующих граничных условий для переменных $\mathbf{c}_\alpha$ на всей границе Γ ($\Gamma_1 = \emptyset$, $\Gamma_3 = \emptyset$) области решения Ω и удовлетворении этих переменных условиям сохранения (2.2) и накладываемым связям (2.6). Представляет интерес использование подобных соображений для вывода определяющих соотношений и связей между термодинамическими силами в средах со сложной реологией из условия минимума функционалов вида (1.5). Такой подход был использован при выводе определяющих соотношений, полученных ранее из соображений размерности [15], для фильтрации жидкости в средах с двойной пористостью [8].

Построим ВП для набора переменных $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, p$. Основу ВП для этого набора составляет функционал

$$\int_{\Omega} \varphi_3(\cdot) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\Phi_1(\sigma_1) + \frac{W_2^*(\sigma_2) - W_2^*(\sigma_2^{k-1})}{\Delta t} + \Phi_3(\sigma_3) + \Phi_p(\nabla p) \right] d\Omega$$

При учете соотношений (2.6) выберем независимые переменные $\mathbf{b} = \{\sigma_1, \Pi, p\}$ и запишем исходную вариационную задачу

$$\inf_{\mathbf{b}} B_3(\mathbf{b}) = \inf_{\mathbf{b}} \int_{\Omega} \left[\varphi_3(\cdot) - \mathbf{e}_1^\circ \sigma_1 - \frac{\epsilon_2^\circ}{\Delta t} \sigma_2 - \mathbf{e}_3^\circ \sigma_3 + \mathbf{q}^\circ \nabla p \right] d\Omega \quad (2.16)$$

Преобразуем задачу (2.16) к ВП

$$\begin{aligned}
& \inf_{\mathbf{b}} B_3(\mathbf{b}) = \\
& = \inf_{\mathbf{b}} \int_{\Omega} \left[\varphi_3(\cdot) - \mathbf{e}_1^\circ \sigma_1 - \frac{\epsilon_2^\circ - \epsilon_2^{k-1}}{\Delta t} \sigma_1 - \frac{\epsilon_2^{k-1}}{\Delta t} \sigma_1 - \mathbf{e}^\circ (\sigma^f - \sigma_1) + \mathbf{q}^\circ \nabla p \right] d\Omega = \\
& = \inf_{\mathbf{b}} \int_{\Omega} \left[\varphi_3(\cdot) - \frac{\epsilon_2^{k-1}}{\Delta t} \sigma_1 - \dot{u}_{1,1}^\circ (\Pi_{ij} + \delta_{ij} p) + q_i^\circ p_{i,i} \right] d\Omega = \\
& = \inf_{\mathbf{b}} \left[\int_{\Omega} \left(\varphi_3(\cdot) - \frac{\epsilon_2^{k-1}}{\Delta t} \sigma_1 + \dot{u}_i^\circ \Pi_{ij,j} - (\dot{u}_{i,i}^\circ + q_{i,i}^\circ) p \right) d\Omega - \right. \\
& \quad \left. - \int_{\Gamma} \Pi_{ij} n_j \dot{u}_i^\circ d\Gamma + \int_{\Gamma} q_n^\circ p d\Gamma \right] = \inf_{\mathbf{b} \in (2.1)} \left[\int_{\Omega} \left(\varphi_3(\cdot) - \frac{\epsilon_2^{k-1}}{\Delta t} \sigma_1 \right) d\Omega - \Gamma_2 + \Gamma_4 \right] \\
& \quad \Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \Pi_{ij} n_j \dot{u}_i^\circ d\Gamma, \quad \Gamma_4 = \int_{\Gamma_4} q_n^\circ p d\Gamma
\end{aligned}$$

при условиях

$$\Pi_{ij} n_j = \dot{F}_i^\circ \text{ на } \Gamma_1, \quad p = p^\circ \text{ на } \Gamma_3 \quad (2.17)$$

Таким образом, получен ВП

$$\inf_{\sigma_1, \Pi, p \in (2.1), (2.17)} I_3(\sigma_1, \Pi, p) = \inf_{\sigma_1, \Pi, p \in (2.1), (2.17)} \left[\int_{\Omega} \left(\Phi_1(\sigma_1) + \frac{W_2^*(\sigma_1) - \epsilon_2^{k-1} \sigma_1}{\Delta t} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \Phi_3(\Pi + \mathbf{p} - \sigma_1) + \Phi_p(\nabla p) \right) d\Omega - \Gamma_2 + \Gamma_4 \right]$$

Подобным образом построены двойственные ВП для всех наборов переменных. Запишем без вывода несколько построенных двойственных ВП.

