УДК 531.36

© 2000 г. Н.Б. Григорьева

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЛИПСОИДОВ РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

На основе метода В.В. Румянцева [1] исследуется устойчивость эллипсоидов равновесия Римана в классе возмущений, удовлетворяющих предположениям Дирихле. Показано, что уравнения движения жидкого эллипсоида Дирихле являются гамильтоновыми на каждом совместном уровне интегралов момента и циркуляции, что соответствует известным результатам [2], хотя и не является их следствием. Этот факт дает, вообще говоря, дополнительные возможности для решения задачи определения области неустойчивости. В параметрическом пространстве каждого из двух семейств [3, 4] эллипсоидов Римана в явном аналитическом виде определяется область U, для которой почти все принадлежащие ей эллипсоиды равновесия неустойчивы. Показано, что область устойчивости в обоих случаях также может быть задана в явном аналитическом виде.

Ранее аналогичным образом была исследована устойчивость эллипсоидов Маклорена [1] и Якоби [5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим идеальную однородную несжимаемую жидкость, частицы которой притягиваются друг к другу по закону Ньютона. В функциональном пространстве система, описывающая ее динамику, переходит [1] при условии, что начальное возмущение удовлетворяет предположениям Дирихле об эллипсоидальности поверхности жидкости и однородно-вихревом характере поля ее скоростей, в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент завихренности ($2\omega_1(t)$, $2\omega_2(t)$, $2\omega_3(t)$), полуосей эллипсоида (a, b, c) и компонент угловой скорости (p, q, r) в подвижной системе отсчета.

Приведем здесь указанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в наиболее удобном для дальнейшего виде, получающемся из первоначального [1] с учетом условия постоянства объема жидкости, являющегося следствием уравнения несжимаемости: abc = const, где можем считать const = 1 без ограничения общности. Имеем

$$\frac{d}{dt}(A_1p+A_2\omega_1)+q(C_1r+C_2\omega_3)-r(B_1q+B_2\omega_2)=0 \tag{1.1}$$

$$(pqr,\ \omega_1\omega_2\omega_3,\ ABC)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_1}{a}\right)-\frac{2a}{a^2+b^2}r\omega_2+\frac{2a}{a^2+c^2}q\omega_3+\frac{2a(c^2-b^2)}{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}\omega_2\omega_3=0 \tag{1.2}$$

$$(123,\ abc,\ pqr)$$

$$\ddot{a}\left(a+\frac{1}{b^2a^3}\right)+\frac{\ddot{b}}{a^2b^3}-\frac{2\dot{a}\dot{b}}{a^3b^3}-\frac{2\dot{a}^2}{a^4b^2}-\frac{2\dot{b}^2}{b^4a^2}=(R-\tilde{\omega}_z)\frac{1}{a^2b^2}-(P-\tilde{\omega}_z)a^2 \tag{1.3}$$

$$\ddot{b}\left(b+\frac{1}{a^2b^3}\right)+\frac{\ddot{a}}{b^2a^3}-\frac{2\dot{a}\dot{b}}{a^3b^3}-\frac{2\dot{a}^2}{a^4b^2}-\frac{2\dot{b}^2}{b^4a^2}=(R-\tilde{\omega}_z)\frac{1}{a^2b^2}-(Q-\tilde{\omega}_y)b^2 \tag{1.4}$$

где

$$\tilde{\omega}_x = \frac{\ddot{a}}{a} - \omega_x = \frac{a^2 - c^2}{(a^2 + c^2)^2}(a^2 + 3c^2)q^2 + \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}(a^2 + 3b^2)r^2 - \frac{4(a^2 - c^2)c^2}{(a^2 + c^2)^2} q\omega_2 -$$

$$- \frac{4(a^2 - b^2)b^2}{(a^2 + b^2)^2} r\omega_3 + \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}\omega_3^2 + \frac{4a^2c^2}{(a^2 + c^2)^2}\omega_2^2 \qquad (1.5)$$

$(xyz, \quad abc, \quad pqr)$

$$A_1 = \frac{M}{5}\frac{(b^2 - c^2)^2}{b^2 + c^2}, \quad A_2 = \frac{4M}{5}\frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}(ABC, abc)$$

$$P = \frac{2}{a}\left[\frac{\partial}{\partial a}\hat{H}(a,b,c)\right](PQR, \ abc) \qquad (1.6)$$

$$\hat{H} = \frac{3M}{4}\int\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \quad \varphi(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)$$

M – масса жидкости.

Здесь и везде далее во всех формулах, кроме формул (1.6), (2.5) и (2.10), полагаем $c = 1/(ab)$; интегрирование проводится от нуля до бесконечности.

Уравнения (1.1) системы (1.1)–(1.4) вытекают, если учесть условия Дирихле и известный вид решения уравнения Лапласа, из уравнений Гельмгольца для вихря в подвижных осях; уравнения (1.2) – из теоремы о моменте количеств движения; уравнения (1.3), (1.4) – из гидродинамических уравнений Эйлера в подвижных осях [1].

Система (1.1)–(1.4) имеет три интеграла: энергии, момента количеств движения, постоянства интенсивности вихря [1]

$$\frac{1}{2}(A_1p^2 + B_1q^2 + C_1r^2 + A_2\omega_1^2 + B_2\omega_2^2 + C_2\omega_3^2) + W + \frac{M}{10}(\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2) = \text{const} \qquad (1.7)$$

$$(A_1p + A_2\omega_1)^2 + (B_1q + B_2\omega_2)^2 + (C_1r + C_2\omega_3)^2 = \text{const} \qquad (1.8)$$

$$(\omega_1 / a)^2 + (\omega_2 / b)^2 + (\omega_3 / c)^2 = \text{const} \qquad (1.9)$$

где

$$W = -\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4}M^2\int\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} \qquad (1.10)$$

Риман показал [3, 4], что эллипсоидальные конфигурации равновесия вращающейся жидкости (для движений с однородной деформацией) могут существовать и существуют лишь в случае, когда соответствующее поле скоростей частиц жидкости представляет собой суперпозицию твердотельного вращения и внутренних однородно-вихревых движений. Таким образом, каждый такой эллипсоид равновесия автоматически удовлетворяет предположениям Дирихле, и ему отвечает некоторое положение равновесия системы (1.1)–(1.4). С другой стороны, любое возмущение, удовлетворяющее предположениям Дирихле в начальный момент, будет удовлетворять им и в любой последующий момент времени (его динамика в этом случае определяется системой (1.1)–(1.4)).

