

УДК 532.685

© 2000 г. Э.В. Теодорович

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

С помощью записи решения уравнения диффузии в случайно-неоднородной среде в форме фейнмановского интеграла по траекториям получено явное представление для эффективного коэффициента проводимости среды в пространстве произвольной размерности. Вычисление интеграла по траекториям удастся осуществить только в крупномасштабном пределе. В частности, показано, что в трехмерном случае выражение для эффективного коэффициента диффузии не допускает разложения в ряд по величине дисперсии проводимости, что указывает на некорректность использования стандартной теории возмущений.

1. Введение. При рассмотрении различных явлений переноса (заряда, тепла, вещества, импульса) принимается, что связь между потоками соответствующих величин и градиентами некоторых других величин (потенциала, температуры, концентрации, скорости) линейна, при этом множитель пропорциональности, называемый коэффициентом переноса (проводимости, восприимчивости), в случайно-неоднородной среде является некоторой случайной функцией координат. В практических приложениях важно знать связь между средними значениями потоков и градиентов. Соответствующий множитель пропорциональности называется эффективным коэффициентом переноса, и задачей теории является вычисление эффективных коэффициентов переноса. Хотя проводимый ниже анализ относится к большой совокупности различных явлений, в дальнейшем для конкретности будем рассматривать процессы протекания жидкости в пористых средах.

Описание процессов фильтрации в изотропной среде основывается на законе Дарси, связывающем скорость фильтрационного потока $v(r)$ и градиент давления $p(r)$:

$$v(r) = -\kappa(r)\nabla p(r) \quad (1.1)$$

где $\kappa(r)$ – коэффициент проводимости среды, являющийся заданной случайной функцией r . В общем случае связь между средними значениями скорости фильтрационных потоков и градиента давления является нелокальной и имеет вид

$$\langle v(r) \rangle = -\int \kappa_{\text{eff}}(r, r') \langle \nabla p(r') \rangle dr' \quad (1.2)$$

Интегральное ядро $\kappa_{\text{eff}}(r, r')$ для статистически-однородной среды зависит от разности координат $r - r'$. В случае, когда размеры неоднородностей малы по сравнению с характерными масштабами течений (крупномасштабный предел), можно принять

$$\kappa_{\text{eff}}(r - r') = \kappa_{\text{eff}} \delta(r - r'), \quad \kappa_{\text{eff}} \equiv \int \kappa(r) dr \quad (1.3)$$

и задача состоит в нахождении эффективного коэффициента проводимости κ_{eff} при заданной статистике реализаций коэффициента проводимости $\kappa(r)$. Отметим также, что в пространстве Фурье-образов, согласно теореме о свертке, соотношение (1.2) примет вид $\langle v(q) \rangle = -iq \kappa_{\text{eff}}(q) \langle p(q) \rangle$, а соотношению (1.3) будет соответствовать

$$\kappa_{\text{eff}} = \kappa_{\text{eff}}(q)|_{q=0} \quad (1.4)$$

Вычислению эффективного коэффициента проводимости в случайно-неоднородной среде было посвящено много работ. Основная трудность заключается в том, что для нахождения средних давлений и скоростей необходимо предварительно решить следующее из условия несжимаемости жидкости стохастическое дифференциальное уравнение

$$\nabla \cdot (\kappa(\mathbf{r}) \nabla p(\mathbf{r})) = 0$$

при заданных (обычно детерминированных) граничных условиях и затем усреднить решение по ансамблю реализаций коэффициента проводимости $\kappa(\mathbf{r})$. Поскольку записать решение дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в общем случае не представляется возможным, то наиболее простым оказывается подход, основанный на использовании теории возмущений. Для этого следует разделить $\kappa(\mathbf{r})$ на среднюю (не зависящую от координат в статистически-однородной системе) часть и флуктуации

$$\kappa(\mathbf{r}) = \langle \kappa \rangle + \delta\kappa(\mathbf{r})$$

и искать решение в виде ряда теории возмущений по степеням $\delta\kappa(\mathbf{r})/\langle \kappa \rangle$. Тогда последующее почленное усреднение этого ряда при известной статистике флуктуаций $\delta\kappa$ позволит найти средние значения скоростей и давлений и тем самым вычислить κ_{eff} . Подробное изложение пертурбационного подхода, основанного на использовании низшего приближения теории возмущений, содержится в монографии [1], этому подходу следует большинство работ по данной проблеме.

