

УДК 532.5:534.1

© 2000 г. В.Ю. Ляпидевский

СТРУКТУРА КАТЯЩИХСЯ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Исследуется структура нелинейных волн при двухслойном течении несжимаемой жидкости в протяженных каналах. Для уравнений двухслойной мелкой воды построены периодические разрывные решения, описывающие катящиеся волны конечной амплитуды. Найдены "аномальные" волны предельной амплитуды, соответствующие переходу от расслоенного к снарядному режиму течения.

Аналогично однослойному течению жидкости в наклонном канале [1] равномерный поток двухслойной жидкости может стать неустойчивым. В результате развития неустойчивости на границе раздела жидкостей развиваются квазирегулярные волны конечной амплитуды, получившие название катящихся волн. В приближении мелкой воды катящиеся волны представляют собой подкласс периодических прерывных бегущих волн, в которых осуществляется плавный переход от докритического к сверхкритическому течению в системе координат, движущейся со скоростью волны. Исследованы условия развития и структура катящихся волн в газожидкостных потоках [2–6]. Для уравнений однослойной мелкой воды в открытом наклонном канале был предложен [7] критерий нелинейной устойчивости пакета волн конечной амплитуды, основанный на свойстве гиперболичности уравнений модуляций для двухпараметрического семейства катящихся волн.

Данная работа посвящена исследованию структуры бегущих волн в двухслойном течении, в частности описанию нового "аномального" режима течения, переход к которому существенно меняет картину течения. Показано, что, как и для течений в открытых руслах, катящиеся волны конечной амплитуды, возникающие при двухслойном течении жидкости в горизонтальном канале, образуют двухпараметрическое семейство. Поэтому уравнения модуляций для пакетов катящихся волн могут быть получены методом, аналогичным использованному ранее [7, 8] при анализе нелинейной устойчивости периодических волн в открытых наклонных каналах; при этом условия устойчивости волнового пакета выражаются в терминах гиперболичности соответствующей системы уравнений модуляций.

1. Уравнения двухслойной мелкой воды с трением. В длинных каналах на структуру волн в двухслойной жидкости определяющее влияние оказывает трение о стенки канала и на границе раздела жидкостей. Используя гипотезу о постоянстве коэффициента турбулентного трения, уравнения двухслойного течения в канале постоянной глубины в приближении Буссинеска ($0 < (\rho^- - \rho^+)/\rho_0 \ll 1$) запишем в виде

$$\begin{aligned} h_t + (hu^-)_x &= 0 & (H-h)_t + ((H-h)u^+)_x &= 0 \\ u_t^- + u^- u_x^- + b h_x + \rho_0^{-1} p_x^+ &= -c_w \frac{u^- |u^-|}{h} - c_i \frac{(u^- - u^+) |u^- - u^+|}{h} \\ u_t^+ + u^+ u_x^+ + \rho_0^{-1} p_x^+ &= -c_w \frac{u^+ |u^+|}{(H-h)} + c_i \frac{(u^- - u^+) |u^- - u^+|}{(H-h)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u^+ , u^- – скорость, а ρ^+ , ρ^- – плотность верхнего и нижнего слоев соответственно; ρ_0 – средняя плотность, $b = (\rho^- - \rho^+)g/\rho_0$; h – глубина нижнего слоя, H – полная глубина

канала; c_w и c_i – постоянные коэффициенты трения о стенки канала и на границе раздела жидкостей. После перехода к безразмерным переменным можно считать $H = 1$, $b = 1$, $c_w = 1$, $c = c_i/c_w$, и для искомых переменных $h, \gamma = u^- - u^+$ получаем неоднородную систему уравнений

$$\begin{aligned} h_t + (h(1-h)\gamma)_x &= 0 \\ \gamma_t + (u^{-2}/2 - u^{+2}/2 + h)_x &= F \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$F = \frac{u^+ |u^+|}{1-h} - \frac{u^- |u^-|}{h} + c \frac{(u^+ - u^-) |u^+ - u^-|}{h(1-h)} \quad (1.3)$$

Значения $u^\pm$ определяются как функции h, γ из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} hu^- + (1-h)u^+ &= u_m \equiv \text{const} \\ u^+ &= u_m - \gamma h, \quad u^- = u_m + (1-h)\gamma \end{aligned} \quad (1.4)$$

Поведение характеристик и свойства разрывных решений для системы (1.2) были изучены [9, 10]. Поэтому при анализе прерывных волн будем пользоваться этими результатами.