Поэтому здесь естественным образом возникает вопрос об устойчивости эллипсоидов равновесия Римана в классе возмущений, удовлетворяющих предположениям Дирихле, которая, таким образом, эквивалентна устойчивости соответствующих положений равновесия системы (1.1)–(1.4) по Ляпунову.

Риман доказал [3], что множество всех положений равновесия системы (1.1)–(1.4) является объединением двух подмножеств ("семейств"): у эллипсоидов первого из них

векторы угловой скорости и завихренности внутренних движений лежат в одной из главных плоскостей эллипсоида, а у эллипсоидов второго семейства эти векторы коллинеарны и направлены вдоль одной из осей [3,4].

Аналитическое решение задачи устойчивости эллипсоидов равновесия Римана в классе возмущений, удовлетворяющих предположениям Дирихле, было получено лишь для некоторых частных случаев эллипсоидов из второго семейства. Основными результатами здесь являются результаты Римана и Ляпунова.

Риман исследовал устойчивость эллипсоидов, лежащих на некоторой кривой в двумерном многообразии эллипсоидов второго семейства, но в очень узком классе возмущений, удовлетворяющих, помимо предположений Дирихле, также требованиям о сохранении: 1) ориентаций векторов угловой скорости и завихренности и 2) значений интегралов (1.8) и (1.9).

Ляпунов дал решение задачи устойчивости для случаев эллипсоидов Маклорена и Якоби, представляющих собой частные случаи эллипсоидов Римана второго семейства [4]; все остальные эллипсоиды Римана Ляпуновым, по-видимому, не рассматривались.

Доказательства Ляпунова основывались на доказательствах достижения строгого минимума, у функционала измененной потенциальной энергии на рассматриваемом стационарном вращении. Заметим, однако, что задача устойчивости в классе возмущений, удовлетворяющих предположениям Дирихле, может быть решена и иначе, на основе второго метода Ляпунова, поскольку система (1.1)–(1.4) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений (с конечным числом степеней свободы).

Был представлен [1] соответствующий метод; очевидно, он может быть применен также к исследованию устойчивости любых эллипсоидов Римана.

В данной работе излагаются некоторые результаты, полученные на пути решения задачи устойчивости эллипсоидов Римана методом, представляющим собой развитие метода В.В. Румянцева [1].

Везде далее под устойчивостью эллипсоидов равновесия понимается их устойчивость в классе возмущений, удовлетворяющих предположениям Дирихле, т.е. их устойчивость как положений равновесия системы (1.1)–(1.4) по Ляпунову.

В разд. 3 дана общая схема используемого метода решения задачи. Область устойчивости S определяется на основе второго метода Ляпунова; при этом оказывается возможным задать ее в явном аналитическом виде как в параметрическом пространстве первого семейства эллипсоидов Римана (разд. 4), так и в параметрическом пространстве второго семейства (разд. 5).

Факт гамильтоновости системы (1.1)–(1.4) на любом совместном уровне интегралов момента (1.8) и циркуляции (1.9), доказательство которого изложено в разд. 2, позволяет использовать в данном случае некоторую общую схему аналитического определения в параметрическом пространстве положений равновесия семейства гамильтоновых систем области U, такой, что почти все принадлежащие ей положения равновесия неустойчивы (разд. 3). Соответствующие области U как для первого (разд. 4), так и для второго (разд. 5) семейства эллипсоидов Римана могут быть заданы, благодаря подходящему выбору координат в параметрических пространствах этих семейств, в явном аналитическом виде.

2. Структура уравнений системы (1.1)–(1.4). Было показано [2], что уравнения движения любой конечномерной механической системы с голономными связями и потенциальными силами могут быть представлены в гамильтоновом виде. Это же относится, как оказывается, и к системе (1.1)–(1.4); последнее обстоятельство соответствует известным результатам [2], хотя и не является непосредственно их следствием: изначально неочевидно, что система (1.1)–(1.4) может быть отождествлена с системой с голономными связями и потенциальными силами.

Покажем, что система (1.1)–(1.4) после диффеоморфизма

$$(a,b,\dot{a},\dot{b},p,q,r,\omega_1,\omega_2,\omega_3) \to \{z\} = \{a,b,p_a,p_b;G_1,G_2,G_3,l_1,l_2,l_3\} \tag{2.1}$$

задаваемого соотношениями

$$G_1 = \frac{M}{5}\frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2}p + \frac{4M}{5}\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\omega_1 \quad (123,\ abc,\ pqr)$$

$$l_1 = -\frac{2M}{5}bc\omega_1 \ (123,\ abc) \tag{2.2}$$

$$p_a = \frac{M}{5}\left(\dot{a}\left(1+\frac{1}{a^4b^2}\right)+\frac{\dot{b}}{a^3b^3}\right); \quad p_b = \frac{M}{5}\left(\dot{b}\left(1+\frac{1}{b^4a^2}\right)+\frac{\dot{a}}{a^3b^3}\right)$$

переходит в систему

$$\dot{z} = \{z, H\} \tag{2.3}$$

Здесь $H(z)$ – энергия (1.7) в координатах $\{z\}$ (2.1)

$$H = \mathcal{K} + \frac{5}{2M}\frac{[a^4b^4(p_a^2+p_b^2)+(ap_a-bp_b)^2]}{a^4b^4+a^2+b^2} \tag{2.4}$$

где

$$\mathcal{K}((a,b,c;)G_i,l_i) = \frac{5}{2M}\left[\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2}G_1^2 + \frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)^2}G_2^2 + \frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}G_3^2 + \frac{4bc}{(b^2-c^2)^2}G_1l_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{4ac}{(a^2-c^2)^2}G_2l_2 + \frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}G_3l_3 + \frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2}l_1^2 + \frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)^2}l_2^2 + \frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}l_3^2\right] + W \tag{2.5}$$

Переменная c в $\mathcal{K}$ (2.5) уже полагается (для удобства вычислений) независимой; $\{\ ,\ \}$ – скобка Пуассона на $C^\infty(Z)$, задаваемая следующим образом:

$$\{G_i, G_j\} = \varepsilon_{kji}G_k, \quad \{l_i, l_j\} = \varepsilon_{kji}l_k, \quad \{a, p_a\} = \{b, p_b\} = 1 \tag{2.6}$$

а скобки между всеми остальными парами фазовых переменных – нули.

