

УДК 531.36:534.1

© 2000 г. А.А. Майлыбаев, А.П. Сейранян

## О ГРАНИЦАХ ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Рассматривается задача устойчивости для системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, периодическими по времени и зависящими от параметров. Перечислены особенности общего положения, возникающие на границах областей устойчивости и неустойчивости (параметрического резонанса) в случае двух и трех параметров. Предлагается конструктивный подход, позволяющий в первом приближении определить область устойчивости в окрестности точки границы (регулярной или особой) по информации в этой точке. Данный подход позволяет избежать трудоемкого численного анализа области устойчивости в окрестности точки границы и может быть использован для построения границ областей параметрического резонанса. В качестве примера рассматривается задача устойчивости колебаний составной трубы, по которой течет жидкость с пульсирующей скоростью. В пространстве трех параметров (средняя скорость жидкости, амплитуда и частота пульсаций) найдена особенность границы области устойчивости типа "двугранный угол" и вычислен касательный конус к области устойчивости.

Центральным вопросом теории параметрического резонанса является построение областей устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров [1]. Известно, что граница области устойчивости на плоскости параметров может иметь особенности, например точки излома. При наличии в системе большего числа параметров следует ожидать возникновения более сложных особенностей, появление которых может отразиться на физических свойствах системы. Среди всех типов особенностей в первую очередь актуально изучить особенности общего положения (типичные особенности).

Несмотря на возможности современных вычислительных машин, численный многопараметрический анализ устойчивости периодических систем является сложной задачей в связи с необходимостью многократного интегрирования дифференциальных уравнений. Главным образом, это относится к системам с большим числом степеней свободы и анализу областей устойчивости вблизи особых точек границы.

Ниже дается классификация особенностей общего положения границ областей устойчивости для систем линейных дифференциальных уравнений общего вида с коэффициентами, периодическими по времени и зависящими от двух или трех параметров. Предлагается конструктивный подход, позволяющий в первом приближении определить область устойчивости в окрестности точки ее границы по информации в этой точке: значениям мультипликаторов, собственным и присоединенным векторам матрицы монодромии и первым производным оператора системы по параметрам. Предлагаемый подход использует общие формулы для производных матрицы монодромии по параметрам [2] и теорию возмущений собственных значений матриц [3, 4]. В отличие от ряда предшествующих исследований [1] предположение о близости периодической системы к стационарной не используется.

Особенности границ областей устойчивости стационарных систем изучались ранее [5–8].

**1. Матрица монодромии и ее производные.** Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\dot{x} = Gx \tag{1.1}$$

где  $x$  – действительный вектор размерности  $m$ , а  $G = G(t)$  – действительная матрица-

функция размерности  $m \times m$ , непрерывная по времени  $t$  и периодическая с минимальным периодом  $T$ ,  $G(t + T) = G(t)$ .

Пусть вектор-функции  $x_1(t), \dots, x_m(t)$  – решения системы уравнений (1.1), линейно независимые при некотором  $t = t_0$  (а следовательно, и при всех  $t \in R$ ). Матрица  $X(t)$ , составленная из векторов-столбцов  $x_1(t), \dots, x_m(t)$ , называется фундаментальной матрицей. Если дополнительно  $X(t)$  удовлетворяет начальному условию  $X(0) = I$ , где  $I$  – единичная матрица, то  $X(t)$  называется матрицантом [1]. Отметим, что фундаментальная матрица  $X(t)$  неособая при любых  $t \in R$ .

Если  $X(t)$  – матрицант системы уравнений (1.1), то матрица

$$F = X(T) \quad (1.2)$$

называется матрицей перехода, или матрицей монодромии [1]. Матрица монодромии  $F$  может быть получена  $m$ -кратным численным интегрированием системы уравнений (1.1) по периоду  $T$  с начальными условиями, являющимися столбцами единичной матрицы  $I$ .

Устойчивость системы (1.1) определяется следующими условиями, накладываемыми на собственные значения (мультипликаторы) матрицы монодромии  $F$  [1]: если все мультипликаторы лежат внутри единичного круга  $|\rho_j| < 1$  ( $j = 1, \dots, m$ ), то система (1.1) асимптотически устойчива; если хотя бы один мультипликатор лежит вне этого круга, то система (1.1) неустойчива.

Будем считать, что матрица  $G$  в (1.1) зависит не только от времени, но гладко зависит от вектора действительных параметров  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Наряду с системой (1.1) рассмотрим сопряженную систему [1]

$$\dot{y} = -G^T y \quad (1.3)$$

где  $y$  – действительный вектор размерности  $m$ . Уравнения для матрицантов систем (1.1) и (1.3) имеют вид [1]

$$\dot{X} = GX, \quad X(0) = I; \quad \dot{Y} = -G^T Y, \quad Y(0) = I \quad (1.4)$$

Матрицанты  $X(t)$  и  $Y(t)$  связаны соотношением  $X(t)^T Y(t) = I$  [1].

В терминах матрицантов  $X(t)$  и  $Y(t)$  были получены [2] явные выражения для производных матрицы монодромии  $F$  по параметрам. Первые и вторые производные имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_k} &= F \int_0^T Y^T \frac{\partial G}{\partial p_k} X dt \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} &= F \left[ \int_0^T Y^T \frac{\partial^2 G}{\partial p_i \partial p_j} X dt + \int_0^T Y^T \frac{\partial G}{\partial p_i} X \left( \int_0^\tau Y^T \frac{\partial G}{\partial p_j} X d\xi \right) d\tau + \int_0^T Y^T \frac{\partial G}{\partial p_j} X \left( \int_0^\tau Y^T \frac{\partial G}{\partial p_i} X d\xi \right) d\tau \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Приведем выражение для производной матрицы монодромии произвольного порядка. Для этого введем вектор  $h = (h^1, \dots, h^n)$  с неотрицательными целочисленными компонентами, не равными нулю одновременно, и используем обозначения  $|h| = h^1 + \dots + h^n$ ,  $h! = h^1! \dots h^n!$ . Тогда с помощью функций

$$B_h(t) = \frac{1}{h!} Y^T(t) \frac{\partial^{|h|} G}{\partial p_1^{h^1} \dots \partial p_n^{h^n}} X(t)$$

запишем выражение для производной порядка  $|h|$  в виде

$$\frac{\partial^{|h|} F}{\partial p_1^{h^1} \dots \partial p_n^{h^n}} = h! F_0 \sum_{\substack{h_1 + \dots + h_s = h \\ s=1, \dots, |h|}} \int_0^T B_{h_1}(t_1) \left( \int_0^{t_1} B_{h_2}(t_2) \left( \dots \int_0^{t_{s-1}} B_{h_s}(t_s) dt_s \dots \right) dt_2 \right) dt_1$$

Формулы для производных матрицы монодромии могут быть распространены на случай, когда период является гладкой функцией вектора параметров  $T = T(\mathbf{p})$ . Например, продифференцировав матрицу монодромии  $F(\mathbf{p}) = X(T(\mathbf{p}), \mathbf{p})$  по  $p_k$ , с использованием уравнений (1.4) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = \frac{\partial X(T(\mathbf{p}), \mathbf{p})}{\partial p_k} = \left( \frac{\partial X}{\partial p_k} \right)_T + \left( \frac{\partial X}{\partial t} \right)_T \frac{\partial T}{\partial p_k} = \left( \frac{\partial X}{\partial p_k} \right)_T + G(T)F \frac{\partial T}{\partial p_k}$$

Первое слагаемое правой части определяется первым выражением (1.5). В результате получим формулу для первой производной матрицы монодромии для случая, когда период зависит от параметров

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = F \int_0^T Y^T \frac{\partial G}{\partial p_k} X dt + G(T)F \frac{\partial T}{\partial p_k} \quad (1.6)$$

**2. Граница области параметрического резонанса и ее особенности.** Рассмотрим матрицу монодромии  $F(\mathbf{p})$  периодической системы (1.1). Матричная функция  $F(\mathbf{p})$  является гладкой (в математической литературе также используется термин "семейство матриц"). Условие асимптотической устойчивости делит пространство параметров  $R^n$  на области устойчивости и неустойчивости (параметрического резонанса). Переход из области устойчивости в область неустойчивости сопровождается выходом некоторых мультипликаторов из единичного круга. В частности, переход действительных мультипликаторов через точки 1 и -1 называется основным резонансом, а выход комплексно-сопряженной пары через единичную окружность в точках  $\exp(\pm i\omega)$  ( $\omega \neq \pi k$ ,  $k \in Z$ ) называется комбинационным резонансом.

В общем случае граница области устойчивости – гладкая гиперповерхность в пространстве параметров, имеющая особенности (точки, где теряется гладкость). При этом в первую очередь представляют интерес особенности общего положения (типичные особенности). Появление таких особенностей можно всегда ожидать при исследовании конкретных систем. Что касается особенностей необщего положения, то они являются следствием некоторой вырожденности или симметрии системы и пропадают при сколь угодно малом шевелении семейства [5]. Ниже будут исследоваться особенности общего положения границы области параметрического резонанса, как наиболее важные с точки зрения приложений, хотя развиваемые методы применимы и для изучения особенностей необщего положения.