Однако вопрос о том, насколько хорошо низшее приближение теории возмущений описывает эффективную проводимость, остается нерешенным. В связи с оценкой роли высших приближений было высказано предположение, что зависимость эффективной проводимости от дисперсии коэффициента проводимости является экспоненциальной и низшее приближение теории возмущений представляет собой первый член разложения экспоненты в ряд Тейлора [2]. Для проверки этой гипотезы были проведены оценки высших приближений теории возмущений. В частности, найденный во втором (квадратичном по величине дисперсии κ) приближении результат оказался согласующимся с гипотезой об экспоненциальной зависимости эффективной проводимости от дисперсии [3]. В отличие от применявшейся в [1, 4] примитивной теории возмущений было предложено строить ряд теории возмущений путем перехода от дифференциального уравнения к интегральному и последующего его решения методом итераций [5–7]. При таком подходе весьма полезными оказались методы квантовой теории поля, основанные на использовании фейнмановских диаграмм, уравнений Дайсона и техники перенормировок для улучшения теории возмущений путем суммирования некоторой бесконечной подпоследовательности полного ряда [5]. Результаты расчетов высших приближений, полученные в рамках улучшенной теории возмущений, в некоторых случаях оказались противоречащими гипотезе об экспоненциальной зависимости проводимости от дисперсии, а также предположению о независимости эффективной проводимости от формы корреляционной функции флуктуаций проводимости [4].

Представляет интерес вычисление коэффициента эффективной проводимости вне рамок теории возмущений. Подобный подход был ранее предложен автором в задаче о турбулентной диффузии пассивной примеси [8], он основывается на представлении решения стохастического дифференциального уравнения в форме фейнмановского интеграла по траекториям и не использует предположения о малости флуктуаций проводимости [9].

2. Постановка задачи. Вместо используемого ранее в качестве граничного условия задания давления на границе [1] рассмотрим безграничную среду с заданным детерминированным источником [5–9]. Тогда уравнения для скорости и давления примут вид

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \tag{2.1}$$

$$\nabla \kappa(\mathbf{r}) \cdot \nabla p(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) \tag{2.2}$$

где $\rho(\mathbf{r})$ – плотность источника жидкости. Предполагаем (и это будет подтверждено ниже), что результат для характеризующего свойства среды коэффициента проводимости не должен зависеть от формы источника и геометрии создаваемых им течений.

Решение уравнения (2.1) для потенциальной части течения имеет вид

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rangle = \nabla \Delta^{-1} \rho(\mathbf{r})$$

где Δ^{-1} – функция Грина для оператора Лапласа. После перехода к Фурье-образам и усреднения получим

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{q}) \rangle = -i\mathbf{q}\rho(\mathbf{q})/q^2$$

В результате для Фурье-образа коэффициента эффективной проводимости найдем

$$\kappa_{\text{eff}}^{-1}(\mathbf{q}) = q^2 \langle \rho(\mathbf{q}) \rangle / \rho(\mathbf{q}) \quad (2.3)$$

и задача сводится к вычислению Фурье-образа усредненного по ансамблю реализаций давления.

В дальнейшем удобно ввести обозначение $\kappa(\mathbf{r}) = \kappa_0 e^{u(\mathbf{r})}$, после чего уравнение для давления примет вид

$$[\nabla^2 + \nabla u(\mathbf{r}) \cdot \nabla] p(\mathbf{r}) = -\kappa_0^{-1} e^{-u(\mathbf{r})} \rho(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

Отметим, что при построении теории возмущений для давления в работах, основанных на использовании внешнего источника [5–7], экспоненциальный множитель в правой части уравнения (2.4) не учитывался.

Формальное решение уравнения (2.4) может быть определено соотношением

$$p = \kappa_0^{-1} (-\nabla^2 - \nabla u \cdot \nabla)^{-1} e^{-u} \rho \quad (2.5)$$

Обратный оператор в (2.5) представляет собой функцию Грина уравнения с переменными случайными коэффициентами.

