

УДК 531.36:534.1

© 2000 г. В.В. Козлов

ДВУЗВЕННЫЕ БИЛЛИАРДНЫЕ ТРАЕКТОРИИ: ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассматриваются двузвенные периодические траектории выпуклого плоского бильярда, когда материальная частица движется по отрезку, ортогональному границе бильярда в своих концевых точках. Установлено, что если каустика границы лежит внутри бильярда, то в типичной ситуации имеется четное число двузвенных траекторий, причем половина из них гиперболические (следовательно, неустойчивы), а другая половина имеет эллиптический тип. Приведен пример бильярда, у которого каустика пересекает границу и все двузвенные траектории гиперболические. Анализ устойчивости основан на анализе экстремума функции длины отрезка выпуклого бильярда, который ортогонален границе в одном из своих концов.

1. Условия устойчивости. Пусть имеется гладкая регулярная замкнутая кривая Γ – граница плоского бильярда. Будем предполагать, что во всех точках ее кривизна положительна. Пусть имеется отрезок длины l , который ортогонально пересекает Γ в концевых точках γ_1 и γ_2 . Тогда этот отрезок – двузвенная периодическая траектория выпуклого бильярда. Напомним, что согласно Биркгофу [1], бильярдом называется динамическая система внутри Γ с упругими ударами. Пусть R_1, R_2 – радиусы кривизны Γ в точках γ_1, γ_2 ; будем считать для определенности, что $R_1 \leq R_2$.

Как установлено [2], двузвенная периодическая траектория будет эллиптической (ее комплексные мультипликаторы λ_1, λ_2 лежат на единичной окружности), если

$$0 < l < R_1 \text{ или } R_2 < l < R_1 + R_2 \quad (1.1)$$

Как правило, эллиптические траектории устойчивы по Ляпунову [3]. Если же

$$R_1 < l < R_2 \text{ или } R_1 + R_2 < l \quad (1.2)$$

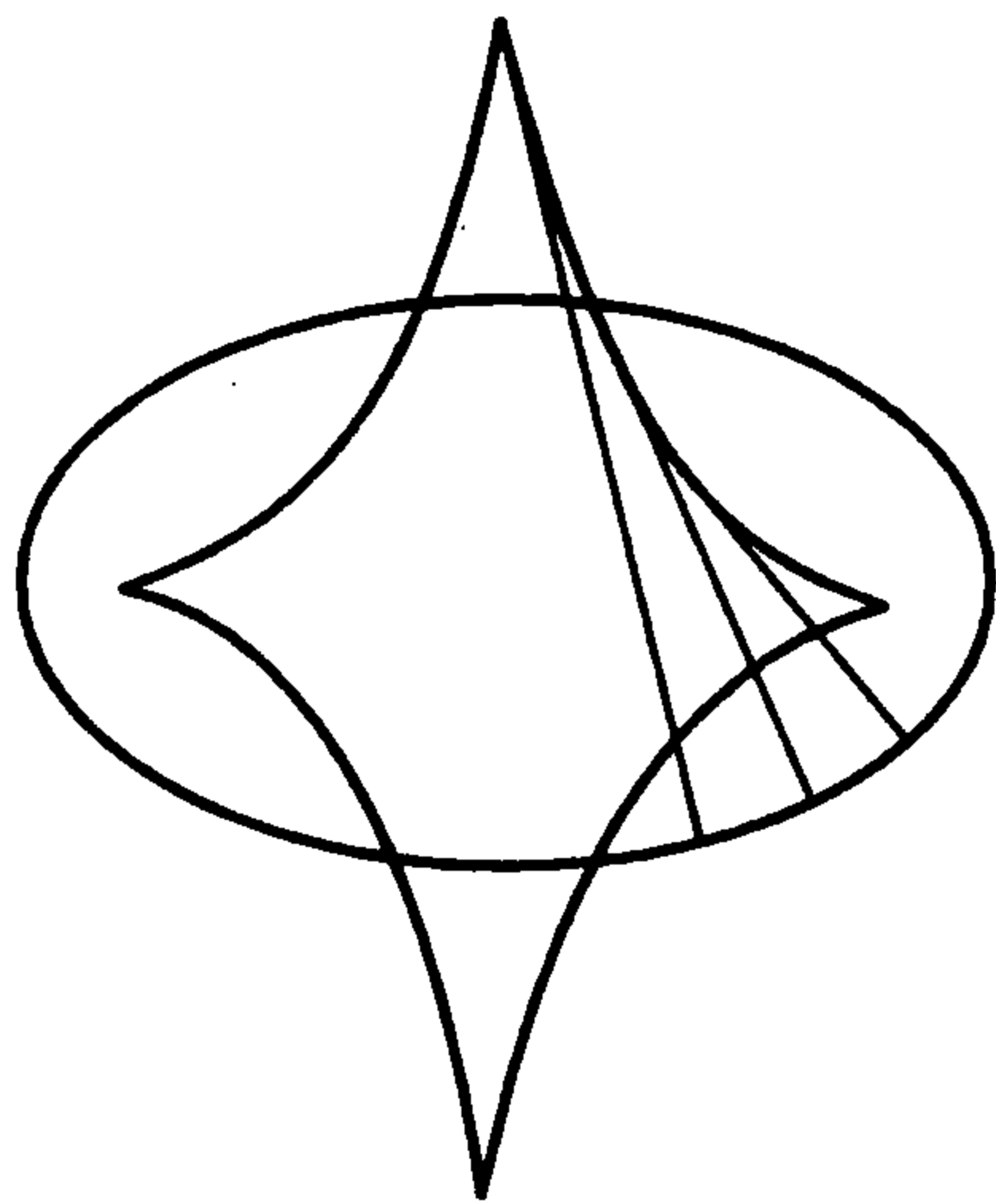
то траектория будет гиперболической (λ_1, λ_2 вещественны, причем $|\lambda_1| > 1$, а $|\lambda_2| < 1$). Гиперболические траектории, разумеется, неустойчивы.