Будем обозначать [5] типы граничных точек произведением мультипликаторов, находящихся на единичной окружности, со степенями, равными размерам соответствующих жордановых клеток. Например,  $1^2 \exp(\pm i\omega_1) \exp(\pm i\omega_2)$  означает наличие у матрицы монодромии  $F$  двукратного  $\rho = 1$  с жордановой клеткой второго порядка и двух пар простых мультипликаторов  $\rho = \exp(\pm i\omega_1)$ ,  $\exp(\pm i\omega_2)$ , таких, что  $\omega_1, \omega_2 \in (0, \pi)$ ,  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Для удобства введем краткие обозначения некоторых типов

$$B_1(1), \quad B_2(-1), \quad B_3(\exp(\pm i\omega)) \quad (2.1)$$

$$C_1(1^2), \quad C_2((-1)^2) \quad (2.2)$$

$$D_1(1^3), \quad D_2((-1)^3), \quad D_3((\exp(\pm i\omega))^2) \quad (2.3)$$

а также их комбинаций

$$B_{12}(1(-1)), \quad B_{13}(1\exp(\pm i\omega)), \quad B_{23}((-1)\exp(\pm i\omega)), \quad B_{33}(\exp(\pm i\omega_1)\exp(\pm i\omega_2)) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
& B_{123}(1(-1)\exp(\pm i\omega)) \\
& B_{133}(1\exp(\pm i\omega_1)\exp(\pm i\omega_2)), \quad B_{233}((-1)\exp(\pm i\omega_1)\exp(\pm i\omega_2)) \\
& B_{333}(\exp(\pm i\omega_1)\exp(\pm i\omega_2)\exp(\pm i\omega_3)), \quad C_1 B_2(1^2(-1)) \\
& C_2 B_1((-1)^2 1), \quad C_1 B_3(1^2 \exp(\pm i\omega)), \quad C_2 B_3((-1)^2 \exp(\pm i\omega))
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Например,  $B_1(1^2)$  означает наличие двукратного мультипликатора  $\rho = 1$  с жордановой клеткой второго порядка, а комбинация  $C_1 B_3$  в точке границы означает наличие на единичной окружности двукратного мультипликатора  $\rho = 1$  и комплексно-сопряженной пары  $\rho = \exp(\pm i\omega)$ .

Для дальнейшего исследования воспользуемся результатами [5, 9], позволяющими определить коразмерность множества граничных точек определенного типа. Коразмерность — это разность размерности всего пространства и размерности данного множества. Очевидно, в  $n$ -параметрическом семействе встречаются лишь типы граничных точек коразмерности не выше  $n$ . Ниже будем рассматривать случаи  $n = 1, 2, 3$ . Из полученных ранее результатов [5, 9] следует, что в случае общего положения все типы граничных точек коразмерности 1 исчерпываются списком (2.1), коразмерности 2 — (2.2), (2.4), а коразмерности 3 — (2.3), (2.5).

Качественный анализ области устойчивости в окрестности точки ее границы проводится при помощи теории версальных деформаций [5, 9]. Не углубляясь в подробности этой теории, перейдем непосредственно к ее следствию в отношении граничных точек типа (2.1)–(2.5) (подробности см. в [5, 10], где изучались автономные системы). Область устойчивости в окрестности граничных точек (2.1)–(2.3) с точностью до гладкой замены координат эквивалентна области устойчивости матрицы  $F'(p')$ ,  $p' = (p'_1, \dots, p'_d)$  в окрестности  $p' = 0$ , имеющей в каждом конкретном случае вид

$$B_1 : (1 + p'_1), \quad B_2 : (-1 + p'_1), \quad B_3 : (\exp(p'_1 + i\omega))$$

$$\begin{aligned}
C_1 : & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p'_2 & 1 + p'_1 \end{vmatrix}, \quad C_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ p'_2 & -1 + p'_1 \end{vmatrix} \\
D_1 : & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ p'_3 & p'_2 & 1 + p'_1 \end{vmatrix}, \quad D_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ p'_3 & p'_2 & -1 + p'_1 \end{vmatrix} \\
D_3 : & \begin{vmatrix} \exp(p'_1 + i\omega) & 1 \\ p'_2 + ip'_3 & \exp(p'_1 + i\omega) \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Перечисленные в (2.6) матрицы являются отвечающими за устойчивость блоками миниверсальных деформаций (нормальных форм), приведенных ранее [5, 9]. Соответствующие матрицы для комбинированных типов (2.4), (2.5) имеют блочно-диагональный вид и составлены из блоков (2.6), причем параметры в различных блоках считаются независимыми. Например, матрица  $F'(p')$ , отвечающая граничной точке типа  $C_1 B_3$  (комбинации  $C_1$  и  $B_3$ ), имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ p'_2 & 1 + p'_1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(p'_3 + i\omega) \end{vmatrix}$$

Исследование устойчивости матриц  $F'(p')$  для случаев (2.1)–(2.5) является несложным (хотя и довольно громоздким). В результате локально определяется форма

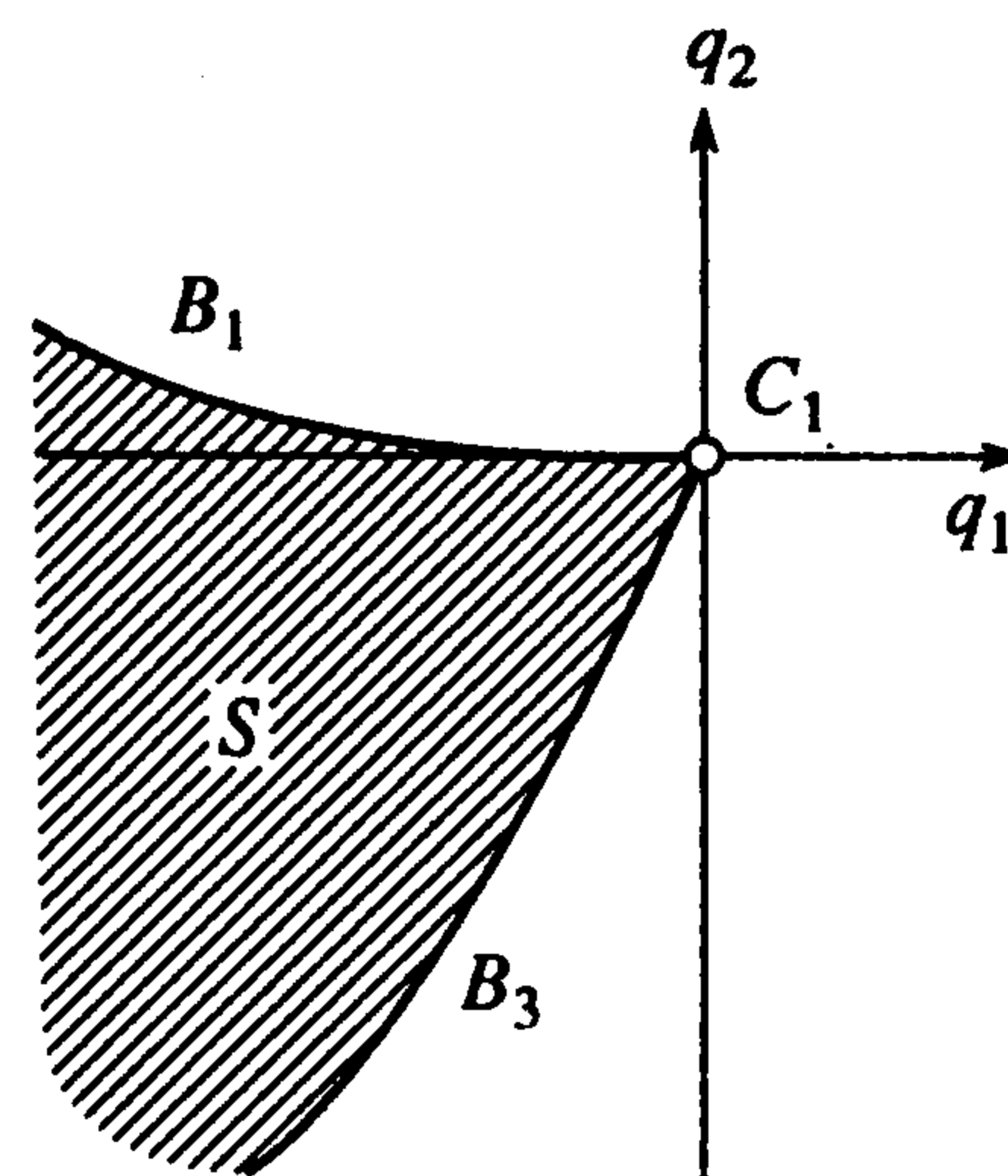
области устойчивости (с точностью до гладкой замены параметров), а также тип и форма примыкающей границы.