Исходя из вида функции H (2.4) и учитывая определения (2.6) получаем, что уравнение (2.3), соответствующее переменной $z = G_1$, имеет вид

$$\dot{G}_1 = \frac{\partial H}{\partial G_2}(-G_3) + \frac{\partial H}{\partial G_3}G_2 = \frac{5}{M}\left[\frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}G_3 + \frac{2ab}{(a^2-b^2)^2}l_3\right]G_2 -$$

$$-\frac{5}{M}\left[\frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)^2}G_2 + \frac{2ac}{(a^2-c^2)^2}l_2\right]G_3$$

и в соответствии с соотношениями (2.2) переходит в исходных переменных в первое уравнение момента (1.1). Уравнение (2.3) для переменной $z = l_1$

$$\dot{l}_1 = \frac{5}{M}\left[\frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}l_3 + \frac{2ab}{(a^2-b^2)^2}G_3\right]l_2 - \frac{5}{M}\left[\frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)^2}l_2 + \frac{2ac}{(a^2-c^2)^2}G_2\right]l_3$$

в исходных переменных приобретает вид, тождественный первому уравнению Гельмгольца (1.2).

Уравнения (2.3) для полуосей a и b переходят в переменных $(a, b, \dot{a}, \dot{b}, p, q, r, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ в тождества $da/dt = \dot{a}$ и $db/dt = \dot{b}$, как это и должно быть.

Покажем теперь, что уравнение

$$dp_a/dt = -H_a$$

системы (2.3) оказывается в исходных переменных уравнением (1.3).

Дифференцируя функцию (2.4), получим это уравнение в развернутом виде:

$$\dot{p}_a = \left(-\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial a} + \frac{c}{a}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial c}\right)\Bigg|_{c=1/(ab)} + \frac{5}{2M}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{(ap_b + bp_a)^2}{a^4b^4 + a^2 + b^2}\right) \tag{2.7}$$

В исходных фазовых переменных имеем

$$\dot{p}_a = \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{5}\dot{a}\left(1 + \frac{1}{a^4b^2}\right) + \frac{M}{5}\frac{\dot{b}}{a^3b^3}\right) = -\frac{M}{5}\left(\frac{2\dot{a}^2}{a^5b^2} + \frac{\dot{b}^2}{a^3b^4} + \frac{3\dot{a}\dot{b}}{a^4b^3}\right) +$$

$$+\frac{M}{5}\left(\ddot{a}\left(1 + \frac{1}{a^4b^2}\right) + \frac{\ddot{b}}{a^3b^3} - \frac{2\dot{a}^2}{a^5b^2} - \frac{2\dot{b}^2}{a^3b^4} - \frac{2\dot{a}\dot{b}}{a^4b^3}\right) \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{(ap_b + bp_a)^2}{a^4b^4 + a^2 + b^2}\right) = -\frac{2M^2}{25}\left(\frac{2\dot{a}^2}{a^5b^2} + \frac{\dot{b}^2}{a^3b^4} + \frac{3\dot{a}\dot{b}}{a^4b^3}\right) \tag{2.9}$$

Наконец, дифференцируя функцию $\mathcal{K}$ (2.5) по a и c и учитывая соотношения (1.6), получим после преобразований

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial a} = \frac{M}{5}a(P - \tilde{\omega}_x) \quad \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial c} = \frac{M}{5}c(R - \tilde{\omega}_z) \tag{2.10}$$

где $\tilde{\omega}_x$ и $\tilde{\omega}_z$ – функции (1.5).

Подставляя теперь выражения (2.8)–(2.10) в уравнение (2.7), получаем уравнение (1.3).

Точно так же находим, что уравнения (2.3) для переменных $z = G_2$, G_3 переходят в исходных переменных в соответствующие уравнения (1.1); уравнение (2.3) для переменных $z = l_2$, l_3 – в два последних уравнения Гельмгольца (1.2), а уравнение (2.3) для p_b – в уравнение (1.4).

Таким образом, система (1.1)–(1.4), описывающая динамику жидкого эллипсоида Дирихле, оказывается (с точностью до диффеоморфизма (2.1)), совпадающей с системой гамильтонова вида (2.3).

При этом на любом совместном уровне

$$M = \left\{z : \sum_i G_i^2 = \sum G_{0i}^2,\ \sum l_i^2 = \sum l_{oi}^2,\ (i = 1,2,3)\right\}$$

интегралов (1.8), (1.9) система (1.1)–(1.4) представляет собой уже собственно гамильтонову систему, поскольку ограничение $\{\ ,\ \}'$ скобки $\{\ ,\ \}$ (2.6) на $C^\infty(M)$ не вырождено. Это следует непосредственно из вида (2.6) при учете того, что аннулятор скобки Пуассона, соответствующей обычному коммутатору в алгебре so (3) $\{m_1, m_2, m_3\}$, порождается как раз функцией $m_1^2 + m_2^2 + m_3^3$.

3. Общая схема определения областей устойчивости и неустойчивости. Пусть теперь z_0 – некоторый эллипсоид равновесия. Рассмотрим систему (1.1)–(1.4) на уровне

$$M_{z_0} = \left\{z : \sum G_i^2 = G_i^2(z_0),\ \sum l_i^2 = l_i^2(z_0)\right\}$$

$$M_{z_0} = M_{z_0}\{\tilde{z}\}, \quad (\tilde{z}) = (a, b, p_a, p_b; G_1, l_1, G_2, l_2)$$

Имеем

$$\dot{\tilde{z}} = \{\tilde{z}, h(\tilde{z}; (z_0))\}' \tag{3.1}$$

Здесь $h(\tilde{z}; (z_0))$ – ограничение функции (2.4) на уровень M_{z_0}, обозначение (z_0) указывает на параметрическую зависимость функции $h(\tilde{z}; (z_0))$ от координат точки z_0 в

пространстве рассматриваемого множества эллипсоидов равновесия. Скобка $\{\ ,\ \}'$ задается в координатах $\tilde{z}$ на M_{z_0}, при учете определений (2.6), соотношениями

$$\{a, p_a\}' = \{b, p_b\}' = 1$$

$$\{l_1, l_2\}' = -l_3(z_0)\left(1 + \frac{l_1^2(z_0) + l_2^2(z_0) - l_1^2 - l_2^2}{l_3^2(z_0)}\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

$$\{G_1, G_2\}' = -G_3(z_0)\left(1 + \frac{G_1^2(z_0) + G_2^2(z_0) - G_1^2 - G_2^2}{G_3^2(z_0)}\right)^{1/2}$$

а скобки между всеми остальными парами фазовых переменных ($\tilde{z}$) – нули.

