

УДК 531.36

© 2000 г. В.Н. Кошляков

О СТРУКТУРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Методика структурных преобразований гироскопических систем [1, 2] развивается применительно к системам, содержащим неконсервативные позиционные силы. Указанная методика, рассматриваемая в аспекте обоснованного использования прецессионных уравнений прикладной теории гироскопов, позволяет преодолеть трудности, связанные с наличием в исходных уравнениях неконсервативных позиционных структур, и в ряде случаев допускает прямое применение теорем Томсона–Тета–Четаева.

1. Постановка задачи. Исследуется матричное уравнение вида

$$J\ddot{x} + (D + HG)\dot{x} + (\Pi + P)x = X(x, \dot{x}) \quad (1.1)$$

где $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ – искомый вектор; $J = J^T$, $D = D^T$, $G = -G^T$, $\Pi = \Pi^T$, $P = -P^T$ (индекс T означает транспонирование) – постоянные матрицы размера $n \times n$; $X(x, \dot{x})$ – n -мерный вектор-столбец, содержащий x и $\dot{x}$ в степенях выше первой; $H > 0$ – некоторый большой скалярный параметр. Матрицы J и D будем далее считать положительно определенными, а матрицы G и P – невырожденными, чему отвечает n четное.

Уравнением (1.1) описывается возмущенное движение многих динамических систем, находящихся под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и неконсервативных позиционных сил. Будем далее считать

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_n), \quad D = \text{diag}(b_1, \dots, b_n) \quad (1.2)$$

В системах, содержащих гироскопы, под J следует понимать матрицу суммарных моментов инерции относительно соответствующих осей.

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим уравнение, которое обычно называют прецессионным. Оно получается из (1.1) в результате пренебрежения первым матричным слагаемым:

$$(D + HG)\dot{u} + (\Pi + P)u = U(u, \dot{u}) \quad (1.3)$$

Механическая интерпретация замены исходного уравнения приближенным уравнением (1.3) соответствует, по сути, учету в общей кинетической энергии системы (или в общем кинетическом моменте) лишь той части, которая обусловлена предположенным быстрым вращением гироскопов. При этом порядок получающейся системы оказывается в 2 раза меньше порядка исходной, что, конечно, представляет значительное удобство в практическом применении прецессионной теории.

Тем не менее переход к уравнениям прецессионной теории требует надлежащего обоснования, так как не всегда правомерен. Математическому обоснованию допустимости использования уравнения (1.3) посвящены исследования ряда авторов, относящиеся как к математической части проблемы, так и к построению и развитию практических методов ее решения [3–9]. В связи с этим укажем, например, на методы

интегральных многообразий и расщепляющих преобразований, приводящие к разделению движений на медленные (прецессионные) и быстрые (нутационные).

Определенным препятствием на пути формального перехода к уравнениям прецессионной теории является наличие в исходных уравнениях неконсервативных позиционных членов. В этом случае асимптотически устойчивое решение, полученное в рамках прецессионной теории, может оказаться, в силу расходимости быстрых нутационных движений, неустойчивым в точных уравнениях [3, 9]. К этому можно добавить, что наличие неконсервативных позиционных структур в уравнениях возмущенного движения гироскопических систем исключает прямое применение теорем Томсона–Тета–Четаева [10].

Излагаемая ниже теория в отличие от метода расщепляющих преобразований не требует использования асимптотических разложений, а основывается на рассмотренном в [1, 2] структурном преобразовании уравнения (1.1), позволяющим исключить из преобразованного уравнения матрицу неконсервативных позиционных сил.

2. Преобразование уравнения (1.1). Перейдем в (1.1) к новой переменной, полагая

$$x = L\xi \quad (2.1)$$

где матрица L далее определяется. Преобразование (2.1), являющееся обратным используемому в [1, 2], оказывается в данном случае более удобным. В результате приходим к уравнению

$$J\ddot{\xi} + [2J\dot{L} + (D + HG)L]\dot{\xi} + [J\ddot{L} + (D + HG)\dot{L} + (\Pi + P)L]\xi = \Xi \quad (2.2)$$

где Ξ – вектор-столбец, содержащий ξ и $\dot{\xi}$ в степенях выше первой.