Для примера рассмотрим случай  $C_1$ . Корни характеристического уравнения матрицы  $F'(p')$  (2.6) имеют вид

$$\rho = 1 + p'_1/2 \pm \sqrt{p'_2 + (p'_1)^2/4}$$

Введя невырожденную замену параметров  $q_1 = p'_1/2$ ,  $q_2 = p'_2 + (p'_1)^2/4$ , получим выражение для максимального по абсолютной величине мультипликатора

$$\max |\rho|^2 = \begin{cases} 1 + 2q_1 + q_1^2 - q_2, & q_2 < 0 \\ (1 + q_1 + \sqrt{q_2})^2, & q_2 \geq 0 \end{cases}$$



Фиг. 1

Область устойчивости, определенная условием  $\max |\rho| < 1$ , изображена на фиг. 1. Граница области устойчивости (ГОУ) имеет в точке  $C_1$  излом и состоит из пересекающихся под ненулевым углом кривых типа  $B_1$  и  $B_3$ , отвечающих границам основного и комбинационного резонансов.

Другие типы граничных точек исследуются аналогично. Полученные результаты подытожим в виде теоремы.

**Теорема 1.** В случае общего положения ГОУ системы (1.1) состоит:

а) в случае одного параметра – из изолированных точек типа  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  (2.1), отвечающих основным и комбинационному резонансам;

б) в случае двух параметров – из гладких кривых типа (2.1), пересекающихся трансверсально (под ненулевым углом) в точках излома типа (2.2), (2.4);

в) в случае трех параметров – из гладких поверхностей типа (2.1), особенности которых составляют кривые типа (2.2), (2.4) – "двугранный угол" и изолированные точки типа (2.3)  $D_1$ ,  $D_2$  – "излом ребра",  $D_3$  – "тупик на ребре" и (2.5) – "трехгранный угол".

Области устойчивости в окрестности особых точек перечисленных типов с точностью до невырожденной гладкой замены параметров (диффеоморфизма) имеют вид, представленный на фиг. 2, 3 (область устойчивости обозначена буквой  $S$ ).

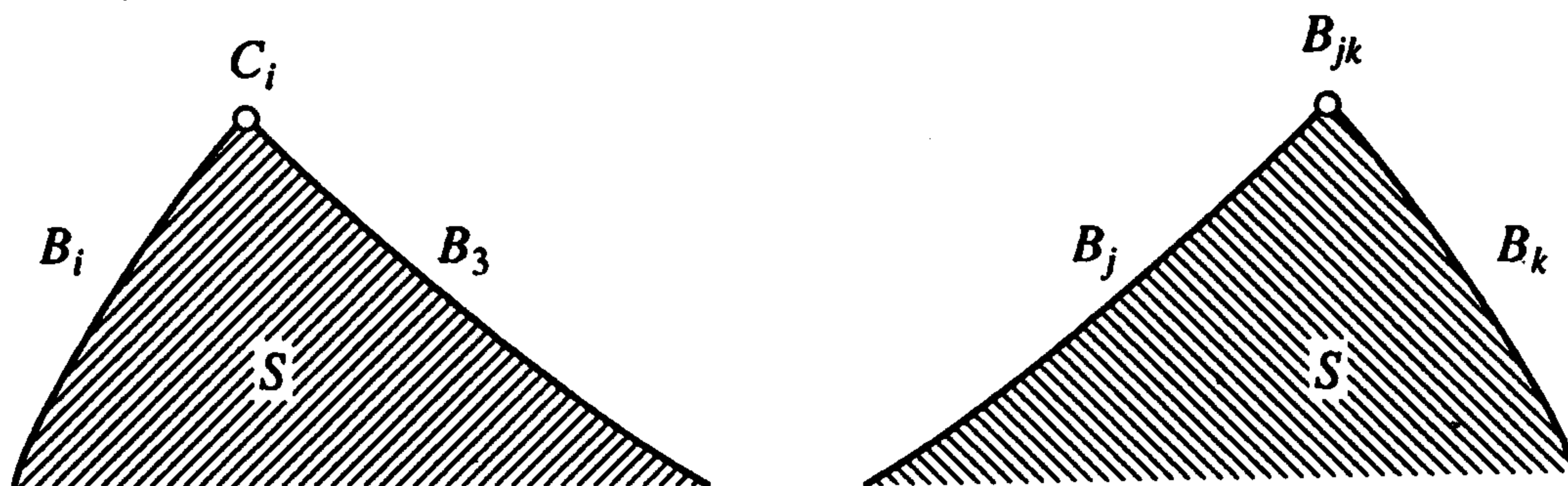
**Замечание 1.** ГОУ в случае  $D_3$  диффеоморфна поверхности, заданной уравнением  $xy^2 = z^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  и являющейся частью так называемого "зонтика Уитни–Кэли" [5]. В случаях  $D_1$  и  $D_2$  ГОУ диффеоморфна поверхности  $x^2y^2 = z^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

**Замечание 2.** Особенности ГОУ в случае общего положения для периодических систем (1.1), зависящих от двух или трех параметров, эквивалентны с точностью до диффеоморфизма особенностям для автономных систем, перечисленным ранее [5], несмотря на различие критериев устойчивости и типов граничных точек. Однако отметим, что типы особенностей  $B_{12}$ ,  $B_{123}$ ,  $C_1B_2$ ,  $C_2B_1$  для периодических систем являются существенно новыми по сравнению с автономными системами. Дело в том, что с использованием теоремы Ляпунова о приводимости [1] система (1.1) сводится к системе с постоянными коэффициентами. При этом оба мультипликатора  $\rho = 1$  и  $\rho = -1$  переходят в нулевое собственное значение матрицы автономной системы, образуя две жордановы клетки, что является случаем необщего положения для автономных систем.

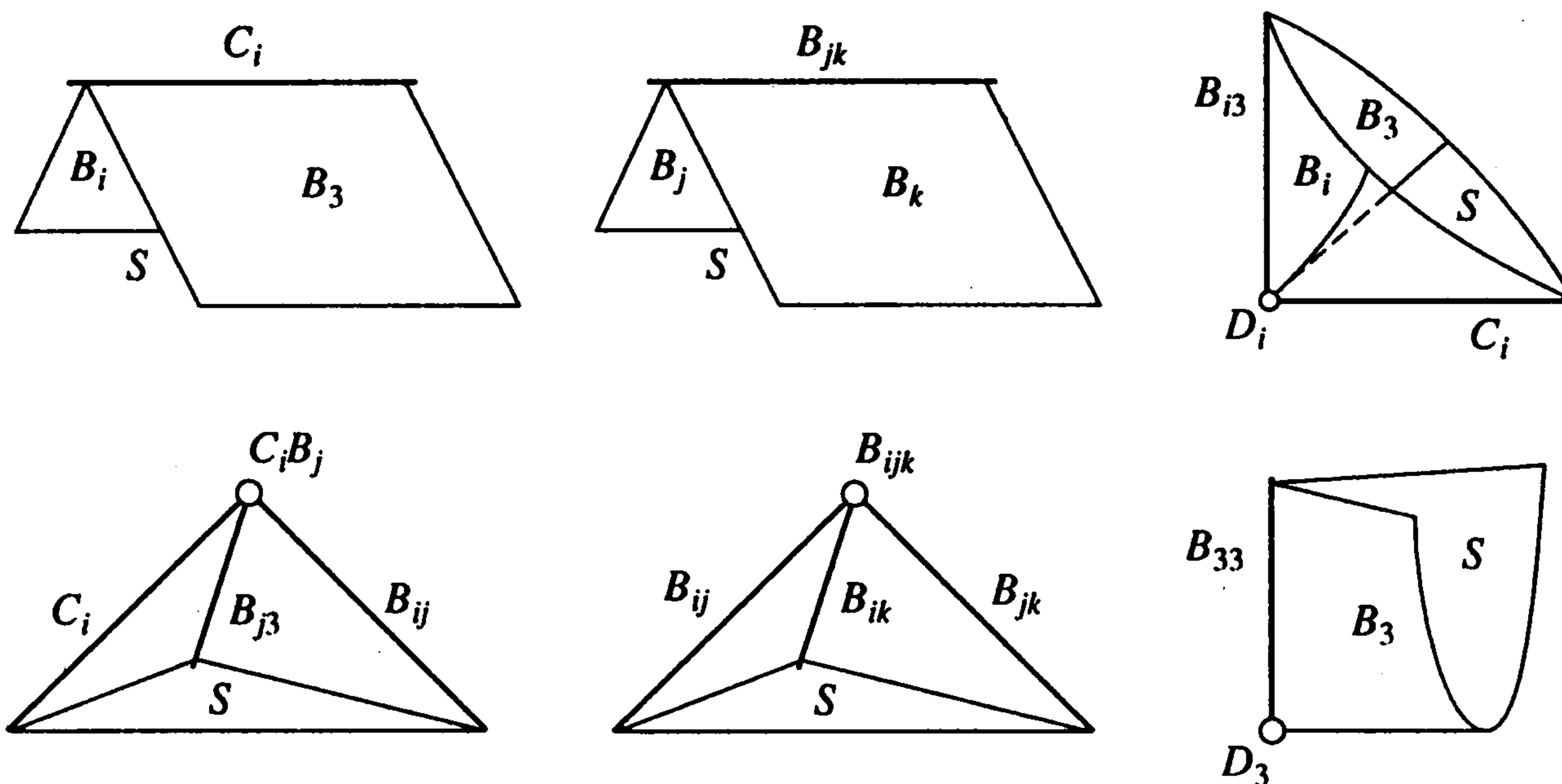
**3. Бифуркации мультипликаторов.** Рассмотрим задачу на собственные значения для матрицы монодромии (1.2)

$$Fu = \rho u \quad (3.1)$$

где  $u$  – собственный вектор размерности  $m$ , отвечающий мультипликатору  $\rho$ . Представляет интерес изменение мультипликаторов в зависимости от изменения параметров  $p_1, \dots, p_n$ . С этой целью в пространстве параметров рассмотрим гладкие одно-