При $l = R_1 + R_2$ имеем вырожденный случай: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Если же $l = R_1$ или $l = R_2$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Другой вывод условий устойчивости (1.1), (1.2) можно найти в [4].

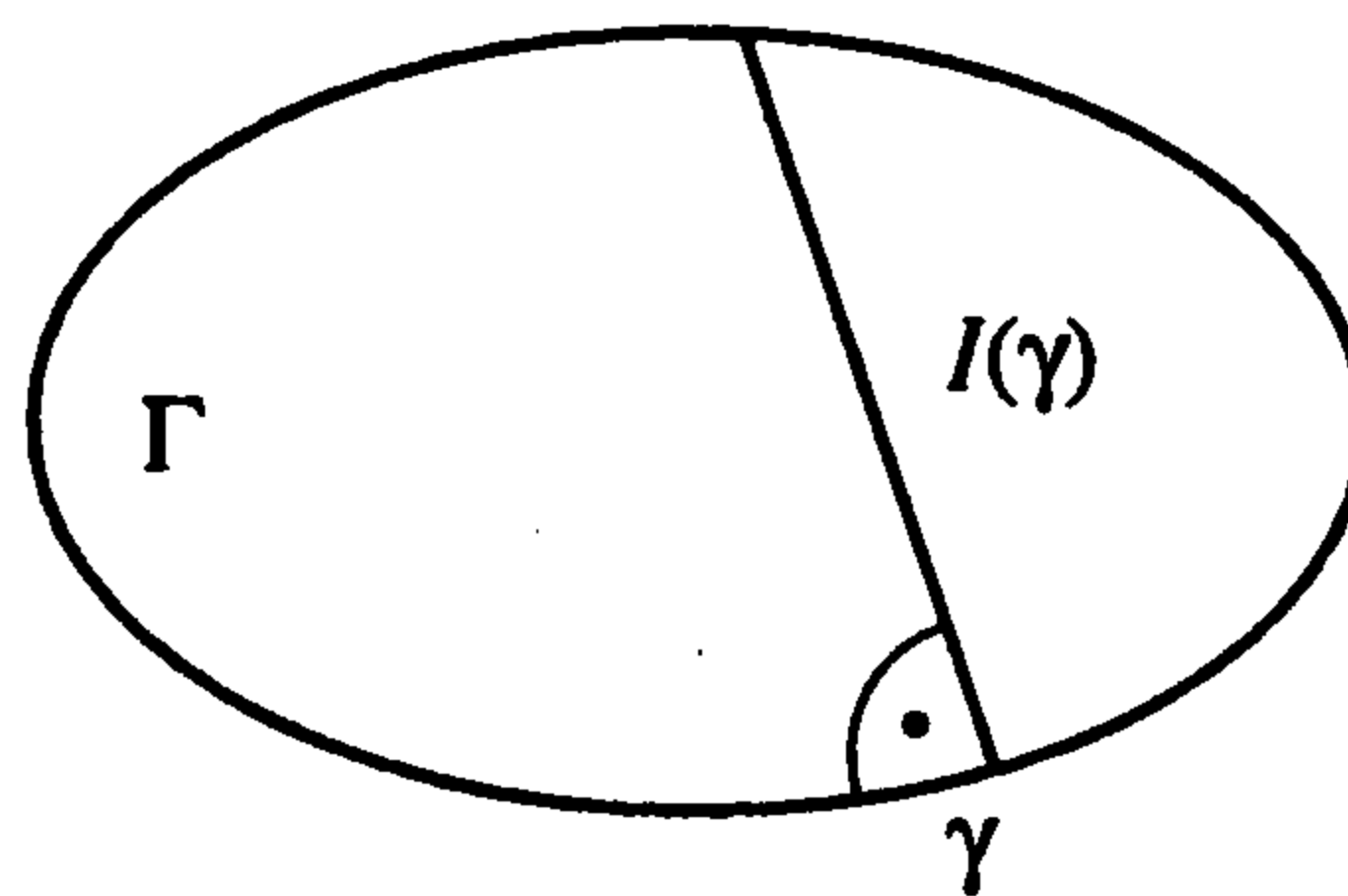
Пример. Пусть граница Γ – эллипс с полуосями $a \geq b > 0$. Если $a = b$, то имеем целое семейство вырожденных двузвенных траекторий. Зафиксируем a и будем уменьшать b . Тогда большая ось эллипса станет гиперболической траекторией, а малая ось – эллиптической. Правда, при $a^2 = 2b^2$ свойство эллиптичности потеряется: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. При дальнейшем уменьшении b меньшая ось снова будет эллиптической. Используя картину траекторий эллиптического бильярда [1], можно показать, что и при $a^2 = 2b^2$ меньшая ось остается устойчивой по Ляпунову.