2. Бегущие волны. Ограничимся рассмотрением бегущих вправо волн, т.е. рассмотрим решения системы (1.1), зависящие от переменной $\xi = x - Dt$, $D > 0$, такие, что $0 < u^- < D$, $0 < u^+ < D$. Уравнения волн могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} h(D - u^-) &= m^- (1-h)(D - u^+) = m^+ \\ J &= (D - u^-)^2/2 - (D - u^+)^2/2 + h, \quad dJ/d\xi = F \end{aligned} \quad (2.1)$$

В силу соотношений (1.3), (1.4) и (2.1) величины J и F – функции одной переменной h .

Система (2.1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{F(h)}{\Delta(h)}, \quad \Delta(h) = 1 - \frac{m^{-2}}{h^3} - \frac{m^{+2}}{(1-h)^3} \quad (2.2)$$

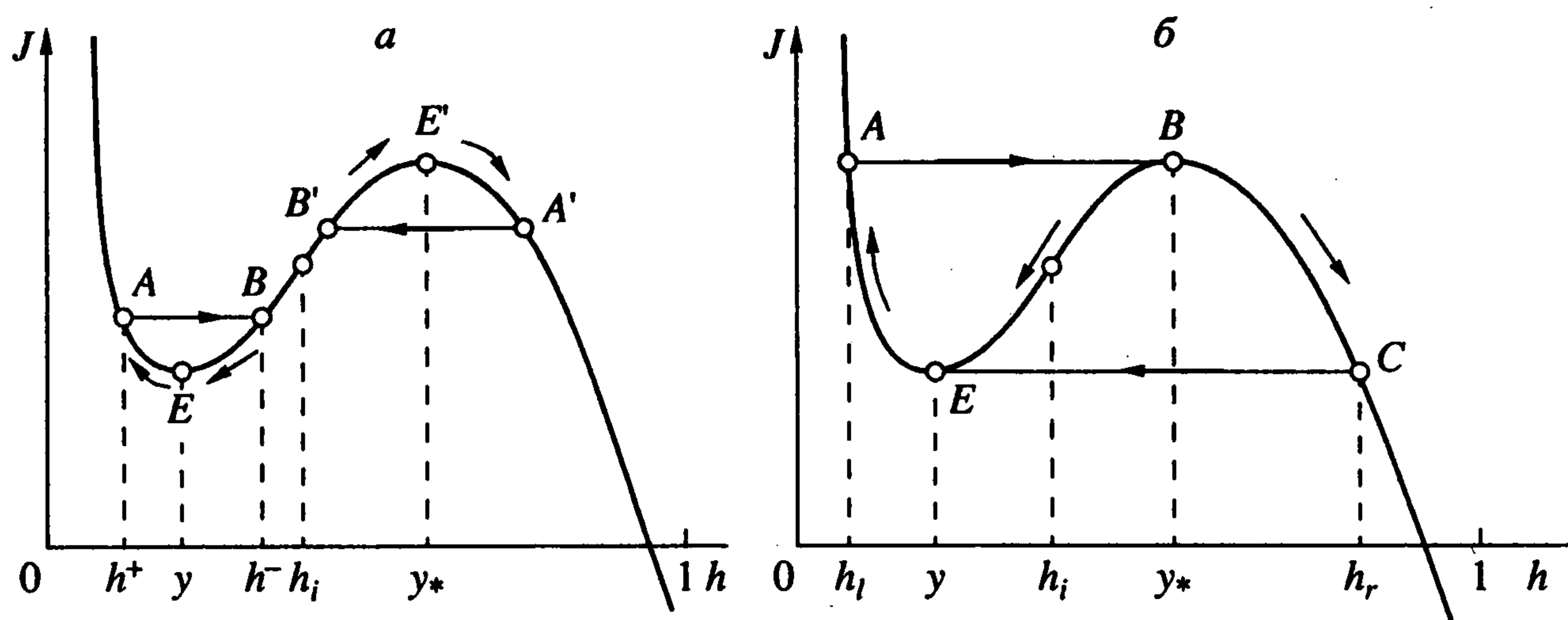
На интервале $(0, 1)$ существует единственная точка $h = h_i$ экстремума функции $\Delta(h)$, соответствующая максимуму этой функции. Периодическое решение, описывающее катящиеся волны, можно построить, если выполнено условие

$$\Delta(h_i) > 0 \quad (2.3)$$

В этом случае график функции $J(h)$ представлен на фиг. 1, а. Функция $J(h)$ имеет локальный минимум в точке u и локальный максимум в точке u_* . В системе координат, движущейся со скоростью волны D , реализуется докритическое течение ($\Delta(h) > 0$) при $u < h < u_*$ и сверхкритическое течение ($\Delta(h) < 0$) при $0 < h < u$ и при $u_* < h < 1$.