Фиг. 2



Фиг. 3

параметрические кривые  $\mathbf{p}(\epsilon)$ , проходящие через точку  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ , где  $\epsilon$  — малый параметр. Определим векторы

$$\mathbf{e} = (d\mathbf{p}/d\epsilon)_{\epsilon=0}, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2}(d^2\mathbf{p}/d\epsilon^2)_{\epsilon=0}$$

Тогда приращение вектора параметров можно представить в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \epsilon\mathbf{e} + \epsilon^2\mathbf{d} + o(\epsilon^2)$$

В результате возмущения вектора  $\mathbf{p}_0$  матрица монодромии  $\mathbf{F}$  получит приращение, которое представим в виде ряда

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}_0 + \epsilon\mathbf{F}_1 + \epsilon^2(\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_d) + \dots \quad (3.2)$$

Матрицы  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) и  $\mathbf{F}_d$  определяются соотношениями

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0), \quad \mathbf{F}_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_j} e_j, \quad \mathbf{F}_2 = \frac{1}{2} \sum_{s,k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p_s \partial p_k} e_s e_k, \quad \mathbf{F}_d = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_j} d_j \quad (3.3)$$

Производные вычисляются при  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ .

Пусть  $\rho_0$  — мультипликатор матрицы  $\mathbf{F}_0$ . В результате возмущения вектора параметров  $\mathbf{p}_0$  мультипликатор  $\rho_0$  получит приращение. Согласно теории возмущений несамосопряженных операторов [3, 4], это приращение имеет различные представления в зависимости от жордановой структуры матрицы  $\mathbf{F}_0$ .

1<sup>0</sup>. В случае простого собственного значения  $\rho_0$  приращение мультипликатора представляется в виде разложения по целым степеням  $\epsilon$

$$\rho = \rho_0 + \epsilon\rho_1 + \epsilon^2\rho_2 + \dots \quad (3.4)$$

где первая поправка равна

$$\rho_1 = \mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_0 / \mathbf{v}_0^T \mathbf{u}_0 \quad (3.5)$$

Векторы  $\mathbf{u}_0$  и  $\mathbf{v}_0$  являются правым и левым собственными векторами, отвечающими мультипликатору  $\rho_0$

$$\mathbf{F}_0 \mathbf{u}_0 = \rho_0 \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_0 = \rho_0 \mathbf{v}_0^T \quad (3.6)$$

Вводя действительные векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{k}$  размерности  $n$  с компонентами

$$r^s + ik^s = \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_s} \mathbf{u}_0 / \mathbf{v}_0^T \mathbf{u}_0, \quad s = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

где  $i$  – мнимая единица, запишем разложение (3.4) при учете соотношений (3.5), (3.7) в виде [4, 6]

$$\rho = \rho_0 + [(\mathbf{r}, \mathbf{e}) + i(\mathbf{k}, \mathbf{e})]\varepsilon + o(\varepsilon) \quad (3.8)$$

Скобками обозначено скалярное произведение в  $R^n$ . Если  $\rho_0$  – действительное число, то из (3.7) следует  $\mathbf{k} = 0$ .

2<sup>0</sup>. Рассмотрим случай двукратного мультипликатора  $\rho_0$  с жордановой клеткой второго порядка. Это означает, что при  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$  мультипликатору  $\rho_0$  отвечают собственный и присоединенный векторы  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$ , определяемые из уравнений

$$\mathbf{F}_0 \mathbf{u}_0 = \rho_0 \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{F}_0 \mathbf{u}_1 = \rho_0 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0 \quad (3.9)$$

Для левых собственного и присоединенного векторов соответственно имеем

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_0 = \rho_0 \mathbf{v}_0^T, \quad \mathbf{v}_1^T \mathbf{F}_0 = \rho_0 \mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_0^T \quad (3.10)$$

Считая векторы  $\mathbf{u}_0$  и  $\mathbf{u}_1$  фиксированными, введем нормировку

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{v}_1^T \mathbf{u}_1 = 0 \quad (3.11)$$

однозначно определяющую векторы  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ .

Вследствие возмущения вектора параметров приращение мультипликатора представляется в виде ряда [3]

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon^{1/2} \rho_1 + \varepsilon \rho_2 + \varepsilon^{3/2} \rho_3 + \dots \quad (3.12)$$

Первые поправки  $\rho_1$  и  $\rho_2$  имеют вид [4, 6]

$$\rho_1 = \pm \sqrt{\mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_0}, \quad \rho_2 = (\mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_0) / 2 \quad (3.13)$$

Введем действительные векторы  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  с компонентами, определяемыми соотношениями

$$f_1^s + if_2^s = \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_s} \mathbf{u}_0 \quad (3.14)$$

$$q_1^s + iq_2^s = \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_s} \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_s} \mathbf{u}_0, \quad s = 1, \dots, n$$

При учете соотношений (3.13), (3.14) разложение (3.12) запишем в виде

$$\rho = \rho_0 \pm \sqrt{\varepsilon[(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}) + i(\mathbf{f}_2, \mathbf{e})]} + \varepsilon[(\mathbf{q}_1, \mathbf{e}) + i(\mathbf{q}_2, \mathbf{e})] / 2 + o(\varepsilon) \quad (3.15)$$

Соотношение (3.15) описывает расщепление двукратного мультипликатора  $\rho_0$  с одним собственным вектором  $\mathbf{u}_0$  в невырожденном случае

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_0 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}) + i(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}) \neq 0$$

Если  $\rho_0$  – действительное число, то  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{q}_2 = 0$ .

3<sup>0</sup>. Рассмотрим случай трехкратного действительного мультипликатора  $\rho_0$ , отвечающего жордановой клетке третьего порядка. Цепочки Жордана для правых и левых собственных и присоединенных векторов имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 \mathbf{u}_0 &= \rho_0 \mathbf{u}_0, & \mathbf{F}_0 \mathbf{u}_1 &= \rho_0 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0, & \mathbf{F}_0 \mathbf{u}_2 &= \rho_0 \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_0 &= \rho_0 \mathbf{v}_0^T, & \mathbf{v}_1^T \mathbf{F}_0 &= \rho_0 \mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_0^T, & \mathbf{v}_2^T \mathbf{F}_0 &= \rho_0 \mathbf{v}_2^T + \mathbf{v}_1^T \end{aligned} \quad (3.16)$$

Считая векторы  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  фиксированными, наложим на  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  условия нормировки

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{u}_2 = 1, \quad \mathbf{v}_1^T \mathbf{u}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_2^T \mathbf{u}_2 = 0 \quad (3.17)$$

однозначно определяющие эти векторы. Ввиду того, что  $\rho_0$  – действительное число, векторы  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$  можно выбрать действительными.

Вариация вектора параметров  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \varepsilon \mathbf{e} + \varepsilon^2 \mathbf{d} + o(\varepsilon^2)$  приводит в общем случае к расщеплению трехкратного мультипликатора на три простых комплексных мультипликатора. Эта бифуркация описывается соотношением [3]

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon^{1/3} \rho_1 + \varepsilon^{2/3} \rho_2 + \varepsilon \rho_3 + \dots \quad (3.18)$$

где  $\rho_1 = (\mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_0)^{1/3}$  три комплексных значения корня отвечают трем различным  $\rho$ . Введем вектор  $\mathbf{g}$  с компонентами

$$g^s = \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_s} \mathbf{u}_0, \quad s = 1, \dots, n \quad (3.19)$$

Тогда бифуркация (3.18) примет вид

$$\rho = \rho_0 + (\varepsilon(\mathbf{g}, \mathbf{e}))^{1/3} + o(\varepsilon^{1/3}) \quad (3.20)$$

Рассмотрим теперь вырожденный случай

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_0 = (\mathbf{g}, \mathbf{e}) = 0$$

Трехкратный мультипликатор  $\rho_0$  в этом случае по-прежнему распадается на три простых, однако при этом два мультипликатора разлагаются по степеням  $\varepsilon^{1/2}$

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon^{1/2} \nu_1 + \varepsilon \nu_2 + \dots \quad (3.21)$$

а третий мультипликатор разлагается по  $\varepsilon$  [3]

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \dots \quad (3.22)$$

Используя разложения (3.21), (3.22), из уравнений метода возмущений найдем выражения для первых поправок

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_0 (\mathbf{F}_1 \mathbf{u}_0) - \mathbf{v}_0^T (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_d) \mathbf{u}_0}{\mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_0} \\ \nu_1^2 &= \mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_0 \\ \nu_2 &= [-\mu_1 + \mathbf{v}_0^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_1^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathbf{F}_1 \mathbf{u}_0] / 2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

где  $G_0$  – оператор, обратный к  $F_0 - \rho_0 I$  ( $I$  – единичная матрица). Так как матрица  $F_0 - \rho_0 I$  вырождена, то оператор  $G_0$  определен на множестве векторов  $w$ , удовлетворяющих условию ортогональности  $v_0^T w = 0$ . Значение  $G_0(w)$  определено с точностью до аддитивного члена  $\gamma u_0$ ,  $\gamma = \text{const}$ , от которого значение  $\mu_1$  не зависит, поскольку  $v_0^T F_1 u_0 = 0$ . Оператор  $G_0(w)$  можно представить в виде  $G_0(w) = A_0^{-1} w + \gamma u_0$ , где  $A_0 = F_0 - \rho_0 I - v_0 v_2^T$  – невырожденная матрица [1].