3. Стохастическое решение для давления. Следуя описанному ранее подходу [8, 9], для построения обратного оператора воспользуемся фейнмановским операторным формализмом [10], согласно которому обратный оператор может быть представлен в форме упорядоченной операторной экспоненты

$$[-\nabla^2 - \nabla u(\mathbf{r}) \cdot \nabla]^{-1} = \int_0^\infty \exp \left\{ -\int_0^\tau [-\nabla^2(s) - \nabla u(\mathbf{r}, s) \cdot \nabla(s)] ds \right\} d\tau \quad (3.1)$$

Экспонента от оператора понимается в смысле разложения в ряд Тейлора по степеням $\nabla(s)$ и $\nabla u(\mathbf{r}, s)$. При этом некоммутирующие операторы $\nabla(s)$, $\nabla u(\mathbf{r}, s)$ действуют в порядке нарастания "собственного времени" s . Правило упорядочения по s позволяет манипулировать с операторами как с простыми числами. С целью "распутывания операторной экспоненты" следует понизить порядок оператора ∇ в показателе экспоненты, тогда получившаяся экспонента, содержащая первую степень оператора ∇ , может быть интерпретирована как оператор сдвига аргумента согласно соотношению

$$e^{\mathbf{b} \cdot \nabla} f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \quad (3.2)$$

Понижение порядка оператора ∇ осуществляется с помощью предложенного Стратоновичем [11] преобразования, которое следует рассматривать как функциональный аналог преобразования Вейерштрасса [12] (см. также [9], Приложение А)

$$\exp \left\{ a \int_0^\tau \mathbf{F}^2(s) ds \right\} = \int \exp \left\{ -\int_0^\tau \left[\frac{1}{4a} \mathbf{X}^2(s) + \mathbf{F}(s) \cdot \mathbf{X}(s) \right] ds \right\} d[\mathbf{X}(s)] \quad (3.3)$$

где $\mathbf{X}(s)$ – всевозможные векторные функции, заданные на отрезке $(0, \tau)$. Интегральная мера $d[\mathbf{X}(s)]$ нормирована таким образом, что

$$\int \exp\left\{-\frac{1}{4a_0} \int_0^\tau \mathbf{X}^2(s) ds\right\} d[\mathbf{X}(s)] = 1$$

Выполняя преобразование Стратоновича (3.3) и используя соотношение (3.2), найдем

$$p(\mathbf{r}) = \kappa_0^{-1} \int_0^\infty \int \rho(\mathbf{r}(0, \tau | \mathbf{X})) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{4} \int_0^\tau [\mathbf{X}(s) + \nabla u(\mathbf{r}(s, \tau | \mathbf{X}))]^2 ds - u(\mathbf{r}(0, \tau | \mathbf{X}))\right\} d[\mathbf{X}(s)] d\tau \quad (3.4)$$

$$\mathbf{r}(s, \tau | \mathbf{X}) = \mathbf{r} - \int_s^\tau \mathbf{X}(s') ds'$$

Для последующего усреднения по реализациям $u(\mathbf{r}) = \ln [\kappa(\mathbf{r})/\kappa_0]$ удобно избавиться от содержащей ∇u квадратичной комбинации в показателе экспоненты с помощью вторичного применения преобразования Стратоновича. В результате для среднего значения давления найдем

$$\langle p(\mathbf{r}) \rangle = \kappa_0^{-1} \int_0^\infty \int \rho(\mathbf{r}(0, \tau | \mathbf{X})) \times \\ \times \exp\left\{-\int_0^\tau [\mathbf{Y}^2(s) + i\mathbf{Y}(s) \cdot \mathbf{x}(s)] ds\right\} \Psi[\theta(\mathbf{x} | \mathbf{Y})] d[\mathbf{X}(s)] d[\mathbf{Y}(s)] d\tau \quad (3.5)$$

$$\Psi[\theta(\mathbf{x} | \mathbf{Y})] = \langle \exp\{i \int \theta(\mathbf{x} | \mathbf{Y}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\} \rangle$$

$$\theta(\mathbf{x} | \mathbf{Y}) = \int_0^\tau [\mathbf{Y}(s) \cdot \nabla + 2i\delta(s)] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(s, \tau | \mathbf{X})) ds$$