Заметим, что достаточно рассмотреть катящиеся волны в окрестности точки u , соответствующие переходу АВЕ. Аналогичная волновая картина А'В'Е' в окрестности точки u_* может быть получена зеркальным отображением рассмотренного ниже профиля волны относительно средней плоскости канала.

Построение катящихся волн для двухслойного течения аналогично проведенному ранее [1] построению для течения однослойной жидкости в наклонном канале. Условия на разрыве для (1.1) принимают вид $J(h^+) = J(h^-)$ (переход АВ на фиг. 1, а). Так как из условий устойчивости разрыва следует, что состояние перед разрывом соответствует сверхкритическому течению, а за разрывом – докритическому, то $h^+ < u < h^- < u_*$, и необходимым условием существования непрерывного решения, соеди-



Фиг. 1

няющего эти состояния, является обращение в нуль правой части уравнения (2.2) в точке y , т.е. $F(y) = 0$. Так как $\Delta(h) < 0$ при $h^+ < h < y$ и $\Delta(h) > 0$ при $y < h < h^-$, то для построения монотонно возрастающего непрерывного решения (2.2), соединяющего два уровня $h = h^+$ и $h = h^-$ (переход ВЕА), необходимо, чтобы

$$F(h) < 0 \text{ при } h^+ < h < y \text{ и } F(h) > 0 \text{ при } y < h < h^- \quad (2.4)$$

Поэтому для существования катящихся волн малой амплитуды в окрестности равномерного потока глубиной y достаточным условием является выполнение соотношений

$$F(y) = 0, F'(y) > 0 \quad (2.5)$$

При построении волн конечной амплитуды требуется проанализировать поведение функции $F(h)$ и выполнение условий (2.4) в зависимости от параметров течения. Покажем, что, как и в случае однослойного течения, катящиеся волны образуют двухпараметрическое семейство решений при фиксированном полном расходе жидкости через сечение канала.

3. Параметры катящихся волн. Пусть величина u_m задана. Определим параметры потока, соответствующие критической глубине y . Фиксируем $y \in (0, 1)$ и обозначим через u_c, w_c скорость нижнего и верхнего слоя в критическом сечении. Тогда первое уравнение в (1.4) и условия критичности потока $\Delta(y) = 0, F(y) = 0$ в переменных

$$v = u_c/u_m, z = w_c/u_m, \theta = D/u_m$$

принимают вид

$$yv + (1-y)z = 1$$

$$\frac{(\theta - v)^2}{y} + \frac{(\theta - z)^2}{1-y} = \frac{1}{u_m^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{z^2}{1-y} - \frac{v^2}{y} + c \frac{(z-v)|z-v|}{y(1-y)} = 0$$

Последнее уравнение в (3.1) дает уравнение

$$\frac{a^2}{1-y} - \frac{1}{y} + c \frac{(a-1)|a-1|}{y(1-y)} = 0 \quad (3.2)$$

относительно неизвестной $a = z/v$.

При заданном $y \in (0, 1)$ требуется найти положительное решение этого уравнения. Пусть $a \geq 1$. Тогда уравнение (3.2) сводится к квадратному уравнению, единственное

решение которого $a \geq 1$ существует тогда и только тогда, когда $0 < y \leq \frac{1}{2}$. Аналогично можно показать, что на интервале $(0, 1)$ единственное решение уравнения (3.2) существует тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2} < y < 1$. Таким образом, для любого $y \in (0, 1)$ существует единственное положительное решение уравнения (3.2).