Введем действительные векторы  $h, t$  размерности  $n$  с компонентами

$$h^s = v_0^T \frac{\partial F}{\partial p_s} u_1 + v_1^T \frac{\partial F}{\partial p_s} u_0 \quad (3.24)$$

$$t^s = v_0^T \frac{\partial F}{\partial p_s} u_2 + v_1^T \frac{\partial F}{\partial p_s} u_1 + v_2^T \frac{\partial F}{\partial p_s} u_0, \quad s = 1, \dots, n$$

и действительную матрицу  $R$  размерности  $n \times n$ , определенную соотношением

$$(Re, e) = v_0^T F_1 G_0(F_1 u_0) - v_0^T F_2 u_0$$

$$R = \left[ v_0^T \frac{\partial F}{\partial p_i} [F_0 - \rho_0 I - v_0 v_2^T]^{-1} \frac{\partial F}{\partial p_j} u_0 - v_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} u_0 \right], \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

С использованием соотношений (3.23)–(3.25) бифуркацию (3.21), (3.22) представим в виде

$$\rho = \rho_0 \pm \sqrt{\varepsilon(h, e)} + \left[ (t, e) - \frac{(Re, e) - (g, d)}{(h, e)} \right] \frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon)$$

$$\rho = \rho_0 + \frac{(Re, e) - (g, d)}{(h, e)} \varepsilon + o(\varepsilon) \quad (3.26)$$

Вектор  $g$  определен в (3.19).

Выражение (3.26) описывает бифуркацию трехкратного мультипликатора  $\rho_0$  в вырожденном случае  $(g, e) = 0$  при условии  $(h, e) \neq 0$ . Заметим, что в отличие от предыдущих случаев бифуркация (3.26) содержит вектор  $d$ .

**4. Локальный анализ области устойчивости в особых точках ее границы.** Пусть  $p = p_0$  – точка границы области параметрического резонанса. Выпустим гладкую кривую  $p = p(\varepsilon)$  из этой точки ( $p_0 = p(0)$ ,  $\varepsilon \geq 0$ ). Некоторые кривые при этом будут лежать (при малых  $\varepsilon > 0$ ) в области устойчивости, а некоторые – в области неустойчивости. Выделим направления кривых  $e = dp/d\varepsilon$  (производная берется при  $\varepsilon = 0$ ), лежащих в области устойчивости. Множество таких направлений образует касательный конус к области устойчивости в точке ее границы  $p = p_0$  [10].

Исследование устойчивости вдоль кривой  $p = p(\varepsilon)$  является однопараметрической задачей. Асимптотическая устойчивость определяется условием  $|\rho| < 1$  для всех мультипликаторов. В силу непрерывной зависимости от параметров мультипликаторы, которые при  $p = p_0$  находились внутри единичного круга, при малых  $\varepsilon$  его не покинут. Следовательно, устойчивость вдоль кривой определяется поведением лишь тех мультипликаторов, которые при  $p = p_0$  находятся на единичной окружности. Очевидно, что при наличии комплексно-сопряженных мультипликаторов достаточно исследовать поведение лишь одного из них в силу симметрии относительно действительной оси.

Рассмотрим различные случаи общего положения при наличии в системе одного, двух или трех параметров.

1<sup>0</sup>. Пусть при  $p = p_0$  имеется лишь пара простых мультипликаторов  $\rho_0 = \exp(i\omega)$ ,  $\bar{\rho}_0 = \exp(-i\omega)$ , лежащих на единичной окружности, а остальные мультипликаторы лежат внутри единичного круга. Используя выражение (3.8) для возмущенного вдоль кривой мультипликатора, получим выражение для абсолютной величины  $|\rho|$  в виде

$$|\rho|^2 = 1 + 2[(r, e) \cos \omega + (k, e) \sin \omega] \varepsilon + o(\varepsilon) \quad (4.1)$$

Тогда необходимое условие асимптотической устойчивости системы примет вид

$$(r \cos \omega + k \sin \omega, e) \leq 0 \quad (4.2)$$

Поведение простых мультипликаторов  $\rho_0 = 1$  и  $\rho_0 = -1$  описывается тем же соотношением (4.1) при подстановке значений  $\omega = 0$  и  $\omega = \pi$  соответственно. Отсюда получим необходимое условие устойчивости в случаях, когда только эти мультипликаторы лежат на единичной окружности

$$\rho_0 = 1: (r, e) \leq 0; \quad \rho_0 = -1: (r, e) \geq 0 \quad (4.3)$$

При замене нестрогих неравенств (4.2), (4.3) на строгие необходимые условия устойчивости вдоль кривой превращаются в достаточные.

2<sup>0</sup>. Пусть при  $p = p_0$  имеется пара двукратных мультипликаторов  $\rho_0 = \exp(i\omega)$ ,  $\bar{\rho}_0 = \exp(-i\omega)$ , которым отвечают жордановы клетки второго порядка. Используя выражение (3.15), описывающее распад двукратного  $\rho_0$ , найдем изменение абсолютной величины мультипликаторов в виде

$$|\rho|^2 = 1 + 2 \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon[(s_1, e) + i(s_2, e)]} + o(\varepsilon^{1/2}) \quad (4.4)$$

$$s_1 = f_1 \cos 2\omega + f_2 \sin 2\omega, \quad s_2 = f_2 \cos 2\omega - f_1 \sin 2\omega$$

Квадратный корень в (4.4) принимает два разных значения, различающихся знаком. Следовательно, для устойчивости ( $|\rho| < 1$ ) необходимо, чтобы второе слагаемое в (4.4) было равно нулю. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда подкоренное выражение вещественно и неположительно. Отсюда имеем

$$(s_1, e) \leq 0, \quad (s_2, e) = 0 \quad (4.5)$$

Используя условия (4.5) в соотношении (3.15), можно записать

$$|\rho|^2 = 1 + (s_3 - s_1, e) \varepsilon + o(\varepsilon), \quad s_3 = q_1 \cos \omega + q_2 \sin \omega$$

Отсюда непосредственно следует условие асимптотической устойчивости

$$(s_3 - s_1, e) \leq 0 \quad (4.6)$$

Итак, необходимыми условиями асимптотической устойчивости являются соотношения (4.5), (4.6).

Бифуркации двукратных мультипликаторов  $\rho_0 = 1$  и  $\rho_0 = -1$  с жордановыми клетками второго порядка описываются теми же соотношениями при подстановке значений  $\omega = 0$  и  $\omega = \pi$  соответственно и учете соотношений  $f_2 = q_2 = 0$ . Следовательно, условия асимптотической устойчивости (4.5), (4.6) в этих случаях примут вид

$$\begin{aligned} \rho_0 = 1: & \quad (f_1, e) \leq 0 \quad (q_1 - f_1, e) \leq 0 \\ \rho_0 = -1: & \quad (f_1, e) \leq 0 \quad (q_1 + f_1, e) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Условия (4.5), (4.6), а также (4.7) при замене нестрогих неравенств строгими превращаются в достаточные условия асимптотической устойчивости вдоль кривой  $p = p(\varepsilon)$ .

3<sup>0</sup>. Рассмотрим случай трехкратного мультипликатора  $\rho_0 = 1$  с жордановой клеткой третьего порядка. Бифуркация  $\rho_0 = 1$  описывается выражением (3.20). При ненулевом

подкоренном выражении в (3.20) мультипликатор  $\rho_0 = 1$  расщепляется на три простых мультипликатора, отвечающих трем различным комплексным значениям кубического корня. Очевидно, что, по крайней мере, один из мультипликаторов всегда выходит за пределы единичного круга, что приводит к параметрическому резонансу. Следовательно, для устойчивости вдоль кривой  $p = p(\epsilon)$  необходимо, чтобы подкоренное выражение в (3.20) было равно нулю:

$$(g, e) = 0 \quad (4.8)$$

При выполнении условия (4.8) бифуркация трехкратного  $\rho_0 = 1$  описывается выражениями (3.26). Из первого соотношения (3.26) следует выражение для абсолютных величин соответствующих мультипликаторов

$$|\rho|^2 = 1 \pm 2 \operatorname{Re} \sqrt{\epsilon(h, e)} + o(\epsilon^{1/2})$$

Отсюда получим дополнительное необходимое условие устойчивости

$$(h, e) \leq 0 \quad (4.9)$$

Учитывая неравенство (4.9), выражение для абсолютных величин мультипликаторов, описываемых первым соотношением (3.26), запишем в виде

$$|\rho|^2 = 1 + \left[ (t - h, e) - \frac{(Re, e) - (g, d)}{(h, e)} \right] \epsilon + o(\epsilon), \quad d = \frac{1}{2} \frac{d^2 p}{d\epsilon^2} \quad (4.10)$$