ВП для набора $\sigma_1, \sigma_2, \mathbf{e}_3, p$ (взяты независимые переменные $\sigma_1, \dot{\mathbf{u}}, p$) имеет вид

$$\inf_{\dot{\mathbf{u}}} \sup_{\sigma_1, p} I_4(\dot{\mathbf{u}}, \sigma_1, p) = \inf_{\dot{\mathbf{u}}} \sup_{\sigma_1, p} \left[\int_{\Omega} \left(-\Phi_1(\sigma_1) - \frac{W_2^*(\sigma_1) - \epsilon_2^{k-1} \sigma_1}{\Delta t} + \Psi_3(\mathbf{e}) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \Phi_p(\nabla p) + \sigma_1 \mathbf{e} - p \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} \right) d\Omega - \Gamma_1 - \Gamma_4 \right]$$

при условиях

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^\circ \text{ на } \Gamma_2, \quad p = p^\circ \text{ на } \Gamma_3$$

ВП для набора переменных $\mathbf{e}_1, \sigma_2, \sigma_3, p$ (взяты независимые переменные $\dot{\mathbf{u}}_1, \sigma_2, \Pi, p$) имеет вид

$$\inf_{\mathbf{e}_1} \sup_{\sigma_2, \Pi, p \in (2.1), (2.17)} I_5(\mathbf{e}_1, \sigma_2, \Pi, p) = \inf_{\mathbf{e}_1} \sup_{\sigma_2, \Pi, p \in (2.1), (2.17)} \left[\int_{\Omega} \left(\Psi_1(\mathbf{e}_1) - \frac{W_2^*(\sigma_2) - \epsilon_2^{k-1} \sigma_2}{\Delta t} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \Phi_3(\Pi + \mathbf{p} - \sigma_2) - \Phi_p(\nabla p) - \sigma_2 \mathbf{e}_1 \right) d\Omega + \Gamma_2 - \Gamma_4 \right]$$

ВП для набора переменных $\mathbf{e}_1, \sigma_2, \sigma_3, \mathbf{q}$ (взяты независимые переменные $\dot{\mathbf{u}}_1, \sigma_2, \Pi, \mathbf{q}$) имеет вид

$$\inf_{\mathbf{e}_1, \mathbf{q}} \sup_{\sigma_2, \Pi, p \in (2.1)} I_6(\mathbf{e}_1, \sigma_2, \Pi, \mathbf{q}, p) = \inf_{\mathbf{e}_1, \mathbf{q}} \sup_{\sigma_2, \Pi, p \in (2.1)} \left[\int_{\Omega} \left(\Psi_1(\mathbf{e}_1) - \frac{W_2^*(\sigma_2) - \epsilon_2^{k-1} \sigma_2}{\Delta t} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \Phi_3(\Pi + \mathbf{p} - \sigma_2) + \Psi_q(\mathbf{q}) - \sigma_2 \mathbf{e}_1 - p \operatorname{div} \mathbf{q} \right) d\Omega + \Gamma_2 + \Gamma_3 \right]$$

при условиях

$$\Pi_{ij} n_j = F_i^\circ, \quad \text{на } \Gamma_1, q_n = q_n^\circ \quad \text{на } \Gamma_4$$

Отметим, что при выводе этого ВП появляется еще одна переменная p .

Аналогично строятся двойственные ВП в случае моделирования твердой фазы элементом Максвелла, последовательно соединенным с упругим элементом ($\sigma_3 = \partial W_3(\epsilon_3)/\partial \epsilon_3$). Один из построенных ВП для набора $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, p$ (взяты независимые переменные $\dot{u}_1, u, p$) имеет вид

$$\inf_{\epsilon_1, u} \sup_p I_7(\epsilon_1, u, p) = \inf_{\epsilon_1, u} \sup_p \left[\int_{\Omega} (\Psi_1(\epsilon_1) + \right. \\ \left. + \frac{W_2(\epsilon - \epsilon_1^{k-1} - \epsilon_1 \Delta t) - W_2(\epsilon_2^{k-1})}{\Delta t} + \frac{W_3(\epsilon) - W_3(\epsilon^{k-1})}{\Delta t} - \right. \\ \left. - \Phi_p(\nabla p) - p \operatorname{div} \left(\frac{u - u^{k-1}}{\Delta t} \right) \right) d\Omega - \Gamma_1 - \Gamma_4 \right], \quad \Gamma_1 = \int_{\Gamma_1} \Pi_{ij}^\circ n_j \frac{u_i - u_i^{k-1}}{\Delta t} d\Gamma$$