Пусть $0 < y \leq \frac{1}{2}$. Тогда из (3.2) определяется $a \geq 1$, т.е. $z \geq v$, или $w_c \geq u_c$. В этом случае

$$\Delta'(y) = 3 \left(\frac{(D - u_c)^2}{y^2} - \frac{(D - w_c)^2}{(1 - y)^2} \right) \geq 12((D - u_c)^2 - (D - w_c)^2) > 0$$

Аналогично при $y = y_* > \frac{1}{2}$ имеем $w_c < u_c$ и

$$\Delta'(y_*) = 3 \left(\frac{(D - u_c)^2}{y_*^2} - \frac{(D - w_c)^2}{(1 - y_*)^2} \right) \leq 12((D - u_c)^2 - (D - w_c)^2) < 0$$

Таким образом, показано, что локальный минимум функции $J(h)$ достигается в точке $h = y$ при $y < \frac{1}{2}$. При $y = y_* > \frac{1}{2}$ в критической точке достигается локальный максимум (фиг 1, а). Далее из системы (3.1) по известным значениям y, a (или y_*, a) однозначно находятся v, z и, следовательно, u_c, w_c по формулам

$$v = \frac{1}{y + (1 - y)a}, \quad z = va$$

Для определения значения θ требуется найти корни квадратного многочлена

$$P(\theta) = \frac{(\theta - v)^2}{y} + \frac{(\theta - z)^2}{1 - y} - \frac{1}{u_m^2}$$

Минимальное значение $P(\theta)$ достигается в точке $\theta = \theta_m = v(1 - y) + zy$. Поэтому при $y < \frac{1}{2}$ из неравенства $v < z$ следует $v < \theta_m < z$, а при $y_* > \frac{1}{2}$ из неравенства $z < v$ следует $z < \theta_m < v$. Так как ищется решение уравнения $P(\theta) = 0$, такое, что $z < \theta$, $v < \theta$, то $\theta_m < \theta$ и решение определяется однозначно. При $y < \frac{1}{2}$ решение существует только при $P(z) < 0$, т.е. при

$$u_m < \frac{\sqrt{y}}{z - v} \quad (3.3)$$

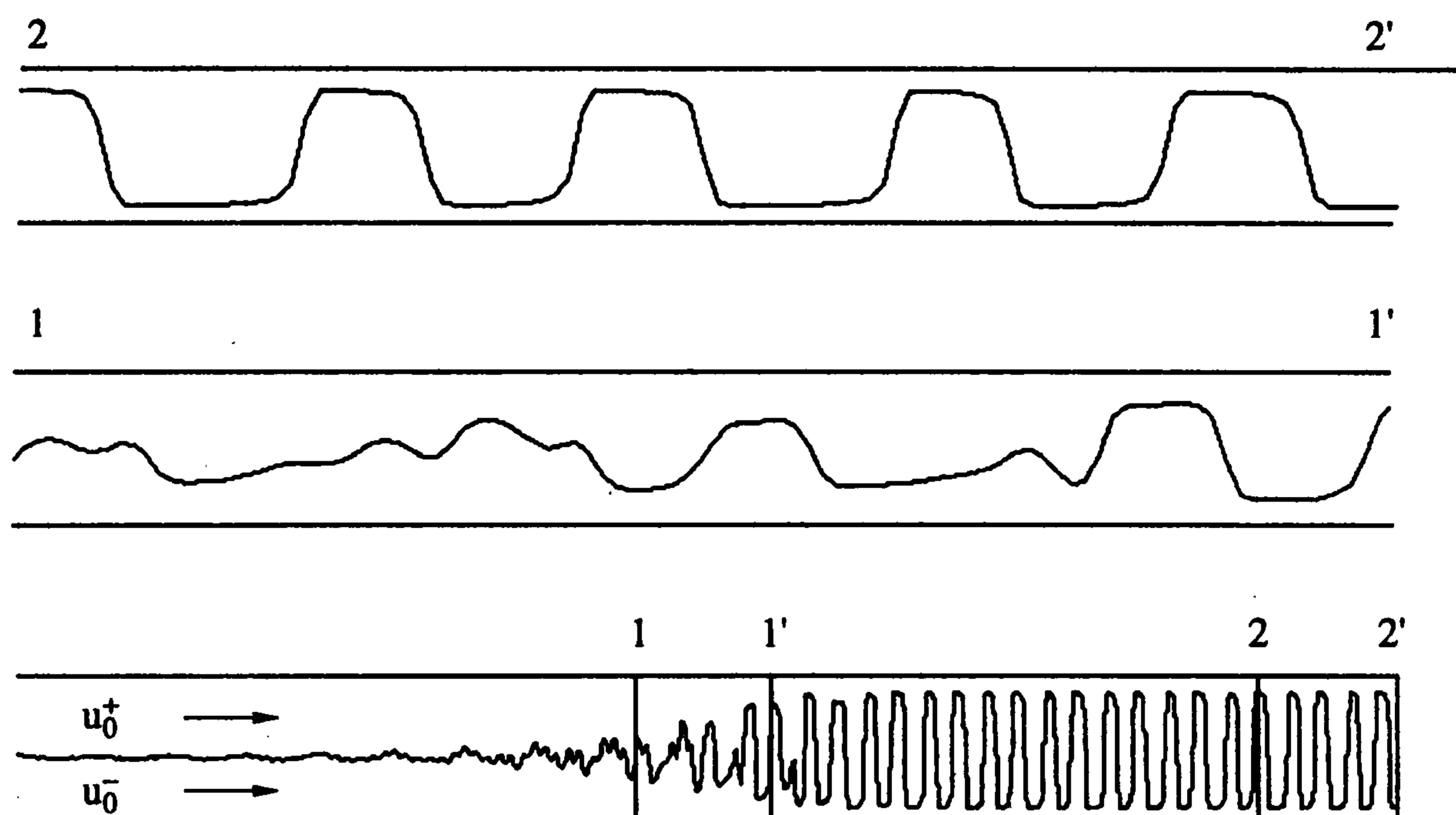
При $y_* > \frac{1}{2}$ необходимым и достаточным условием существования допустимого решения является выполнение неравенства $P(v) < 0$, т.е.