Среди отрезков с концами на Γ имеется отрезок максимальной длины. Он будет, очевидно, двузвенной периодической траекторией. В окрестности концевых точек граница Γ описывается уравнениями

$$y_1 = a_1 x_1^2 + o(x_1^2), \quad y_2 = l - a_2 x_2^2 + o(x_2^2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Радиусы кривизны равны соответственно $R_1 = 1/(2a_1)$ и $R_2 = 1/(2a_2)$. Значениям $x_1 = x_2 = 0$ отвечает двузвенная траектория. Квадрат расстояния между точками с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) равен

$$d^2 = l^2 + f_2 + \dots, \quad f_2 = (1 - 2a_1 l)^2 x_1^2 - 2x_1 x_2 + (1 - 2a_2 l)^2 x_2^2$$

Многоточие обозначает члены порядка ≥ 3 .

Поскольку двузвенная траектория имеет максимальную длину, то квадратичная форма $(-f_2)$ неотрицательна. В частности,

$$l \geq \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} = R_1 + R_2 \quad (1.3)$$

Отсюда вытекает, в частности, что каустика границы Γ (кривая центров кривизны) не может целиком лежать вне Γ .

Пример. Пусть Γ – эллипс с полуосями $a \geq b$. Если $a^2 < 2b^2$, то каустика (являющаяся астроидой) лежит внутри эллипса. При $a^2 = 2b^2$ она упирается в концы малой оси, а при $a^2 > 2b^2$ каустика выходит за пределы эллипса (фиг. 1).

Если критическая точка $x_1 = x_2 = 0$ функции d невырождена (форма f_2 невырождена), то неравенство (1.3) становится строгим. Поэтому в типичном случае отрезок максимальной длины – гиперболическая траектория с положительными мультипликаторами. Этот результат отмечен [5] как следствие более общей конструкции.

2. Экстремумы и устойчивость. Пусть γ – точка на границе Γ , а $I(\gamma)$ – отрезок с концами на Γ , ортогональный Γ в точке γ (фиг. 2). Через $L(\gamma)$ обозначим длину отрезка $I(\gamma)$. Ввиду выпуклости кривой Γ функция $L: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая. Пусть $\gamma' \in \Gamma$ – другой конец отрезка $I(\gamma)$.

Утверждение 1. Пусть γ – стационарная точка функции L и значение $L(\gamma)$ не равно радиусу кривизны кривой Γ в точке γ (γ' не принадлежит каустике Γ). Тогда отрезок $I(\gamma)$ – двузвенная периодическая траектория.