Условие

$$h^{(2)}(\delta\tilde{z}; (z_0)) = d^2 h(\tilde{z}; (z_0))\,|_{\tilde{z}=\tilde{z}_0} > 0 \tag{3.3}$$

эквивалентное условию существования функции Ляпунова из интегралов (1.7)–(1.9) системы (1.1)–(1.4), является, очевидно, достаточным условием устойчивости рассматриваемого эллипсоида z_0.

При выполнении условия (3.3) соответствующей функцией Ляпунова будет, например, функция

$$V(z) = (H(z) - H(z_0))^2 + \left(\sum G_i^2 - G_i^2(z_0)\right)^2 + \left(\sum l_i^2 - l_i^2(z_0)\right)^2$$

Естественно, возникает вопрос о том, в какой мере условие (3.3) может являться также и необходимым условием устойчивости.

Условие (3.3) неявно задает в параметрическом пространстве рассматриваемых эллипсоидов область устойчивости S.

Факт гамильтоновости системы (3.1) позволяет, более того, задать в нем также и область U, такую, что почти все принадлежащие ей эллипсоиды неустойчивы.

Пусть $\{y(z_0)\}$ – канонические координаты, существующие всегда в силу теоремы Дарбу, в которых система (3.1), линеаризованная в окрестности точки z_0, имеет стандартный гамильтонов вид:

$$\dot{y} = \operatorname{sgrad}\,(K^{(2)}(y; (z_0))) \tag{3.4}$$

где

$$K^{(2)}(y; (z_0)) = h^{(2)}(\delta\tilde{z}; (z_0))\,|_{\{\delta\tilde{z}\}\to\{y\}}$$

Определим в параметрическом пространстве рассматриваемого семейства эллипсоидов равновесия область D как область, занимаемую теми эллипсоидами z_0, для которых ограничение соответствующей формы $K^{(2)}(y; (z_0))$ на какую-нибудь (любую) лагранжеву плоскость в симплектическом многообразии $\{y(z_0)\}$ положительно определено.

Тогда для любого эллипсоида $z_0 \in D$ общего положения условие (3.3) является критерием устойчивости.

Покажем необходимость. Пусть эллипсоид $z_0 \in D$ общего положения – устойчивое положение равновесия системы (1.1)–(1.4). Тогда все собственные значения матрицы формы $K^{(2)}(y; (z_0))$ чисто мнимы и различны. В этом случае, как известно, существует симплектическое преобразование $\{y\} \to \{p_i, q_i\}$, которым форма $K^{(2)}(y; (z_0))$ приводится к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i (p_i^2 + q_i^2), \quad \alpha_i \neq 0 \tag{3.5}$$

где p_i и q_i – соответствующие друг другу сопряженные фазовые переменные. Если в форме (3.5) хотя бы одно $\alpha < 0$, то в симплектическом многообразии $\{p_i; q_i\}$ не существует такой лагранжевой плоскости, сужение на которую функции (3.5) было бы положительно определено. Поэтому, исходя из сделанного предположения, получаем, при учете определения области D и того, что при симплектическом преобразовании лагранжева плоскость переходит в лагранжеву плоскость, что $\alpha_i > 0$ при всех i. Следовательно, устойчивость такого эллипсоида z_0 влечет положительную определенность формы $K^{(2)}(y; (z_0))$, а значит, и $h^{(2)}(\delta\tilde{z}; (z_0))$, что и требовалось показать.

Очевидно, что почти все эллипсоиды $z_0 \in U$, $U = D \setminus \bar{S}$, где D и S определены выше, неустойчивы.

Заметим также, что для принадлежности эллипсоида z_0 к определенной выше области D вовсе не требуется выполнения, параллельно с условием

$$K^{(2)}(y; (z_0))|_L > 0$$

где L – некоторая лагранжева плоскость, еще и условия, что форма $K^{(2)}(y; (z_0))$ должна "распадаться" на две, одна из которых есть $K^{(2)}(y; (z_0))\,|_L$.

Иными словами, отнюдь не обязательно, чтобы система (3.1) могла быть отождествлена с некоторой "натуральной".

Заметим, что приведенная выше схема рассуждений носит общий характер и может быть применена к решению задачи аналитического определения области неустойчивости в пространстве положений равновесия любого семейства гамильтоновых систем.

4. Об устойчивости эллипсоидов равновесия первого семейства эллипсоидов Римана. Риман показал [3], что эллипсоиды равновесия существуют только в двух случаях:

1) когда одна из трех пар (ω_1, p), (ω_2, q) и (ω_3, r) (или (G_i, l_i), $i = 1, 2, 3$) имеет обе нулевые компоненты: без ограничения общности – первая: $l_1 = G_1 = 0$,

2) когда нулевые компоненты имеют две из этих пар: $(l_1 = G_1 = 0,\ l_2 = G_2 = 0)$.

Рассмотрим первое из указанных семейств эллипсоидов равновесия $P^2_{(1)}$. Оно образовано эллипсоидами

$$z_0 = \{a = a_0, b = b_0, G_1 = l_1 = 0, G_2 = G_{20}, l_2 = l_{20}, G_3 = G_{30}, l_3 = l_{30}\}, \tag{4.1}$$

в задании которых шесть параметров связаны [3] четырьмя уравнениями равновесия.

В параметрическом пространстве семейства $P^2_{(1)}$ эллипсоидов (4.1) координатами выберем a_0, b_0 [3].