С точностью до нелинейного вектора Ξ уравнение (2.2) можно представить в виде

$$\ddot{\xi} + L^{-1}[2\dot{L} + J^{-1}(D + HG)L]\dot{\xi} + L^{-1}[\ddot{L} + J^{-1}(HGL + \Pi L + D\dot{L} + PL)]\xi = 0 \quad (2.3)$$

Выполнение условия

$$D\dot{L} + PL = 0 \quad (2.4)$$

позволяет исключить матрицу P из уравнения (2.3). Условие (2.4), аналогичное второму из условий (2.6) работы [2], может быть представлено в форме матричного уравнения

$$\dot{L} = AL \quad (A = D^{-1}P^T) \quad (2.5)$$

решение которого будет

$$L = e^{At}L(0) \quad (2.6)$$

где $L(0)$ соответствует начальному отсчету времени.

При ограниченности $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ на интервале $[0, \infty)$, а также при $|\det L(t)| \geq m > 0$ (m – положительная постоянная) матрица L будет матрицей Ляпунова. В этом случае преобразование (2.1) не изменяет свойств устойчивости линейной части исходного уравнения (1.1).

Учитывая уравнение (2.4), заменяем с его помощью $\dot{L}$ и $\ddot{L}$ в уравнении (2.3), после чего последнее можно представить в форме

$$\ddot{\xi} + Q\dot{\xi} + R\xi = 0 \quad (2.7)$$

где

$$Q = L^{-1}VL, \quad R = L^{-1}WL \quad (2.8)$$

$$V = J^{-1}(D + HG) + 2A, \quad W = A^2 + J^{-1}(\Pi + HGA)$$

Таким образом, матрицы V, Q и соответственно W, R связаны соотношением подобия.

Общее уравнение (2.7) положим в основу дальнейшего анализа.

3. Корректируемые гироскопические системы. Действительная кососимметрическая матрица, как известно, всегда может быть приведена с помощью ортогонального преобразования подобия к канонической клеточно-диагональной форме. В этой связи заметим, что существует обширный класс динамических систем, описываемых уравнением (1.1), в котором кососимметрические матрицы G и P изначально представляются в клеточно-диагональной форме, содержащей лишь блоки второго порядка по главной диагонали:

$$G = \text{diag}(G_1, \dots, G_q), \quad P = \text{diag}(P_1, \dots, P_q), \quad 2q = n$$

$$G_k = g_k S, \quad P_k = p_k S, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$g_k > 0, \quad p_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, q$$

К числу подобных систем относятся, в частности, платформенные полигироскопические гироскопические горизонты, оснащенные управлением по типу радиальной коррекции.

Учитывая представления (3.1), обратимся к уравнению (2.5), полагая $L = \|l_{ij}\|_1^n$. Имеем

$$\|l_{ij}\|_1^n = \text{diag}(b_1^{-1}, \dots, b_n^{-1}) \text{diag}(-P_1, \dots, -P_q) \|l_{ij}\|_1^n \quad (3.2)$$

В силу (3.2) приходим к уравнениям относительно составляющих l_{ij} матрицы L , распадающимся на q групп независимых уравнений

$$\ddot{l}_{ij} + \Omega_k^2 l_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (3.3)$$

Удовлетворяя в решениях уравнений (3.3) единичным начальным условиям, имеем применительно к рассматриваемому классу динамических систем решение (2.6) в форме

$$L = \text{diag}(L_1, \dots, L_q) \quad (3.4)$$

где

$$L_k = \begin{pmatrix} \cos \Omega_k t & -r_k^{-1/2} \sin \Omega_k t \\ r_k^{-1/2} \sin \Omega_k t & \cos \Omega_k t \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$r_k = b_{2k} / b_{2k-1}, \quad \Omega_k = p_k (b_{2k-1} b_{2k})^{-1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, q$$

Матрица Ляпунова (3.4) при $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ становится, в силу представлений (3.5), ортогональной.

Предположим, что действующие на систему силы, моделируемые матрицей D в уравнении (1.1) обусловлены лишь сопротивлением среды. В этом случае суммарный момент сил сопротивления (диссипацию будем полагать полной) зависит, вообще говоря, не только от физических свойств среды, но и от распределения масс системы. Следуя концепции Зоммерфельда–Гринхилла, положим применительно к рассматриваемой системе

$$D = \mu J \quad (3.6)$$

где $\mu > 0$ – малый постоянный скалярный параметр, зависящий от свойств среды, J – матрица моментов инерции системы, определяемая по первой формуле (1.2) [11].