Доказательство. Уравнения кривой Γ в окрестности точек γ и γ' имеют вид

$$y = a_1 x^2 + o(x^2), \quad y = l + \mu x + o(x)$$

В этих обозначениях

$$L^2 = l^2 + 2l\mu(1 - 2a_1 l)x + o(x)$$

По предположению, $x = 0$ – критическая точка функции L . Следовательно, $\mu(1 - l/R_1) = 0$, где R_1 – радиус кривизны кривой Γ в точке γ . Поскольку $l = L(\gamma) \neq R_1$, то $\mu = 0$. Значит, отрезок $I(\gamma)$ ортогонален Γ в точке γ' , что и требовалось доказать.

Пусть $I(\gamma)$ – двузвенная траектория. Тогда функция L принимает стационарные значения в точках γ и γ' . Пусть кривая Γ в окрестности этих точек задается уравнениями

$$y = a_1 x^2 + o(x^2), \quad y = l - a_2 x^2 + o(x^2)$$

соответственно. Разложение функции L^2 в ряд Тейлора в окрестности точки γ имеет вид

$$L^2 = l^2 + (2a_1 l - 1)[2a_1 l - 2a_2 l(2a_1 l - 1)]x^2 + o(x^2) \quad (2.1)$$

Если стационарная точка $x = 0$ невырождена, то $2a_1 l - 1 \neq 0$ и, следовательно, γ' не принадлежит каустике границы Γ (ср. с утверждением 1).

Утверждение 2. Пусть γ и γ' – невырожденные стационарные точки функции L . Тогда

1) если γ и γ' – точки локального минимума L , то траектория $I(\gamma) = I(\gamma')$ эллиптическая;

2) если γ и γ' – точки локального максимума и минимума L , то траектория, $I(\gamma)$ гиперболическая с отрицательными мультипликаторами;

3) если γ и γ' – точки локального максимума L и если каустика границы Γ не пересекается с Γ , то траектория $I(\gamma)$ гиперболическая с положительными мультипликаторами.

Этот результат однозначно связывает экстремальные свойства длины двузвенной траектории с ее устойчивостью.

Доказательство.

1) Пусть γ – точка локального минимума функции L . Тогда, согласно (2.1), имеем неравенство

$$(2a_1 l - 1)[2a_1 l - 2a_2 l(2a_1 l - 1)] > 0 \quad (2.2)$$

С учетом положительности a_1, a_2 получаем

$$l > 1/(2a_1) \text{ и } l < 1/(2a_1) + 1/(2a_2) \quad (2.3)$$

Поскольку в точке γ' функция L также имеет минимум, то аналогично выводятся неравенства

$$l > 1/(2a_2) \text{ и } l < 1/(2a_1) + 1/(2a_2) \quad (2.4)$$

Так как $R_1 = 1/(2a_1)$, $R_2 = 1/(2a_2)$ и $R_1 \leq R_2$, то из (2.3) и (2.4) получаем второе неравенство (1.1). Следовательно, траектория I эллиптическая.

2) Пусть γ – точка локального максимума функции L . Тогда имеем неравенство, противоположное (2.2). Решением этого неравенства являются интервалы

$$l < 1/(2a_1) \text{ или } l > 1/(2a_1) + 1/(2a_2) \quad (2.5)$$

С другой стороны, функция L достигает минимума в точке γ' . Следовательно, справедливы неравенства (2.4). Неравенства (2.4) и (2.5) дают первое неравенство (1.2). Поэтому I – гиперболическая траектория с отрицательными мультипликаторами.

3) Если γ и γ' – локальные максимумы функции L , то к неравенствам (2.5) надо добавить неравенства

$$l < 1/(2a_2) \text{ или } l > 1/(2a_1) + 1/(2a_2) \quad (2.6)$$

Отсюда выводится, что либо $0 < l < R_1$, либо $l > R_1 + R_2$. Так как каустика границы Γ лежит внутри Γ , то $l > R_1$, и поэтому остается одно неравенство $l > R_1 + R_2$, которое гарантирует свойство гиперболичности I с положительными мультипликаторами.

В типичной ситуации все критические точки функции $L: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ невырождены. Тогда их общее количество четно и точки максимума и минимума между собой перемежаются.