Заметим, что уравнениями равновесия здесь являются уравнения

$$\left.\frac{\partial h(\tilde{z};(z_0))}{\partial G_2}\right|_{\tilde{z}=\tilde{z}_0} = \frac{\partial h(\tilde{z};(z_0))}{\partial l_2}\Bigg|_{\tilde{z}=\tilde{z}_0} = \frac{\partial h(\tilde{z};(z_0))}{\partial a}\Bigg|_{\tilde{z}=\tilde{z}_0} = \left.\frac{\partial h(\tilde{z};(z_0))}{\partial b}\right|_{\tilde{z}=\tilde{z}_0} = 0 \tag{4.2}$$

$$h(\tilde{z};(z_0)) = H\Bigg|_{G_3 = G_{30}\left(1 + \frac{G_{20}^2 - G_2^2}{G_{30}^2}\right)^{1/2},\quad l_3 = l_{30}\left(1 + \frac{l_{20}^2 - l_2^2}{l_{30}^2}\right)^{1/2}}$$

Это сразу же следует из выводов, приведенных в разд. 2, и вида функции H (2.4). Первые два из уравнений (4.2) дают

$$\frac{a_0^2 + c_0^2}{(a_0^2 - c_0^2)^2} - \frac{a_0^2 + b_0^2}{(a_0^2 - b_0^2)^2} = \frac{2a_0b_0}{(a_0^2 - b_0^2)^2}\frac{l_{30}}{G_{30}} - \frac{2a_0c_0}{(a_0^2 - c_0^2)^2}\frac{l_{20}}{G_{20}} =$$

$$= \frac{2a_0b_0}{(a_0^2 - b_0^2)^2}\frac{G_{30}}{l_{30}} - \frac{2a_0c_0}{(a_0^2 - c_0^2)^2}\frac{G_{20}}{l_{20}} \tag{4.3}$$

что позволяет [3] из соответствующих квадратных уравнений явно определить зависимости $l_{30}/G_{30}(a_0, b_0)$ и $l_{20}/G_{20}(a_0, b_0)$; в уравнениях (4.3) и всюду далее $c_0 = 1/(a_0 b_0)$. Последние два уравнения (4.2) при учете уравнений (4.3) представляют собой систему двух линейных относительно G_{20}^2 и G_{30}^2 неоднородных уравнений, все коэффициенты которых – явные функции a_0, b_0.

Таким образом, уравнения равновесия, связывающие параметры, фигурирующие в задании эллипсоидов (4.1), таковы, что функции

$$\frac{l_{30}}{G_{30}}(a_0,b_0), \quad \frac{l_{20}}{G_{20}}(a_0,b_0), \quad G_{20}^2(a_0,b_0), G_{30}^2(a_0,b_0) \tag{4.4}$$

представляют собой явные аналитические функции известного вида. Все сказанное в разд. 3 об устойчивости эллипсоидов равновесия в общем виде относится, очевидно, и к семейству эллипсоидов (4.1). При этом, благодаря явному характеру функций (4.4), аналитическое задание областей S и U в параметрическом пространстве $P_{(1)}^2\{a_0,b_0\}$ не представляет, с вычислительной точки зрения, никаких затруднений.

Область S задается следующими двумя условиями:

$$m_{11}^{11} > 0, \quad m_{22}^{11} m_{11}^{11} - m_{12}^{11^2} > 0$$

где

$$m_{jj}^{11} = \frac{b_0^2 + c_0^2}{(b_0^2 - c_0^2)^2} - \frac{a_0^2 + b_0^2}{(a_0^2 - b_0^2)^2} - \frac{2^{2-j} a_0 b_0}{(a_0^2 - b_0^2)^2}\left(\frac{l_{30}}{G_{30}}\right)^{3-2j}, \quad j = 1,2$$

$$m_{12}^{11} = \frac{2 b_0 c_0}{(b_0^2 - c_0^2)^2} \tag{4.5}$$

и

$$d^2\left\{\frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)^2} G_2^2 + \frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}(G_{20}^2 + G_{30}^2 - G_2^2) + \frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)^2} l_2^2 + \right.$$

$$+ \frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}(l_{20}^2 + l_{30}^2 - l_2^2) + \frac{4ac}{(a^2-c^2)^2} G_2 l_2 + \frac{4ab}{(a^2-b^2)^2} G_{30} l_{30} \times$$

$$\left.\times\left(1 + \frac{G_{20}^2 - G_2^2}{G_{30}^2}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{l_{20}^2 - l_2^2}{l_{30}^2}\right)^{1/2}\right\}\Bigg|_{(a,b,G_2,l_2)=(a_0,b_0,G_{20},l_{20})} > 0 \tag{4.6}$$

Видно, что все коэффициенты квадратичной формы в левой части условия (4.6) являются функциями $a_0, b_0, l_{30}/G_{30}, l_{20}/G_{20}, G_{20}^2$ и G_{30}^2. Подставляя в выражения (4.5) и (4.6) явный вид зависимостей (4.4), получаем в явном аналитическом виде условия, задающие в $P_{(1)}^2\{a_0,b_0\}$ область S заведомо устойчивых эллипсоидов (4.1).

Определим теперь в $R_{(1)}^2\{a_0,b_0\}$ область D из разд. 3.

Каждая из систем (3.1), линеаризованная в окрестности "своего" положения равновесия z_0:

$$\delta\dot{\tilde{z}}_i = 2\omega(z_0)_{ij}(h^{(2)}(\delta\tilde{z};(z_0)))_{jk}\delta\tilde{z}_k$$

где $\|\omega(z_0)\|_{ij}$ – матрица скобки (3.2) в точке z_0 – приводится к виду (3.4) простой диа-

гональной заменой

$$\{\delta\tilde{z}\} \to \{y_{(z_0)}\} = \{y_1 = a,\ y_2 = p_a,\ y_3 = b, y_4 = p_b;$$

$$y_5 = \frac{\delta G_1}{\sqrt{|G_{30}|}},\ y_6 = \frac{\delta G_2}{\sqrt{|G_{30}|}},\ y_7 = \frac{\delta l_1}{\sqrt{|l_{30}|}},\ y_8 = \frac{\delta l_2}{\sqrt{|l_{30}|}}\Bigg\}$$