С учетом изложенного выше обратимся к последним двум формулам (2.8), принимая во внимание выражения (1.2), (3.1) и (3.6). Имеем

$$V = \mu E_n + \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{n-1} \\ -\sigma_n & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (3.7)$$

$$\sigma_{2k-1} = (\mu J_{2k-1})^{-1} (\mu H g_k - 2p_k), \quad \sigma_{2k} = (\mu J_{2k})^{-1} (\mu H g_k - 2p_k)$$

$$W = \text{diag} (\chi_1 E, \dots, \chi_q E) + J^{-1} \Pi$$

$$\chi_k = \mu^{-2} (J_{2k-1} J_{2k})^{-1} p_k (H g_k \mu - p_k), \quad k = 1, 2, \dots, q$$

где E_n — единичная матрица порядка n , при $n = 2$ индекс опущен.

Механическая система, находящаяся под действием одних неконсервативных сил, всегда неустойчива и притом независимо от членов высшего порядка, выражаемых в (1.1) вектором $X(x, \dot{x})$. Тем не менее в неконсервативной системе может быть достигнута асимптотическая устойчивость в случае, когда, помимо неконсервативных позиционных сил, присутствуют диссипативные и гироскопические силы, а число определяющих координат четное [3]. Изложенный выше аппарат позволяет использовать это обстоятельство для обоснованного перехода к уравнениям прецессионной теории применительно к системам, в которых соблюдаются условия (3.1).

Полагая $\Pi = 0$ в последней формуле (2.8) и учитывая выражения (3.7), убеждаемся в тождественном выполнении условий $Q = V$ и $R = W$ в выражениях (2.8). Умножая далее уравнение (2.7) слева на матрицу J , будем иметь

$$J\ddot{\xi} + V_1\dot{\xi} + W_1\xi = 0 \quad (3.8)$$

где следует считать

$$V_1 = JV = D + \text{diag} (h_1 S, \dots, h_q S)$$

$$h_k = \mu^{-1} (H \mu g_k - 2p_k) \quad (3.9)$$

$$W = JW = \text{diag} (c_1, \dots, c_n)$$

$$c_{2k-1} = \chi_k J_{2k-1}, \quad c_{2k} = \chi_k J_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots, q$$

Таким образом, матрица W_1 в уравнении (3.8) получилась диагональной и, следовательно, не имеющей неконсервативных структур. Поэтому к уравнению (3.8) применимы теоремы Томсона–Тета–Четаева.

Действительно, при условиях отсутствия диссипативных и гироскопических сил, входящих в силу (3.9) в состав матрицы V_1 , положительность всех величин c_i (они являются коэффициентами Пуанкаре для данного случая [11]) обеспечивается посредством неравенств

$$H g_k \mu - p_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (3.10)$$

следующих из формул (3.7) и (3.9). Они соответствуют устойчивости (неасимптотической) тривиального решения уравнения (3.8) для указанных условий. При выполнении неравенств (3.10) добавление сил сопротивления с полной диссипацией и произвольных гироскопических сил (последним отвечают $h_k \neq 0$) сообщает уравнению (3.8), согласно соответствующей теореме Томсона–Тета–Четаева, асимптотическую устойчивость и соответственное погашение нутационных колебаний.

Из неравенств (3.10) можно получить оценки снизу величины коэффициента диссипации μ в виде

$$\mu > \max_{1 \leq k \leq q} (p_k / H g_k) \quad (3.11)$$

обеспечивающие погашение нутации. Неравенства (3.10) согласуются с достаточным условием устойчивости, полученным ранее для случая, когда $\|p_{kj}\| = \alpha H \|g_{kj}\|$, где α – положительная постоянная, но без связи с проблемой перехода к уравнениям прецессионной теории. Действительно, полагая $p_k = \alpha H g_k$ в (3.10), имеем условие $\mu > \alpha$ [12].

При $\Pi = 0$ в силу структур матриц (3.1) и (3.4) уравнениям (1.1) и (3.10) отвечают q независимых групп скалярных уравнений второго порядка.

Если в системе имеются потенциальные силы ($\Pi \neq 0$ в (1.1)), то условия затухания нутационных колебаний могут оказаться недостаточными для обеспечения устойчивости всей системы, хотя всякий раз должны быть оговорены. В предположении достаточно большой величины параметра H в этом случае следует обеспечить асимптотическую устойчивость также и в прецессионном уравнении (1.3) [3].