$$u_m < \frac{\sqrt{1 - y_*}}{v - z} \quad (3.4)$$

Таким образом, по заданному значению $y \in (0, \frac{1}{2})$ или $y_* \in (\frac{1}{2}, 1)$ можно однозначно восстановить параметры критического течения D, u_c, w_c для соответствующего диапазона средней скорости $u_m (u_m > 0)$, определяемого неравенствами (3.3) или (3.4).

Как было отмечено выше, для существования периодических катящихся волн малой амплитуды в окрестности критической точки $y < \frac{1}{2}$ достаточно выполнения условия $F'(y) > 0$. Аналогично для $y_* > \frac{1}{2}$ катящиеся волны малой амплитуды будут существовать при $F'(y_*) > 0$ и в отличие от волн в окрестности точки $y < \frac{1}{2}$ эти волны на участках непрерывности (переход А'В'Е' на фиг. 1, а) будут удовлетворять условию $dh/d\xi < 0$.

4. Катящиеся волны предельной амплитуды. Пусть фиксирована критическая глубина $y < \frac{1}{2}$, в окрестности которой существуют катящиеся волны бесконечно



Фиг. 3

ности локального сужения канала. Заметим, что при формировании структуры течения трение о стенки канала играет роль, аналогичную воздействию на поток локального сужения канала. При этом в силу малости коэффициента трения этот эффект проявляется на гораздо больших пространственных масштабах.

Надо отметить важную особенность построенного "аномального" решения АВСЕА. Для существования такой структуры условие $F(y) = 0$, равно как и условие $F(y_*) = 0$, перестает быть необходимым и решение АВСЕА, вообще говоря, не описывает катящуюся волну. Поэтому при дальнейшем изменении параметров течения для существования периодического решения указанной конфигурации необходимо обеспечить выполнение следующих неравенств (фиг. 1, б):

$$F(h) < 0 \text{ при } h_l \leq h < y$$

$$F(h) > 0 \text{ при } y_* < h \leq h_r$$

Заметим, что структура "аномальных" решений определяется по-прежнему двумя независимыми параметрами, хотя и другими, чем в случае катящихся волн. Последнее замечание дает возможность вывести уравнения модуляций для исследования устойчивости снарядного режима течения при помощи методики, изложенной ранее [7, 8].

Из-за сложной структуры аномальных решений исследование гиперболичности соответствующих уравнений модуляций представляет собой еще нерешенную проблему. Другой подход, позволяющий судить о нелинейной устойчивости катящихся волн и снарядного режима течения, состоит в анализе нестационарной задачи о формировании и развитии волн конечной амплитуды в двухслойном течении в результате неустойчивости равномерного потока. Конечно, речь идет о численном исследовании этой устойчивости.

На фиг. 3 приведены результаты численного расчета развития неустойчивости сдвигового течения и перехода к снарядному режиму течения в рамках модели (1.1). На начальном участке канала ($H = 1$, $L = 50$, L — длина канала) слева задаются постоянные скорости верхнего и нижнего слоев ($u_0^+ = 1,5$, $u_0^- = 2$) и небольшие гармонические возмущения глубины нижнего слоя ($h = 0,5 + 0,01 \cos(10t)$). Эти возмущения достаточно медленно развиваются в сдвиговом течении жидкости почти до середины канала. Затем происходит взрывной рост и имеет место нелинейная стадия развития возмущений. Так как на всем протяжении канала рассматриваемое течение сверхкритическое, то при достаточно больших временах решение полностью определяется данными Коши на входе канала.