При учете полученного выражения для формы $K^{(2)}(y;\ (z_0))$ заключаем, что область D объединяет четыре области $D^{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2)$, задаваемые исходя из условия положительной определенности ограничения этой формы на лагранжевы плоскости в симплектическом многообразии $\{y\}$, соответствующие плоскостям $L^{\alpha\beta}(p_a, p_b, \delta G_\alpha, \delta l_\beta)$ в исходных координатах. Используя явный вид функции $h(\tilde{z};(z_0))$, определенной второй формулой (4.2), получаем, что эти условия эквивалентны условиям положительной определенности (2 × 2)-матриц $M^{\alpha\beta}$ следующего вида:

$$M^{11} = \| m_{ij}^{11} \|,\quad M^{12} = \| m_{ij}^{12} \|,\quad M^{21} = \| m_{ij}^{21} \|,\quad M^{22} = \| m_{ij}^{22} \|$$

где $m_{ij}^{11}(a_0, b_0)$ – функции из условия (4.5);

$$m_{11}^{12} = m_{11}^{11},\ m_{12}^{12} = m_{21}^{12} = 0$$

$$m_{22}^{12} = \frac{a_0^2 + c_0^2}{(a_0^2 - c_0^2)^2} - \frac{a_0^2 + b_0^2}{(a_0^2 - b_0^2)^2} + \frac{4a_0b_0}{(a_0^2 - b_0^2)^2}\frac{G_{30}}{l_{30}}\left(\frac{l_{20}^2}{l_{30}^2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$m_{11}^{21} = m_{22}^{12}\,|_{l_{30} \leftrightarrow G_{30}, l_{20} \leftrightarrow G_{20}},\quad m_{12}^{21} = m_{21}^{21} = 0,\quad m_{22}^{21} = m_{22}^{11} \tag{4.7}$$

$$m_{11}^{22} = m_{11}^{21},\quad m_{22}^{22} = m_{22}^{12}$$

$$m_{12}^{22} = m_{21}^{22} = \frac{2a_0c_0}{(a_0^2 - c_0^2)^2} + \frac{2a_0b_0}{(a_0^2 - b_0^2)^2}\frac{G_{20}l_{20}}{G_{30}l_{30}}$$

Видно, что $D^{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

Подставляя явные зависимости (4.4) в выражения (4.7) для элементов $m_{ij}^{\alpha\beta}$, получаем в явном аналитическом виде условия, задающие в параметрическом пространстве $P_{(1)}^2\{a_0, b_0\}$ области $D^{\alpha\beta}$:

$$m_{11}^{\alpha\beta}(a_0, b_0) > 0,\quad m_{11}^{\alpha\beta}(a_0, b_0) m_{22}^{\alpha\beta}(a_0, b_0) - (m_{12}^{\alpha\beta}(a_0, b_0))^2 > 0 \tag{4.8}$$

Неустойчивыми являются почти все эллипсоиды (4.1) $z_0 \in U$, где

$$U = \bigcup_{\alpha,\beta=1,2} D^{\alpha\beta} \setminus \bar{S},$$

причем области $D^{\alpha\beta}$ и S задаются условиями (4.8) и (4.5)–(4.6) соответственно.

Таким образом, при учете замечаний из разд. 3 и благодаря подходящему выбору координат в параметрическом пространстве $P_{(1)}^2$, оказывается возможным задать в $P_{(1)}^2$ области устойчивости и неустойчивости в явном аналитическом виде.

Устойчивость эллипсоидов первого семейства эллипсоидов равновесия Римана $P_{(1)}^2$ ранее в литературе аналитическими методами не исследовалась.

5. Об устойчивости эллипсоидов равновесия второго семейства эллипсоидов Римана. Рассмотрим теперь устойчивость эллипсоидов равновесия, относящихся ко второму из указанных в разд. 4 семейств эллипсоидов Римана [3]:

$$z_0 = \{a = a_0, b = b_0, \dot{a} = \dot{b} = 0, p = q = \omega_1 = \omega_2 = 0, r = \Omega, \omega_3 = f\Omega\} \tag{5.1}$$

или в переменных $\{z\}$ (2.1)

$$z_0 = \{a = a_0, b = b_0, p_a = p_b = 0, l_1 = l_2 = G_1 = G_2 = 0;$$

$$G_3 = \Omega(C_{10} + fC_{20})^{1/2},\ l_3 = -\frac{2M}{5} a_0 b_0 f\Omega\}$$

$$f > 1, a_0 > c_0 = 1/(a_0 b_0),\quad b_0 > c_0 = 1/(a_0 b_0)$$

Четыре параметра (a_0, b_0, f, Ω), фигурирующие в задании эллипсоидов (5.1), связаны [3, 4] двумя уравнениями

$$(1 + d_0^2)\Omega^2 = \frac{3M}{2}\int \frac{\lambda d\lambda}{\tilde{\varphi}_0(\lambda)\sqrt{\varphi_0(\lambda)}}$$

$$a_0 b_0 d_0 \Omega^2 = a_0^2 b_0^2 \frac{3M}{4}\int \frac{d\lambda}{\tilde{\varphi}_0(\lambda)\sqrt{\varphi_0(\lambda)}} - c_0^2 \frac{3M}{4}\int \frac{d\lambda}{(c_0^2 + \lambda)\sqrt{\varphi_0(\lambda)}} \tag{5.2}$$

$$d_0 = \frac{2a_0 b_0}{a_0^2 + b_0^2}(f - 1),\quad \tilde{\varphi}_0(\lambda) = (a_0^2 + \lambda)(b_0^2 + \lambda)$$

$$\varphi_0(\lambda) = (a_0^2 + \lambda)(b_0^2 + \lambda)\left(\lambda + \frac{1}{a_0^2 b_0^2}\right)$$

Множество $P^2_{(2)}$ стационарных вращений (5.1), как и множество $P^2_{(1)}$, двумерно. Координатами на нем выберем a_0, b_0 [3, 4].

Решения (5.1) системы (1.1)–(1.4) описывают стационарные вращения, при которых движение частиц жидкости является суперпозицией твердотельного вращения и внутренних однородно-вихревых движений. Векторы угловой скорости и завихренности внутренних движений направлены у эллипсоидов (5.1) вдоль наименьшей оси (c_0).

Предельными частными случаями эллипсоидов Римана (5.1) [3] являются эллипсоиды Якоби и Дедекинда. Серии эллипсоидов Якоби отвечает на двумерном многообразии эллипсоидов (5.1) кривая, задаваемая условием $f = 1$, а серию эллипсоидов Дедекинда образуют эллипсоиды (5.1) с $f = \infty$.