Величина $\Psi[\theta(\mathbf{x} | \mathbf{Y})]$ представляет собой характеристический функционал логарифма проводимости (функциональный Фурье-образ функции распределения для $u(\mathbf{r})$), который в случае центрированного логнормального распределения имеет вид

$$\Psi[\theta(\mathbf{x} | \mathbf{Y})] = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int \theta(\mathbf{x} | \mathbf{Y}) \theta(\mathbf{x}' | \mathbf{Y}) B(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}'\right\} \quad (3.6)$$

где $B(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \langle u(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}') \rangle$ – парная корреляционная функция для логарифма проводимости; при этом выполнения условия $\langle u \rangle = 0$ можно всегда добиться соответствующим выбором κ_0 . После проведения интегрирований по $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ в (3.6) зависимость от $\mathbf{r}$ останется только в качестве аргумента функции для плотности источника. Выполняя преобразование Фурье по $\mathbf{r}$ и используя (2.3), найдем

$$\kappa_{\text{eff}}^{-1}(\mathbf{q}) = \kappa_0^{-1} q^2 \int_0^\infty \int \exp\left\{-\int_0^\tau [\mathbf{Y}^2(s) + i\mathbf{Y}(s) \cdot \mathbf{X}(s) + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X}(s)] ds\right\} \times \\ \times E(\tau | \mathbf{Y}) d[\mathbf{X}(s)] d[\mathbf{Y}(s)] d\tau \quad (3.7) \\ E(\tau | \mathbf{Y}) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau [-\mathbf{Y}(s) \nabla + 2i\delta(s)] [\mathbf{Y}(s') \nabla + 2i\delta(s')] \times \right. \\ \left. \times B(\mathbf{r}(0, s | \mathbf{X}) - \mathbf{r}(0, s' | \mathbf{X})) ds ds'\right\}$$

Для нахождения κ_{eff} следует выполнить предельный переход при $q \rightarrow 0$. Однако эта операция не является простой ввиду сингулярной зависимости от q интегралов в правой части равенства (3.7). Чтобы сделать эту операцию корректной, выполним обратное преобразование Фурье и найдем

$$\kappa_{\text{eff}}^{-1}(\mathbf{r}) = -\kappa_0^{-1} \nabla^2 F(r) \quad (3.8)$$

$$F(r) = \int_0^\infty \int \delta(\mathbf{r}(0, \tau | \mathbf{X})) \exp \left\{ -\int_0^\tau [\mathbf{Y}^2(s) + i\mathbf{Y}(s) \cdot \mathbf{X}(s)] ds \right\} \times \\ \times E(\tau | \mathbf{Y}) d[\mathbf{X}(s)] d[\mathbf{Y}(s)] d\tau$$

Согласно соотношениям (3.4), (3.8), интегрирование по $\mathbf{X}(s)$ может быть интерпретировано как интегрирование по скоростям всевозможных траекторий, выходящих в момент времени $s = 0$ из начала координат и заканчивающихся в момент времени $s = \tau$ в точке $\mathbf{r}$.

4. Эффективный коэффициент проводимости в крупномасштабном пределе. Используя соотношения (1.3), (3.8) и преобразуя объемный интеграл в поверхностный, найдем

$$\kappa_{\text{eff}}^{-1} = -\kappa_0^{-1} S_d \lim_{r \rightarrow \infty} r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} F(r) \quad (4.1)$$

($S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь поверхности d -мерной сферы единичного радиуса).

При интегрировании по траекториям $\mathbf{X}(s)$ вклад каждой траектории экспоненциально зависит от величины

$$\int_0^\tau \mathbf{X}^2(s) ds$$

которая может быть интерпретирована как удвоенное действие вдоль траектории для свободной частицы. Поскольку, согласно соотношению (4.1), рассматриваются только уходящие на бесконечность траектории, действие вдоль этих траекторий будет большим и наиболее существенный вклад в интеграл по траекториям дадут траектории с минимальным действием, т.е. соответствующие $\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}_0 = \text{const}$.