Для асимптотической устойчивости ( $|\rho| < 1$ ) необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках в (4.10) было неположительным. Это неравенство после элементарных преобразований при учете (4.9) приводится к виду

$$(g, d) \geq (Re, e) - (t - h, e)(h, e) \quad (4.11)$$

Третий мультипликатор, описываемый вторым соотношением (3.26), является вещественным. Необходимое условие устойчивости

$$\frac{(Re, e) - (g, d)}{(h, e)} \leq 0$$

для этого мультипликатора при учете (4.9) приводится к виду  $(g, d) \leq (Re, e)$ , что в совокупности с (4.11) определяет промежуток, которому принадлежит величина  $(g, d)$ ;

$$(Re, e) - (t - h, e)(h, e) \leq (g, d) \leq (Re, e) \quad (4.12)$$

Для того чтобы двойное неравенство (4.12) имело решения относительно  $d$ , необходимо, чтобы  $(t - h, e)(h, e) \geq 0$  или при учете неравенства (4.9)

$$(t - h, e) \leq 0 \quad (4.13)$$

Заметим, что выражения (3.26), использованные выше, верны при  $(h, e) \neq 0$ . Случай двойной вырожденности  $(g, e) = (h, e) = 0$ , строго говоря, требует дополнительного изучения. Однако в рассматриваемом случае можно обойтись общими рассуждениями. Действительно, условия  $(g, e) = (h, e) = 0$  выделяют в трехмерном пространстве параметров прямую. Кроме того, известно, что множество направлений  $e$  устойчивых кривых (касательный конус) в случае особенности "излом ребра"  $D_1(1^3)$  является плоским углом [6]. Следовательно, по изолированному направлению  $(g, e) = (h, e) = 0$ ,  $(t - h, e) > 0$ , нарушающему условие (4.13), нельзя выпустить кривую в область устойчивости.

Итак, соотношения (4.8), (4.9), (4.13) являются необходимыми условиями устойчивости вдоль кривой. Если к соотношениям (4.8), (4.9), (4.13) добавить (4.12) и заменить нестрогие неравенства строгими, то получим достаточные условия асимптотической устойчивости.

Случай трехкратного  $\rho_0 = -1$  аналогичен рассмотренному выше. Соответствующие неравенства имеют вид

$$(g, e) = 0 \quad (h, e) \leq 0 \quad (t + h, e) \geq 0 \quad (4.14)$$

$$(Re, e) \leq (g, d) \leq (Re, e) - (t + h, e)(h, e) \quad (4.15)$$

Рассмотренные случаи исчерпывают все возможные варианты, встречающиеся в случае общего положения при наличии одного, двух или трех параметров.

При наличии нескольких мультипликаторов на единичной окружности при  $p = p_0$  необходимо объединить соотношения, определяющие устойчивые возмущения для каждого из них. Общий результат можно записать в виде теоремы.

**Теорема 2.** Касательные конусы к области устойчивости в точках ее границы типа (2.1)–(2.3) определяются соотношениями

$$K_{B_1} = \{e: (r, e) \leq 0\}$$

$$K_{B_2} = \{e: (r, e) \geq 0\}$$

$$K_{B_3} = \{e: (r \cos \omega + k \sin \omega, e) \leq 0\}$$

$$K_{C_1} = \{e: (f_1, e) \leq 0, (q_1 - f_1, e) \leq 0\} \quad (4.16)$$

$$K_{C_2} = \{e: (f_1, e) \leq 0, (q_1 + f_1, e) \geq 0\}$$

$$K_{D_1} = \{e: (g, e) = 0, (h, e) \leq 0, (t - h, e) \leq 0\}$$

$$K_{D_2} = \{e: (g, e) = 0, (h, e) \leq 0, (t + h, e) \geq 0\}$$

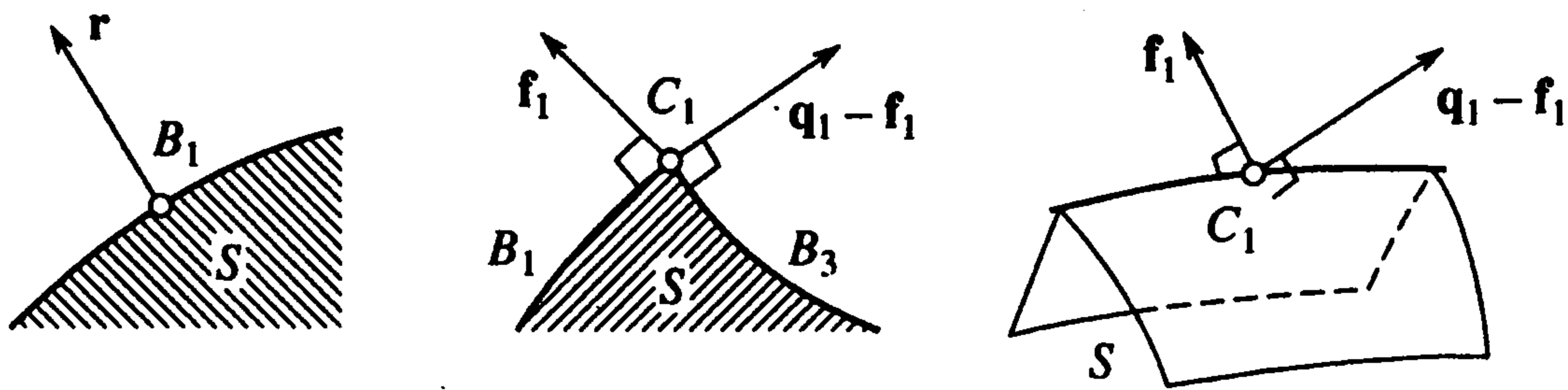
$$K_{D_3} = \{e: (s_2, e) = 0, (s_1, e) \leq 0, (s_3 - s_1, e) \leq 0\}$$

Касательные конусы для комбинированных типов (2.4), (2.5) получаются пересечением касательных конусов, найденных для каждого из подтипов. Например, в случае  $C_1 B_2$  имеем  $K_{C_1 B_2} = K_{C_1} \cap K_{B_2}$ .

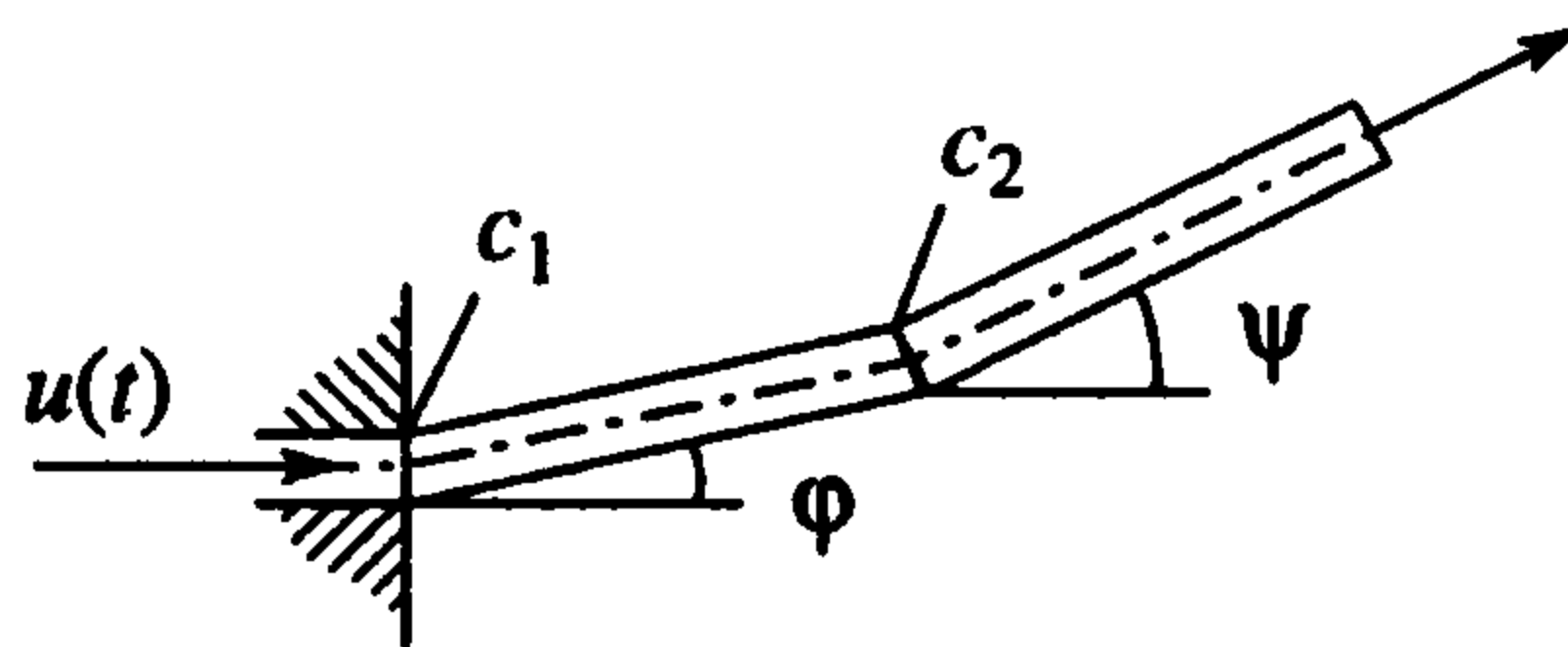
В случае  $D_3$  все гладкие кривые, выпущенные по направлениям  $e \in K_{D_3}$ , удовлетворяющим строгим неравенствам (4.16), лежат в области устойчивости при достаточно малых  $\varepsilon > 0$ , а в случаях  $D_1$  и  $D_2$  в области устойчивости лежат лишь кривые, удовлетворяющие условиям на вторую производную  $d = (d^2 p / d\varepsilon^2) / 2$  (4.12) и (4.15) соответственно. Заметим, что касательные конусы  $K_{D_1}, K_{D_2}, K_{D_3}$  вырождены (являются плоскими углами в трехмерном пространстве параметров).