Рассмотрим теперь устойчивость по Ляпунову эллипсоидов Римана (5.1) как частных решений системы (1.1)–(1.4).

Пусть z_0 – эллипсоид (5.1) с полуосями a_0, b_0. Рассмотрим ограничение $\bar{h}(\tilde{z};(z_0))$ функции H (2.4) на тот совместный уровень интегралов момента (1.8) и циркуляции (1.9), которому этот эллипсоид принадлежит. Так же, как функция $h(\tilde{z};\ (z_0))$ из разд. 4, определенная второй формулой (4.2), функция $\bar{h}(\tilde{z};(z_0))$ параметрически зависит от (a_0, b_0), но эта зависимость здесь уже совершенно другая, поскольку константы интегралов (1.8) и (1.9) для случая эллипсоидов $z_0 \in P^2_{(2)}$ (5.1) выражаются через a_0, b_0 иначе, чем для случая эллипсоидов $z_0 \in P^2_{(1)}$ (4.1). Поэтому достаточное условие устойчивости эллипсоидов z_0 (5.1)

$$\bar{h}^{(2)}(\delta\tilde{z};(z_0)) = d^2(\bar{h}(\tilde{z};\ (z_0)))|_{\tilde{z}=\tilde{z}_0} > 0 \tag{5.3}$$

(см. разд. 3), представленное в явном виде в переменных a_0, b_0, не совпадает, очевидно, с соответствующим представлением условия (3.3).

Оно оказывается намного более простым, чем (3.3), и сводится, как это легко показать, к условию

$$d^2(F(a,b;(z_0)))|_{(a,b)=(a_0 b_0)} > 0 \tag{5.4}$$

где

$$F(a,b;(z_0)) = \bar{h}(\tilde{z};(z_0))\,|_{p_a=p_b=0,l_1=l_2=G_1=G_2=0} =$$

$$= W + \frac{1}{2}f^2\Omega^2\left(C_2\frac{a_0^2b_0^2}{a^2b^2}\right) + \frac{\Omega^2}{2C_1}\left[C_{10} + f\left(C_{20} - C_2\frac{a_0b_0}{ab}\right)\right]^2 \tag{5.5}$$

Этот вывод следует из того, что форма $\bar{h}^{(2)}(\delta\tilde{z};(z_0))$ представляет собой сумму

$$\bar{h}^{(2)}(\tilde{z};(z_0))d^2(\bar{h}(\tilde{z};(z_0))\,|_{a=a_0b=b_0})\,|_{(p_a,p_b,l_1,l_2,G_1,G_2)=(0,0,0,0,0,0)} +$$

$$+d^2(F(a,b;(z_0))\,|_{(a,b)=(a_0,b_0)} \tag{5.6}$$

причем первая форма в правой части равенства (5.6) положительно определена при всех $(a_0,b_0)\in P^2_{(2)}$, в чем можно убедиться непосредственно. Представим теперь условие устойчивости (5.4) для эллипсоидов z_0 (5.1) в явном аналитическом виде в переменных a_0, b_0.

Приведем матрицу квадратичной части функции F (5.5) к виду $\|s_{ij}\|$, где

$$s_{11} = W_{aa} + \frac{3M}{5}\Omega^2(1+d_0^2), \quad s_{22} = W_{bb} + \frac{3M}{5}\Omega^2(1+d_0^2)$$

$$s_{12} = s_{21} = W_{ab} + \frac{6M}{5}\Omega^2 d_0 \tag{5.7}$$

Здесь

$$W_{aa} = \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(W\left(a,b,\frac{1}{ab}\right)\right)\Bigg|_{(a,b)=(a_0,b_0)}$$

и т.д. Величина d_0 определена предпоследней формулой (5.2).

Далее, здесь уместно сделать некоторое отступление, касающееся устойчивости эллипсоидов Дедекинда

$$\left\{a=a_0, b=b_0, p=q=\omega_1=\omega_2=0, r=0, \omega_3=\frac{\Omega}{2}\left(\frac{a_0}{b_0}+\frac{b_0}{a_0}\right)\right\} \tag{5.8}$$

каждый из которых задается [3] параметрами (a_0, b_0, Ω) какого-либо эллипсоида Якоби, ("сопряженного" [3,4] по отношению к рассматриваемому эллипсоиду Дедекинда). Заметим, что матрица с элементами (5.7) для эллипсоида Дедекинда (5.8), в которой теперь следует пренебречь всеми слагаемыми с Ω, $d_0\Omega^2$ и заменить $d_0^2\Omega^2$ на Ω^2, переходит в ту же матрицу, в которую переходит матрица с элементами (5.7) для сопряженного к (5.8) эллипсоида Якоби, причем последняя совпадает с соответствующей матрицей, полученной ранее [5]. Положительная определенность каждой такой матрицы [5] доказывает поэтому не только устойчивость соответствующего эллипсоида Якоби, но и устойчивость "сопряженного" ему эллипсоида Дедекинда. Таким образом, эллипсоиды Дедекинда устойчивы всегда, когда определены.

Выражения для элементов s_{ij} (5.7) позволяют в явном аналитическом виде определить в пространстве параметров $P^2_{(2)}(a_0,b_0)$, задающих эллипсоиды (5.1), область тех из них, которым соответствуют заведомо устойчивые эллипсоиды (5.1). Действительно, принимая во внимание уравнения равновесия (5.2), получаем, что параметры d_0 и Ω могут быть исключены из выражений (5.7) для элементов s_{ij} всюду, где они фигурируют, так что эти элементы оказываются функциями только a_0, b_0 и прини-

мают вид

$$s_{11} = W_{aa} + 3\frac{2\cdot 3}{5\cdot 4}M^2\int\frac{\lambda d\lambda}{\tilde{\varphi}_0(\lambda)\sqrt{\varphi_0(\lambda)}}$$

$$s_{22} = W_{bb} + 3\frac{2\cdot 3}{5\cdot 4}M^2\int\frac{\lambda d\lambda}{\tilde{\varphi}_0(\lambda)\sqrt{\varphi_0(\lambda)}} \tag{5.9}$$

$$s_{12} = s_{21} = W_{ab} + 3\frac{2\cdot 3}{5\cdot 4}M^2\int\left[\frac{a_0 b_0}{\tilde{\varphi}_0(\lambda)\sqrt{\varphi_0(\lambda)}} - \frac{1}{[a_0 b_0 + \lambda(a_0^3 b_0^3)]\sqrt{\varphi_0(\lambda)}}\right]d\lambda$$