За исключением предположения о логнормальности распределения, в остальном до сих пор проводимое рассмотрение было точным. В качестве первого (и единственного) приближения примем, что в выражении (4.1) можно положить

$$B(\mathbf{r}(s, \tau | \mathbf{X}) - \mathbf{r}(s', \tau | \mathbf{X})) \approx B(\mathbf{X}_0(s - s'))$$

В этом приближении с помощью тождества

$$\nabla B(\mathbf{X}_0(s - s')) = \frac{\mathbf{X}_0}{X_0^2} \frac{\partial}{\partial s} B(\mathbf{X}_0(s - s')) = -\frac{\mathbf{X}_0}{X_0^2} \frac{\partial}{\partial s'} B(\mathbf{X}_0(s - s'))$$

можно выполнить интегрирование по s, s' в (3.8). Интегрирование по траекториям также удастся провести в явном виде до конца с использованием преобразования Фурье [13]. Для этого выполним разложение заданных в области $0 \leq s \leq \tau$ функций $\mathbf{X}(s)$ и $\mathbf{Y}(s)$ в ряды Фурье

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n \cos \frac{\pi n s}{\tau}, \quad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{Y}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{Y}_n \cos \frac{\pi n s}{\tau} \quad (4.2)$$

В результате использования этого разложения (в случае интеграла по траекториям, соответствующего простой замене переменной интегрирования) интегрирование по траекториям заменяется произведением бесконечного числа интегралов по $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n$. Ин-

тегрирование по X_n при $n \neq 0$ дает $\delta(Y_n)$, а последующее интегрирование по Y_n с учетом условия нормировки дает равный единице множитель. Остаточное интегрирование по d -мерному вектору Y_0 после подстановки $Y_0 \rightarrow Y_0 - iX_0/2$ осуществляется с использованием соотношения

$$\int \exp \left\{ -Y^2 \tau - \frac{(Y \cdot X)^2}{X^4} [B(0) - B(X\tau)] \right\} dY = \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^{d/2} \left[1 + \frac{B(0) - B(X\tau)}{X^2 \tau} \right]^{-1/2}$$

а последующее интегрирование по X_0 проводится с помощью стоящей под знаком интеграла в (3.8) дельта-функции.

5. Обсуждение результатов. После выполнения указанных в разд. 4 действий и использования соотношения $X_0 = r/\tau$ получим

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{eff}}^{-1} &= \kappa_0^{-1} S_d \frac{\exp\{B(0)/2\}}{(4\pi)^{d/2}} \lim_{r \rightarrow \infty} r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{\exp\{-r^2/4\tau\}}{\sqrt{1 + [B(0) - B(r)]r^2/\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{d/2}} = \\ &= \kappa_0^{-1} S_d \frac{\exp\{B(0)/2\}}{(4\pi)^{d/2}} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[(d-2)A_1(r) + \frac{1}{2} r \frac{\partial B(r)}{\partial r} A_3(r) \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$A_n(r) = \int_0^\infty \frac{t^{(d-3)/2} \exp\{-t/4\}}{[t + B(0) - B(r)]^{n/2}} dt$$

Согласно принципу ослабления корреляций, примем, что при $r \rightarrow \infty$ корреляция $B(r) \rightarrow 0$ и $\partial B(r)/\partial r$ стремится к нулю быстрее, чем $1/r$. В результате найдем

$$\kappa_{\text{eff}}^{-1} = \kappa_0^{-1} \frac{(d-2)S_d \exp\{B(0)/2\}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{t^{(d-3)/2} \exp\{-t/4\}}{\sqrt{t + B(0)}} dt \quad (5.2)$$

Отметим, что если под знаком интеграла в (5.2) положить $B(0) = 0$, то интеграл в (5.2) будет равен $4^{d/2-1} \Gamma(d/2 - 1)$, что приводит к соотношению

$$\kappa_{\text{eff}}^{-1} = \kappa_0^{-1} \exp\{B(0)/2\} = \langle \kappa^{-1} \rangle$$

В одномерном случае этот результат является точным, однако непосредственное использование формулы (5.2) приводит к расходящемуся интегралу, поскольку в одномерном случае использованное преобразование Фурье оказывается некорректным, что хорошо известно при решении уравнения Лапласа методом интегральных преобразований. При $d = 2$ формальное использование соотношения (5.2) дает $\kappa_{\text{eff}} = 0$. Этот результат связан с классической проблемой, возникающей при нахождении функции Грина d -мерного уравнения Лапласа, когда решение имеет вид $\Gamma(d/2 - 1)r^{-(d-2)}$ и при $d \rightarrow 2$ оказывается представленным в виде $\Gamma(0) + 2 \ln r$, содержащем бесконечную константу и пропорциональный $\ln r$ конечный член.