Теорема 2 позволяет по информации в точке ГОУ (по первым производным оператора  $G$  из (1.1) по параметрам, а также значениям мультипликаторов и соответствующих им собственным и присоединенным векторам, вычисленным при  $p = p_0$ ) определить в первом приближении область устойчивости в окрестности этой точки. Соотношения (4.16) дают ясное представление об области устойчивости. Например, в случае неособой точки  $B_1$  касательный конус определяется неравенством  $(r, e) \leq 0$ . Следовательно, касательная плоскость к ГОУ задается уравнением  $(r, e) = 0$ , а вектор  $r$  является нормалью к границе, лежащей в области параметрического резонанса, фиг. 4. В случае особой точки  $C_1$  касательный конус является пересечением полуплоскостей (полупространств)  $(f_1, e) \leq 0$  и  $(q_1 - f_1, e) \leq 0$ . Эти неравенства определяют плоский (двугранный) угол в пространстве двух (трех) параметров, являющийся первым приближением к области устойчивости, фиг. 4.

**5. Пример.** Рассмотрим плоские колебания составной трубы, по которой течет жидкость, фиг. 5. Части трубы соединены с помощью упругих шарниров с коэффициентами жесткости  $c_1$  и  $c_2$  и имеют соответственно длины  $l_1$  и  $l_2$ . Правый конец трубы свободен. По трубе течет жидкость с погонной массой  $m$  и пульсирующей



Фиг. 4



Фиг. 5

скоростью  $u(t) = U(1 + v \sin \Omega t)$ . Погонную массу трубы обозначим через  $M$ . Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем  $\varphi$  и  $\psi$  – углы отклонения частей трубы от горизонтальной оси.

Линеаризованные уравнения движения системы в безразмерных переменных имеют вид [11]

$$M\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0 \quad (5.1)$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda^3 + 3\lambda^2 & 1.5\lambda \\ 1.5\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = v(\tau) \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma + 1 - \lambda f(\tau) & -1 + \lambda f(\tau) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \alpha t, \quad f(\tau) = \dot{v}(\tau) + \frac{v^2(\tau)}{\mu}, \quad \lambda = \frac{l_1}{l_2}, \quad \mu = \frac{3m}{M+m}, \quad \sigma = \frac{c_1}{c_2}$$

$$v(\tau) = V(1 + v \sin w\tau), \quad V = \frac{U\mu}{\alpha l_2}, \quad w = \frac{\Omega}{\alpha}, \quad \alpha^2 = \frac{\mu c_2}{m l_2^3}$$

где точки означают дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ .

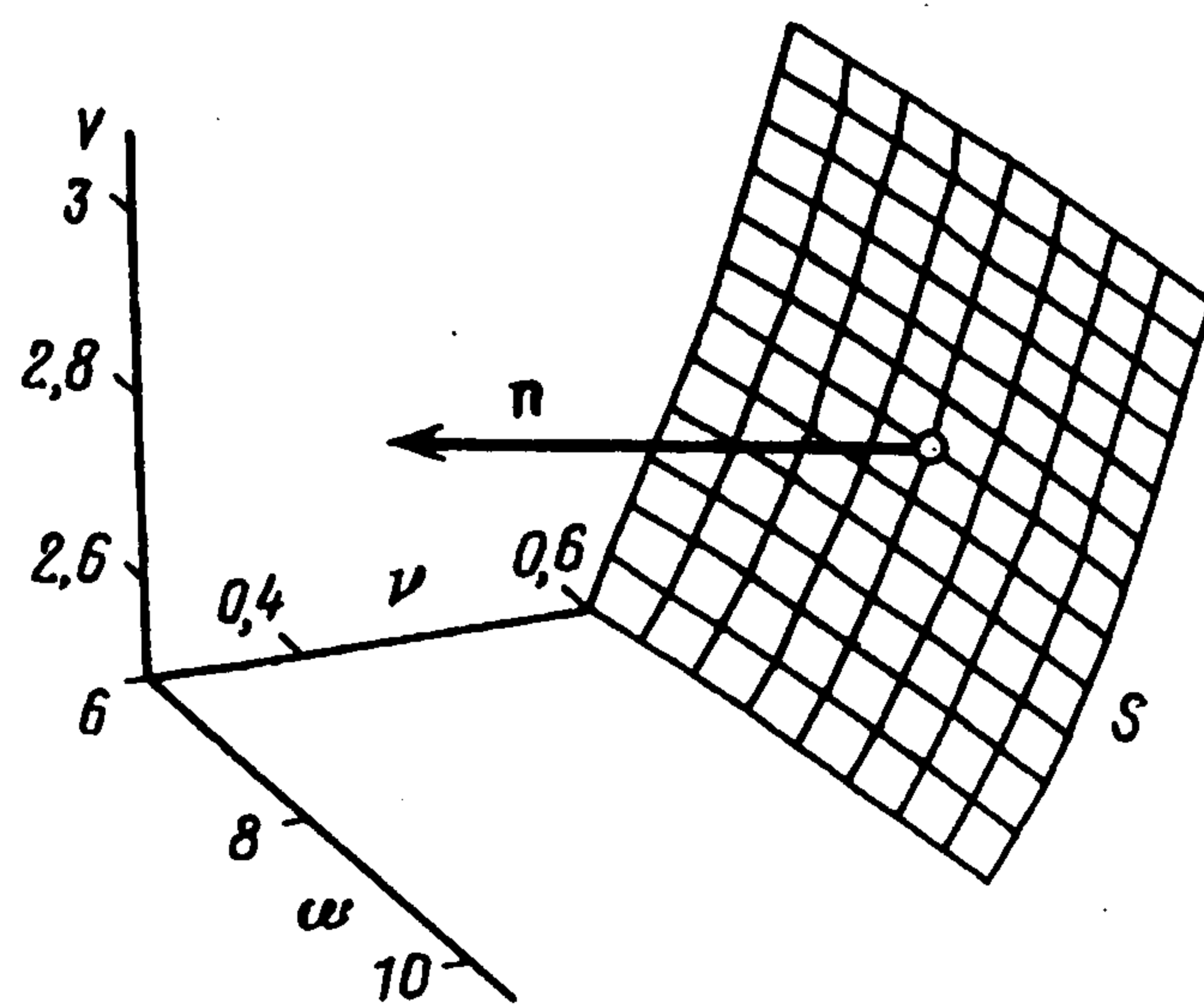
Устойчивость тривиального положения равновесия системы  $\varphi = \psi = 0$  для ряда значений параметров исследовалась ранее [11]. В данной задаче будем интересоваться прежде всего особенностями ГОУ.

Уравнения (5.1) запишем в виде (1.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\tau)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{0}$  – нулевая матрица размерности  $2 \times 2$ , а матричный оператор  $\mathbf{G}(\tau)$  с периодом  $T = 2\pi/w$  гладко зависит от безразмерных параметров  $\lambda, \mu, \sigma, w, v, V$ .

Зафиксируем параметры  $\lambda = \sigma = \mu = 1$ , что соответствует одинаковым длинам частей трубы, равным коэффициентам жесткости в шарнирах и погонной массе жидкости, вдвое меньшей погонной массы трубы. Исследуем устойчивость системы (5.2) в трехмерном пространстве параметров  $\mathbf{p} = (w, v, V)$ , где величины  $w$  и  $v$  описывают частоту и амплитуду пульсаций, а  $V$  характеризует среднюю скорость потока. При  $v = 0$  имеем  $u(\tau) = V = \text{const}$ , т.е. стационарную систему. Критическая скорость



Фиг. 6

(минимальная скорость, при превышении которой система становится неустойчивой) в этом случае равна  $V_{cr} = (6,2 - 0,4\sqrt{29})^{1/2} \approx 2,0115[11]$ .

Исследуем стабилизирующее влияние пульсаций жидкости при закритических скоростях  $V > V_{cr}$ . Выберем закритическое значение скорости  $V = 2,8$  и частоту пульсаций  $\omega = 8$ . Путем численного анализа найдем значение амплитуды пульсаций, отвечающее точке ГОУ. Для этого необходимо вычислять матрицу монодромии и ее мультипликаторы при различных  $v$ . В результате найдем  $v = 0,737$ . Матрица монодромии  $F$  вычислялась с помощью интегрирования уравнений (1.4) от 0 до  $T$  методом Рунге – Кутты. Точке  $p_0 = (8; 0,737; 2,8)$  пространства параметров соответствуют следующие мультипликаторы:

$$\rho_{1,2} = \exp(\pm 0,882i), \quad \rho_3 = 0,535, \quad \rho_4 = 0,152$$

Точка  $p_0$  ГОУ является регулярной, поскольку мультипликаторы  $\rho_{1,2}$ , лежащие на единичной окружности, простые.