Элементарными вычислениями можно убедиться, что tr $\|s_{ij}\| > 0$ при всех a_0, b_0 (подынтегральное выражение для $s_{11} + s_{22}$ – дробь со знаменателем $a_0^2 b_0^2 \varphi^{5/2}$ и числителем – полиномом по λ, все коэффициенты которого положительны). Поэтому необходимым и достаточным условием положительной определенности матрицы с элементами (5.9) является условие

$$\Delta(a_0, b_0) = s_{11}(a_0, b_0)s_{22}(a_0, b_0) - s_{12}^2(a_0, b_0) > 0 \tag{5.10}$$

Иными словами, неравенство (5.10) представляет собой аналитическое представление условия (5.4) и определяет, таким образом, множество заведомо устойчивых эллипсоидов (5.1).

Рассмотрим теперь задачу определения области неустойчивости в параметрическом пространстве $P^2_{(2)}$ эллипсоидов (5.1). Условие положительной определенности первой квадратичной формы по переменным (p_a, p_b, l_1, l_2, G_1, G_2), записанной в правой части соотношения (5.6), означает что все эллипсоиды (5.1) автоматически попадают в область D из разд. 3. Отсюда, при учете изложенного в разд. 3 и того, что область устойчивости S задается в пространстве $P^2_{(2)}\{a_0, b_0\}$ условием (5.10), сразу следует, что условие, противоположное условию (5.10), задает в пространстве $P^2_{(2)}\{a_0, b_0\}$ область U, такую, что почти все принадлежащие ей эллипсоиды (5.1) – заведомо неустойчивы.

В действительности неустойчивы все эллипсоиды равновесия (5.1) из области, задаваемой условием, противоположным условию (5.10), причем этот вывод в данном случае может быть получен и без использования замечания из разд. 3.

Действительно, допустим, что какой-либо эллипсоид (5.1) с полуосями a_0, b_0 устойчив. Тогда он устойчив и как решение системы, получающейся из системы (1.1)–(1.4), если положить $l_1 = l_2 = G_1 = G_2 = 0$ (в исходных переменных $p = q = \omega_1 = \omega_2 = 0$), $\Sigma G_i^2 = \Sigma G_{i0}^2$, $\Sigma l_i^2 = \Sigma l_{i0}^2$, т.е. системы с фазовым пространством размерности 4 относительно $\{a, b, p_a, p_b\}$. Эта последняя система определена, поскольку, как это непосредственно следует из вида уравнений (1.1)–(1.4), множество $\{p = q = \omega_1 = \omega_2 = 0\}$, а, значит, и множество

$$N = \{z : l_1 = l_2 = G_1 = G_2 = 0;\ l_3 = l_{30};\ G_3 = G_{30}\},$$

является инвариантным для системы (1.1)–(1.4). Эта система с фазовым пространством N является гамильтоновой (разд. 2) при всех a_0, b_0, и более того, натуральной, поскольку гамильтониан в ней представляет собой сумму "потенциальной" энергии и "кинетической" – положительно определенной функции от импульсов p_a, p_b.

Поэтому здесь можно применить обращение теоремы Лагранжа. Остается заметить, что матрица квадратичной части функции, являющейся потенциальной энергией в системе на множестве N в точке (a_0, b_0, 0, 0) в точности совпадает с матрицей с элементами (5.9). Иными словами, любой невырожденный ($\Delta(a_0, b_0) \neq 0$) эллипсоид (5.1), параметры a_0 и b_0 которого не удовлетворяют условию (5.10), является неустойчивым

уже в классе возмущений, при которых ориентация векторов угловой скорости и завихренности остается неизменной и значения интегралов момента (1.8) и циркуляции (1.9) остаются теми же, что и для невозмущенного движения, т.е. для рассматриваемого эллипсоида равновесия, и тем более, он устойчив как решение исходной системы (1.1)–(1.4) по Ляпунову.

Таким образом, ответ на вопрос об устойчивости в отношении почти каждого эллипсоида (5.1), за исключением, быть может, эллипсоидов бифуркации, может быть получен аналитически.

Надо заметить, что вопросы, касающиеся эллипсоидальных фигур равновесия, интересовали не только классиков XIX в. Предложен, например, так называемый вириальный метод исследования гидродинамических уравнений [3], представляющий собой по существу метод моментов, где под устойчивостью понимается устойчивость в первом приближении данного стационарного вращения как решения вириальных уравнений первого, второго, третьего и т.д. порядков. Показано [3], что вириальные уравнения второго порядка эквивалентны системе (1.1)–(1.4). Поэтому, например, неустойчивые в первом приближении эллипсоиды Римана (5.1), (т.е. те, для которых $\Delta(a_0, b_0) < 0$, где Δ – функция из условия (5.10)), являются также неустойчивыми и по терминологии автора [3], называющего их "неустойчивыми по отношению ко вторым гармоникам"; при этом область неустойчивости определяется в [3] путем непосредственной линеаризации уравнений системы (1.1)–(1.4), что требует чрезвычайно громоздких выкладок.

Если же говорить об "устойчивых" эллипсоидах равновесия, то устойчивость в первом приближении в данном случае (все корни – чисто мнимые и имеется не менее двух нулевых) не гарантирует, естественно, устойчивости по Ляпунову, которую, таким образом, здесь необходимо доказать. А это может быть сделано только с помощью второго метода Ляпунова.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00785, 00-15-96150).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В.В.* Об устойчивости эллипсоидов Маклорена вращающейся жидкости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 494–504.
2. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре–Четаева // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 1. С. 51–53.
3. *Chandrasekhar S.* Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Haven; London: Yale Univ. Press, 1969. = = *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
4. *Appell P.* Traité de mécanique rationnelle. T. 4. Fasc. 1. Figures d'équilibre d'une masse liquide homogene en rotation. Paris: Gauthier–Villars. 1932. = *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.; М.: ОНТИ, 1936. 375 с.
5. *Григорьева Н.Б.* Об устойчивости эллипсоидов Якоби вращающейся жидкости // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 6. С. 1052–1054.

Москва

Поступила в редакцию
6.IV.2000