Из формулы (5.2) также видно, что правая часть равенства (5.2) не допускает разложения в ряд по величине дисперсии $B(0)$, поскольку, начиная с некоторого порядка, коэффициенты разложения будут содержать расходящиеся интегралы. Это дает основание утверждать, что применение теории возмущений при построении статистического решения стохастического дифференциального уравнения вида (2.2) представляется некорректным. Другими словами, возмущение оказывается сингулярным и даже при очень малых возмущениях структура решения не близка к структуре решения невозмущенной задачи. По-видимому, сингулярный характер возмущения связан с нарушением группы симметрии, соответствующей масштабным преобразованиям координат и амплитуд, которая имеет место для уравнения (2.2) и не имеет места, когда коэффициент проводимости зависит от координаты.

Сказанное наглядно иллюстрируется в трехмерном случае, когда проблемы расходимости интегралов не возникает и вычисление может быть доведено до кон-

ца. В общем случае интеграл в (5.2) выражается через функцию Уиттекера $W_{-d/4+1/2, d/4-1/2}(B(0)/4)$, которая при $d = 3$ сводится к интегралу вероятности. Соответствующий расчет дает

$$\kappa_{\text{eff}} = \frac{\langle \kappa \rangle}{(1 + D)[1 - \text{erf}(\sqrt{B(0)}/2)]}$$

$$D + 1 = \frac{\langle \kappa^2 \rangle}{\langle \kappa \rangle^2} = e^{B(0)}$$

и разложение в ряд по величине дисперсии флуктуаций проницаемости осуществляется по полуцелым степеням $B(0)$, тогда как по самому построению ряда теории возмущений оно должно осуществляться по целым степеням $B(0)$. Однако остается неясным вопрос о том, в какой мере вывод о неприменимости теории возмущений связан с использованием логнормальной статистики для флуктуаций проницаемости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01083 и 99-01-00957) и доложена на Международной конференции "Современная теория фильтрации", посвященной памяти П.Я. Кочкиной (сентябрь 1999 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Швидлер М.И. Стохастическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
2. Gelhar L.W., Axness C.L. Three-dimensional stochastic analysis of macrodispersion in aquifers // Water Resour. Res. 1983. V. 19. № 1. P. 161–180.
3. Dagan G. Higher-order correction of effective permeability of heterogeneous isotropic formations of lognormal conductivity distribution // Trans. Porous Media. 1993. V. 12. № 3. P. 279–290.
4. De Wit A. Correlation structure dependence of the effective permeability of heterogeneous porous media // Phys. Fluids. 1995. V. 7. № 11. P. 2553–2562.
5. King P.R. The use of field theoretic methods for the study of flow in a heterogeneous porous media // J. Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 20. № 12. P. 3935–3947.
6. Indelman P., Abramovich B. A higher-order approximation to effective conductivity in media of anisotropic random structure // Water Resour. Res. 1994. V. 30. № 6. P. 1857–1864.
7. Abramovich B., Indelman P. Effective permeability of log-normal isotropic random media // J. Phys. A. 1995. V. 28. № 3. P. 693–700.
8. Теодорович Э.В. Турбулентная диффузия пассивной примеси // ПММ. 1992. Т. 55. Вып. 2. С. 275–282.
9. Теодорович Э.В. К вычислению эффективной проводимости случайно-неоднородной пористой среды // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. Вып. 1. С. 313–324.
10. Feynman R.P. An operator calculus having applications to quantum electrodynamics // Phys. Rev. 1951. V. 84. № 1. P. 118–128.
11. Стратонович Р.Л. Об одном методе вычисления квантовых функций распределения // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115. № 6. С. 1097–1100.
12. Hirschman I.I., Widder D.V. The Convolution Transform. Princeton, N.J.: Univ. Press, 1955. = Хиршман И.И., Уиддер Д.В. Преобразования типа свертки. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 312 с.
13. Feynman R.P., Hibbs A.R. Quantum mechanics and path integrals. N.Y.: Mc. Grow-Hill, 1956. = Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 382 с.