На фиг. 3 показано положение границы раздела слоев на момент времени $t = 25$, достаточно большой для установления квазистационарной картины течения. Можно видеть, что на участке 1–1' в результате нелинейного взаимодействия волн канал почти перекрывается то одним, то другим слоем жидкости и создаются условия для перехода к "аномальному" режиму течения. На участке 2–2' квазирегулярная картина волн, содержащих пару разрывов типа "гидравлический прыжок – яма", уже полностью сформировалась, что свидетельствует об устойчивости снарядного режима течения. Структура волн на этом участке качественно совпадает с представленной на фиг. 2 (ABCEA). Сравнение по фазовым скоростям и длинам волн с соответствующими стационарными решениями будет возможно после построения двухпараметрического семейства "аномальных" волн, аналогичного проведенному выше для катящихся волн в двухслойных течениях.

Если для наглядности данные расчета представить в размерных переменных для системы "вода – керосин" ($b = 2,5 \text{ м/с}^2$): $L = 1000 \text{ м}$ – длина канала, $H = 0,06 \text{ м}$ – глубина канала, $u_0^+ = 0,8 \text{ м/с}$, $u_0^- = 0,6 \text{ м/с}$ – постоянные скорости верхнего и нижнего слоев, $h_0 = 0,03 \text{ м}$ – глубина нижнего слоя на входе канала, $c_w = 0,004$, $c_i = 0$, то можно заметить, что по сравнению со структурой "аномальных" волн над препятствием для аналогичной системы [11] горизонтальный масштаб явления существенно увеличился. Заметим, что нестационарный численный расчет производился при помощи схемы С.К. Годунова, использованной ранее [11] для расчета "аномальных" режимов двухслойных течений над препятствием и их сравнения с экспериментальными данными.

Отметим, что переход от расслоенного к снарядному режиму течения свидетельствует о неустойчивости "промежуточных" катящихся волн во всем диапазоне амплитуд вплоть до максимальной. Впрочем, последнее утверждение нужно рассматривать как гипотезу. Только анализ устойчивости катящихся волн конечной амплитуды позволит определить области устойчивости и неустойчивости бегущих периодических волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00660) и Сибирского отделения РАН (2000 – I).

ЛИТЕРАТУРА

1. Dressler R.F. Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels // *Comm. Pure Appl. Math.* 1949. V. 2. № 2/3. P. 140–194.
2. Bendiksen K., Espedal M. Onset of slugging in horizontal gas-liquid pipe flow // *Intern. Multiphase Flow*. 1992. V. 18. № 2. P. 237–247.
3. Hunratty T.J. Interfacial instabilities caused by air flow over a thin liquid layer // *Waves on Fluid Interfaces* / Ed. R.F. Meyer. N.Y.: Acad. Press, 1983. P. 221–259.
4. Barnea D., Taitel Y. Interfacial and structure stability of separated flow // *Intern. Multiphase Flow*. 1994. V. 20. № 5. P. 387–414.
5. Kordyban E. Horizontal slug flow: a comparison of existing theories // *Trans. ASME. J. Fluids Engng.* 1990. V. 112. № 1. P. 74–83.
6. Boudlal A., Dymont A. Weakly nonlinear interfacial waves in a duct of arbitrary cross section // *Europ. J. Mech. Ser. B*. 1996. V. 15. № 3. P. 331–336.
7. Ляпидевский В.Ю. Устойчивость катящихся волн // *Докл. РАН*. 1998. Т. 363. № 1. С. 59–61.
8. Liapidevskii V. Yu. Stability of Roll Waves in an Inclined Channel // *Proc. of Intern. Symp. on Two-Phase Flow Modelling and Experimentation*. Pisa, 1999. P. 1275–1281.
9. Овсянников Л.В. Модели двухслойной "мелкой воды" // *ПМТФ*. 1979. № 2. С. 3–14.
10. Baines P.G. A unified description of two-layer flow over topography // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 146. P. 127–167.
11. Гаврилов Н.В., Ляпидевский В.Ю. Аномальные режимы течения двухслойной жидкости над препятствием // *ПМТФ*. 1996. Т. 37. № 4. С. 81–88.