Ниже рассматриваются иллюстрирующие примеры.

4. Однороторный корректируемый гироскомпас. Избирательное свойство гироскопического компаса по отношению к направлению меридиана места создается за счет маятникового эффекта, действующего таким образом, что вектор собственного кинетического момента компаса устанавливается в плоскости меридиана места. Маятниковый эффект может быть реализован разными способами, в частности присоединением к чувствительному элементу специального маятника.

В настоящее время получили распространение корректируемые курсоуказатели, основывающиеся на астатическом трехстепенном гироскопе. В таких курсоуказателях моменты, необходимые для создания маятникового и демпфирующего эффектов, формируются специальными корректирующими устройствами.

Не останавливаясь на описании этих приборов, рассмотрим один из вариантов однороторного корректируемого курсоуказателя, теория которого в традиционной для гироскопических комплексов прецессионной постановке изложена в монографии [13]. Уравнения движения курсоуказателя в предположении его установки на стабилизируемой в горизонте платформе для случая неподвижного относительно Земли основания имеют вид

$$H\dot{\alpha} - (K + HU \cos \varphi)\beta = 0, \quad H\dot{\beta} + HU \cos \varphi \alpha + K\epsilon\beta = 0 \quad (4.1)$$

где α и β – определяющие координаты, H – собственный кинетический момент гироскопа, U – угловая скорость вращения Земли, φ – широта места, K и ϵ – некоторые положительные постоянные. Параметры гироскопа всегда подбираются так, чтобы имело место условие $K \gg HU \cos \varphi$. В рамках уравнений (4.1) момент $K\beta$ имитирует маятниковый эффект, вертикальный момент $K\epsilon\beta$ обеспечивает погашение колебаний компаса. Характеристическое уравнение системы (4.1) будет

$$H\lambda^2 + \epsilon K\lambda + (K + HU \cos \varphi)U \cos \varphi = 0 \quad (4.2)$$

Отсюда следует, что при положительных величинах ϵ и K тривиальное решение системы (4.1) асимптотически устойчиво.

Качественная картина существенно изменяется, если, не ограничиваясь рамками прецессионной теории, учесть в уравнениях (4.1) инерционные члены. В этом случае уравнения будут иметь вид

$$J_1\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + HU \cos \varphi \alpha + K\epsilon\beta = 0 \quad (4.3)$$

$$J_2\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + (K + HU \cos \varphi)\beta = 0$$

где J_1 и J_2 – суммарные моменты инерции курсоуказателя относительно осей его подвеса. Характеристическое уравнение системы (4.3) будет

$$J_1 J_2 \lambda^4 + [H^2 + KJ_1 + (J_1 + J_2)HU \cos \varphi]\lambda^2 + K\epsilon H\lambda + (K + HU \cos \varphi)HU \cos \varphi = 0 \quad (4.4)$$

В силу наличия в уравнении (4.4) линейного члена относительно λ и отсутствия члена с λ^3 имеет место, вопреки уравнению (4.2), неустойчивость тривиального решения системы (4.3). Указанная неустойчивость является следствием неконсервативной структуры вертикальной составляющей $K\epsilon\beta$ корректирующего момента, что приводит при отсутствии диссипативных сил к расходимости нутационных колебаний.

Действительно, из матрицы позиционных сил системы (4.3) выделяется неконсервативная матрица $P = (K\epsilon/2)S$. В этом случае асимптотическая устойчивость может быть достигнута лишь при учете в уравнениях (4.3) диссипативных сил. Соответствующие уравнения имеют вид

$$J_1\ddot{\alpha} + b_1\dot{\alpha} + H(\dot{\beta} + U \cos \varphi \alpha) + K\epsilon\beta = 0 \quad (4.5)$$

$$J_2\ddot{\beta} + b_2\dot{\beta} - H\dot{\alpha} + (K + HU \cos \varphi)\beta = 0$$

Если разделить матрицу позиционных членов в уравнениях (4.5) соответственно на симметрическую и кососимметрическую части, то указанная система окажется частным случаем системы, описываемой матричным уравнением (1.1). Имеем

$$x = \text{col}(\alpha, \beta), \quad J = \text{diag}(J_1, J_2), \quad D = \text{diag}(b_1, b_2)$$

$$HG = HS, \quad P = (K\epsilon/2)S$$

Таким образом, матрицы G и P имеют структуру матриц (3.1), а потому рассматриваемый гирокомпас принадлежит к классу систем, разобранных в разд. 3.