Пример. Рассмотрим снова эллиптический бильярд с полуосями $a \geq b$. Зафиксируем значение a и будем уменьшать b , начиная со значения $b = a$. Пока $a^2 < 2b^2$, функция L будет иметь четыре критические точки в вершинах эллипса (концы его осей), причем концы большей оси – максимумы функции L , а меньшей – минимумы. При $a^2 = 2b^2$ две последние критические точки вырождаются, а при дальнейшем уменьшении b они также переходят в локальные максимумы. Поскольку в случае $a^2 > 2b^2$ каустика пересекает эллипс в четырех точках (фиг. 1), то между вершинами появляются четыре невырожденных локальных минимума функции L . Закон смены типа экстремума остается справедливым, однако этим новым стационарным точкам не отвечают двузвенные периодические траектории (см. утверждение 1). Этот пример показывает также, что в заключении 3 утверждения 2 нельзя опустить условие о том, что каустика границы Γ не должна пересекать Γ .

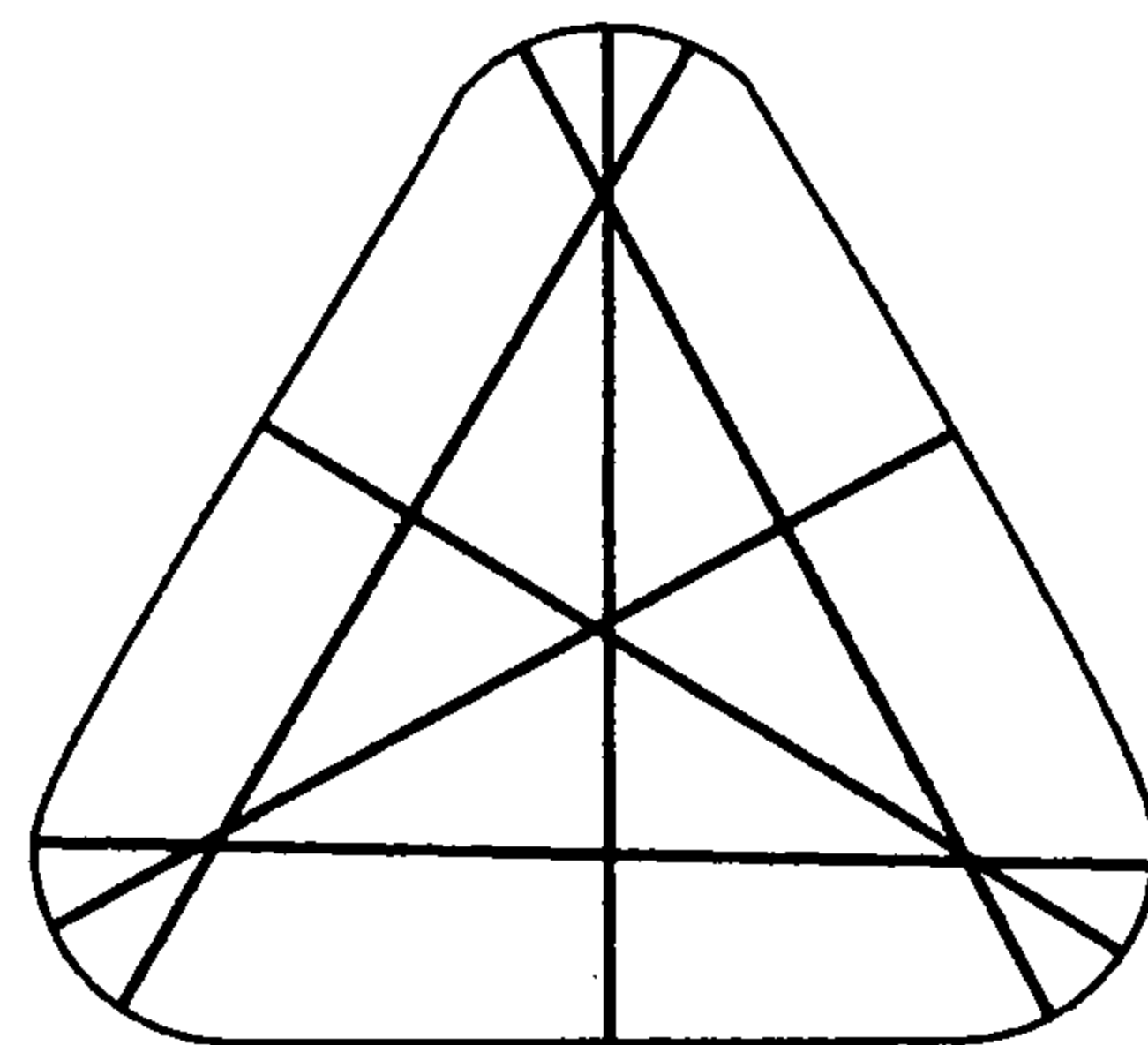
3. Существование устойчивой траектории. Основной результат составляет