Вычислив собственные векторы  $u_0, v_0$ , соответствующие мультипликатору  $\rho_1$ , и производные матрицы монодромии по формулам (1.6), определим векторы  $g, k$ , согласно (3.7). Касательный конус  $K_{B_3}$  к области устойчивости в точке  $p_0$ , согласно (4.16), описывается выражением

$$(g \cos \omega + k \sin \omega, e) \leq 0, \quad \omega = \arg \rho_1$$

Вектор

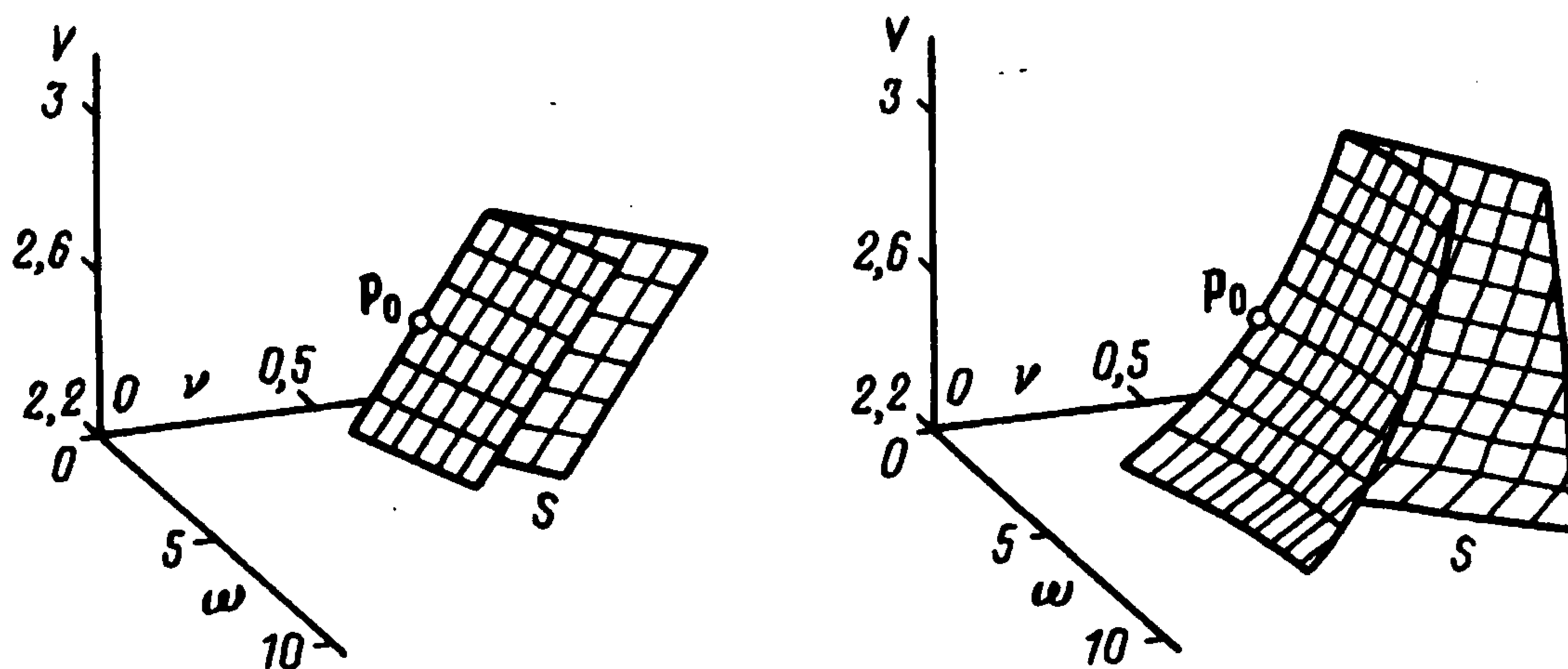
$$n = g \cos \omega + k \sin \omega = (0,03; -2,05; 0,51)$$

является нормалью к ГОУ и лежит в области неустойчивости. ГОУ, найденная численно, и вектор  $n$  изображены на фиг. 6.

Данная информация может быть использована в целях стабилизации (или дестабилизации) системы градиентными методами. Например, использование формулы для изменения параметров  $\delta p = -\alpha n$ , где  $\alpha > 0$  – малый шаг по градиенту, приводит к уменьшению модуля мультипликатора

$$\delta |\rho|^2 = -2\alpha(n, n) < 0$$

что означает стабилизацию системы. Градиентные процедуры можно использовать для движения по ГОУ. Это во многих случаях приводит к выходу на особенности ГОУ (например, на ребро).



Фиг. 7

Рассмотрим точку  $p_0 = (3,643; 0,5555; 2,6)$  в пространстве параметров, в которой матрица монодромии  $F_0$  имеет следующие собственные значения (мультипликаторы):

$$\rho_1 = \rho_2 = -1, \quad \rho_3 = 0,225, \quad \rho_4 = 0,026 \quad (5.3)$$

Оказывается, что двукратному мультипликатору (обозначим его  $\rho_0 = -1$ ) соответствуют цепочки Жордана второго порядка (3.9), (3.10)

$$\begin{aligned} u_0 &= (0,92; 0,7; -0,59; 2,49)^T, & u_1 &= (0,11; -0,35; 0,12; 1)^T \\ v_0 &= (3,34; -2,27; 1,21; -0,3)^T, & v_1 &= (-0,57; 1,11; 0,4; 0,4)^T \end{aligned} \quad (5.4)$$

удовлетворяющие условиям нормировки (3.11).

Из (5.3) следует, что лишь двукратный мультипликатор  $\rho_0 = -1$  принадлежит границе, а два других лежат внутри единичного круга. Поэтому точка  $p_0$  принадлежит границе области устойчивости в пространстве параметров  $p = (w, v, V)$ . Воссоздадим в окрестности точки  $p_0$  область устойчивости с помощью результатов разд. 2, 4. Согласно обозначениям (2.2), точке  $p_0$  соответствует особенность типа  $C_2$  — "двугранный угол". Определим касательный конус к области устойчивости в этой точке. Используя векторы (5.4) и вычисляя первые производные матрицы монодромии по параметрам по формулам (1.6), найдем согласно (3.14)

$$f_1 = (-5,15; 45,2; -7,77), \quad q_1 = (4,49; -31,1; 3,16) \quad (5.5)$$

Эти векторы по теореме 2 определяют касательный конус к области устойчивости в точке  $p_0$

$$K_{C_2} = \{e: (f_1, e) \leq 0, (q_1 + f_1, e) \geq 0\} \quad (5.6)$$

Векторы  $f_1$  и  $-(q_1 + f_1)$  являются нормальными к сторонам "двугранного угла", лежащими в области параметрического резонанса. Вектор, касательный к ребру "двугранного угла", равен

$$e_\tau = (q_1 + f_1) \times f_1 = (98,8; 18,6; 42,7)$$

На фиг. 7 слева изображен двугранный угол (5.6), являющийся аппроксимацией ГОУ в окрестности точки  $p_0$ . Для сравнения на фиг. 7 справа представлена ГОУ, найденная численно, подтверждающая наличие особенности и хорошее соответствие полученных результатов. Отметим, что для нахождения аппроксимации области устойчивости понадобилось лишь однократное интегрирование по времени дифференциальных уравнений (1.4) от 0 до  $T$  для нахождения матрицы монодромии и вычисление трех интегралов (1.6). Информация о касательном конусе (5.6) может быть использована для дальнейшего движения по ребру ГОУ с целью оптимизации устойчивости системы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-39129.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
2. Seyranian A.P., Solem F., Pedersen P. Stability analysis for multi-parameter linear periodic systems // Archive Appl. Mech. 1999. V. 69. № 3. P. 160–180.
3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.
4. Сейранян А.П. Анализ чувствительности собственных значений и развитие неустойчивости // Strojnický časopis. 1991. V. 42. № 3. P. 193–208.
5. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
6. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Особенности границ областей устойчивости // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 984–995.
7. Сейранян А.П., Майлыбаев А.А. Об особенностях границ областей устойчивости гамильтоновых и гироскопических систем // Докл. РАН. 1999. Т. 365. № 6. С. 756–760.
8. Mailybaev A.A., Seyranian A.P. On singularities of a boundary of the stability domain // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2000. V. 21. № 1. P. 106–128.
9. Галин Д.М. О вещественных матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. Вып. 1. С. 241–242.
10. Левантовский Л.В. О границе множества устойчивых матриц // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35. Вып. 2. С. 213–214.
11. Szabo Z., Sinha S.C., Stepan G. Dynamics of pipes containing pulsative flow // Proc. EUROMECH: 2nd Europ. Nonlinear Oscillation Conf. Prague, 1996. P. 439–442.

Москва

Поступила в редакцию  
8.VII.1999

e-mail: mailybaev@inmech.msu.su  
seyran@inmech.msu.su