при условиях

$$u_i = u_i^\circ \quad \text{на } \Gamma_2, p = p^\circ \quad \text{на } \Gamma_3$$

Величины $W_2(\epsilon_2^{k-1})$, $W_3(\epsilon^{k-1})$, u_i^{k-1} записаны для физической наглядности и могут быть опущены, как постоянные.

Непосредственная проверка показывает, что равенство нулю вариаций функционалов $I_i(\cdot)$ эквивалентно системе (2.1)–(2.6) и задаваемым граничным условиям. Построенные ВП справедливы в случае, когда потенциалы $\Psi_i(\cdot)$ недифференцируемые и характеризуют движение вязкопластических и жесткопластических тел [16]. Предложенный метод построения ВП не требует знания граничных условий. Граничные условия, необходимые для решения, определяются в процессе преобразования вариационных задач.

Отметим, что отдельные ВП [17–21]², полученные различными методами, выводятся по предложенной схеме.

3. Заключение. Используя предложенный подход, можно строить много новых ВП для известных сложных сред или их комбинаций, но это становится делом техники и не несет достаточной научной новизны без приложения ВП к решению конкретных задач или без учета других особенностей. Интересными остаются вопросы получения определяющих соотношений (из соображений минимума скорости диссипации и накопления энергии) и граничных условий для новых сред со сложной реологией. При этом анализ сложной среды начинается с выявления механизмов диссипации и накопления энергии, а также связей и ограничений, которым подчиняются параметры, входящие в потенциалы.

Автор искренне признателен своему учителю А.В. Костерину.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Peiner M. Rheology B.: Springer., 1958. = Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.*
2. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.*

² См. также: *Костерин А.В. Вариационный принцип фильтрационной консолидации. Казань, Казан. ун-т, 1986. 7 с. – Деп. в ВИНТИ 16.12.86, № 8598-В.*

3. *Germain P.* Cours de mecanique des milieux continus. Paris: Masson, 1973. = *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983. 399 с.
4. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
5. *Ekeland I., Temam R.* Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam: North-Holland, 1976. = *Экланд М., Темам Р.М.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.
6. *Мазуров П.А.* Вариационный подход в теориях фильтрационной консолидации и двухфазной фильтрации // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 77–86.
7. *Мазуров П.А.* Построение вариационных принципов двухфазной фильтрации в деформируемой среде // ПМТФ. 1992. № 5. С. 76–82.
8. *Мазуров П.А.* Вариационные принципы фильтрации несжимаемой жидкости в средах с двойной пористостью // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 65–70.
9. *Мазуров П.А.* О построении вариационных принципов // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 432–439.
10. *Базаров И.П.* Термодинамика. М.: Высш. шк., 1983. 344 с.
11. *Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н.* Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. М.: Изд-во МГУ, 1989. 240 с.
12. *Rockafellar R.T.* Convex Analysis. Princeton: Univ. Press, 1970. = *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
13. *Panagiotopoulos P.D.* Inequality Problems in Mechanics and Applications. Convex and Nonconvex Energy Functions. Boston: Birkhauser, 1985. = *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения: Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 492 с.
14. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
15. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
16. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластичных сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
17. *Sandhu R.S., Wilson E.L.* Finite element analysis of seepage in elastic media // J. Eng. Meth. Div., ASCE. 1969. V. 95. № 3. P. 641–652.
18. *Sandhu R.S., Liu H.* Analysis of consolidation of viscoelastic soils // Numer. Meth. Geomech.: Proc. 3rd. Intern. Conf. Aachen, 1979. V. 4. Rotterdam, 1980. P. 1255–1263.
19. *Nisseki S., Satake M.* Variational principles for nonlinear consolidation problem // Numer. Mech. Geomech.: Proc. 3rd. Intern. Conf. Aachen, 1979. V. 1. Rotterdam, P. 175–180.
20. *Washizu K.* Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1982. = *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 544 с.
21. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 244 с.

Казань

e-mail:mazurov@sci.kcn.ru

Поступила в редакцию
27.VIII.1999