Утверждение 3. Предположим, что каустика выпуклого овала Γ не пересекает Γ и функция $L: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ имеет только невырожденные стационарные точки. Тогда бильярд внутри Γ имеет четное число $m \geq 2$ двузвенных периодических траекторий, причем половина из них гиперболические, а половина имеет эллиптический тип. Если концы этих траекторий последовательно занумеровать числами $1, 2, \dots, 2m$, то концы i -й траектории ($1 \leq i \leq m$) – это точки с номерами i и $m + i$, причем четным значениям i отвечают гиперболические (эллиптические) траектории, а нечетным i – соответственно эллиптические (гиперболические) траектории.

Доказательство использует утверждение 2 и простые топологические факты. Сначала покажем, что если кривизна κ замкнутого овала Γ всюду положительна, то любые два отрезка двузвенных траекторий обязательно пересекаются. Так как $\kappa > 0$, то (по формулам Френе) при движении точки γ по Γ в положительном (отрицательном) направлении касательная к Γ в точке γ вращается в том же направлении. Пусть γ и γ' – концы двузвенной траектории I ; касательные к Γ в этих точках, очевидно, параллельны. Поэтому, если две точки $\gamma_1, \gamma'_1 \in \Gamma$ лежат по одну сторону от I , то касательные в этих точках обязательно пересекаются и, следовательно, они не могут быть концами двузвенной траектории.

Рассмотрим теперь траекторию I_1 максимальной длины. Поскольку каустика Γ лежит внутри Γ , то в формуле (2.1) $2a_1l - 1 > 0$. Следовательно, концы I_1 – невырожденные локальные максимумы функции длины L . По предположению, все критические точки функции L невырождены. Значит, обязательно существуют другие критические точки L и, согласно утверждению 1, дополнительные двузвенные траектории $I_2, \dots, I_m$. Все они пересекают I_1 , и поэтому с каждой стороны I_1 на Γ имеется $m - 1$ различных критических точек функции L . Ввиду чередования максимумов и минимумов их число должно быть нечетным. Следовательно, m – число различных двузвенных траекторий – четное.

На овале Γ в порядке их следования занумеруем концы отрезков $I_1, I_2, \dots, I_m$ числами $1, 2, \dots, 2m$. Поскольку эти отрезки попарно пересекаются, то концами этих отрезков оказываются пары точек с номерами i и $m + i$ ($1 \leq i \leq m$). Концы максимального по длине отрезка I_1 – максимумы функции L . Учитывая чередования типа экстремума функции L , получаем, что концы каждого из отрезков I_j являются либо оба максимумами, либо оба минимумами L . Согласно утверждению 2, в первом случае двузвенная траектория гиперболическая, а во втором – эллиптическая, что и требовалось показать.



Фиг. 3

4. Выпуклые бильярды без устойчивых двузвенных траекторий. Приведем пример выпуклой кривой Γ , каустика которой не лежит целиком внутри Γ , для которой все двузвенные траектории гиперболические. С этой целью возьмем равносторонний треугольник и рассмотрим три окружности S_1, S_2, S_3 с центрами в вершинах треугольника, радиус которых (для определенности) равен трети длины стороны. Пусть Γ – граница выпуклой оболочки, натянутой на множество $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ (фиг. 3). Эта кривая состоит из дуг окружностей и отрезков прямых. Бильярд внутри Γ имеет ровно шесть двузвенных траекторий: три отрезка максимальной длины и еще три отрезка, на концах которых функция длины L принимает максимальное и минимальное значения. Все эти траектории гиперболические. Правда, у кривой Γ кривизна не всюду положительна. Однако сколь угодно малой деформацией эту кривую можно превратить в строго выпуклый овал (даже аналитический), который снова будет иметь ровно шесть гиперболических двузвенных траекторий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01096) и программы "Университеты России" (5581).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. N.Y.: Amer. Math. Soc. 1927. = *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
2. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
3. *Маркеев А.П.* О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 37–54.
4. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
5. *Трещев Д.В.* К вопросу об устойчивости периодических траекторий бильярда Биркгофа // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1988. № 2. С. 44–50.

Москва

Поступила в редакцию
10.III.2000