Если воспользоваться концепцией Зоммерфельда–Гринхилла, которая оказывается весьма удобной в прикладных расчетах, то следует положить $b_1 = \mu J_1$, $b_2 = \mu J_2$. В этом случае можно непосредственно использовать условия (3.10), обеспечивающие погашение нутационных колебаний. Имеем неравенство

$$2H\mu > K\epsilon \quad (4.6)$$

При $\epsilon > 0$ и $K > 0$ обеспечивается, как это следует из (4.2), асимптотическая устойчивость и в прецессионных уравнениях (4.1).

Условие (4.6) совпадает с аналогичным условием (4.4) работы [9] (если положить в нем $Q_1 = \mu A$, $Q_2 = \mu B$), полученным применительно к однороторному гирокомпасу маятникового типа.

Из неравенства (4.6) можно получить оценку нижней границы коэффициента диссипации μ , обеспечивающую асимптотическую устойчивость в уравнениях (4.5). Эта оценка не накладывает существенных ограничений на величину μ и, как правило, с большим запасом обеспечивается всегда присутствующим малым трением в элементах подвеса системы. Однако при обоснованном переходе к прецессионным уравнениям (4.1) условие (4.6) должно быть оговорено.

Условие (4.6) можно получить и с помощью критерия Гурвица, применив его к характеристическому уравнению

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (4.7)$$

системы (4.5), где

$$a_0 = J_1J_2, \quad a_1 = 2\mu J_1J_2$$

$$a_2 = [H^2 + KJ_1 + (J_1 + J_2)HU \cos \varphi + \mu^2 J_1J_2] \quad (4.8)$$

$$a_3 = HK\epsilon + [KJ_1 + (J_1 + J_2)HU \cos \varphi]\mu$$

$$a_4 = (K + HU \cos \varphi)HU \cos \varphi$$

Применительно к уравнению (4.7) условия Гурвица сводятся, вследствие положительности коэффициентов указанного уравнения, к неравенству

$$\Gamma \equiv a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0 \quad (4.9)$$

Учитывая выражения (4.8), получаем из (4.9)

$$\Gamma = H^2 K \epsilon (2\mu H - K \epsilon) + \Delta > 0 \quad (4.10)$$

где

$$\Delta = \{2H^2 [KJ_1 + (J_1 + J_2)HU \cos \varphi] + KJ_1^2 (K + 2\nu HU \cos \varphi) - (J_1 - J_2)^2 (HU \cos \varphi)^2\} \mu^2 + \\ + 2\epsilon J_1 J_2 K \mu^3 + 2J_1 J_2 [KJ_1 + (J_1 + J_2)HU \cos \varphi] \mu^4, \quad \nu = (J_1 - J_2)J_1^{-1} \quad (4.11)$$

Добавка Δ , представляющая совокупность слагаемых порядка μ^2 и выше, не может в силу предположения малости коэффициента демпфирования μ и большой величины собственного кинетического момента H повлиять на знак величины (4.9). Последний определяется в данном случае первым слагаемым в (4.10), что и приводит к условию (4.6).

Таким образом, непосредственное применение условия (3.10), приводящее к неравенству (4.6), в данном случае оказывается значительно более простым, чем выполнение, согласно критерию Гурвица, довольно громоздких вычислений, приводящих к выражениям (4.10) и (4.11).

5. Четырехгироскопный гироскопизонт. Ниже рассматривается, в свете теории, изложенной в разд. 1–3, один из вариантов силового гироскопизонта с управлением по типу радиальной коррекции. Описание таких устройств, а также их теория, ограниченная рамками прецессионной постановки, содержатся в монографии [13]. На основе полных уравнений (с учетом инерционных членов) прямым методом Ляпунова была исследована [14] устойчивость четырехгироскопного гироскопизонта для случая неподвижного основания.

Рассматриваемая система представляет собой установленную в кардановом подвесе астатическую платформу, стабилизируемую в горизонте посредством четырех одинаковых гироскопов с вертикальными осями их кожухов. Гироскопы попарно связаны антипараллелограммами, обеспечивающими их разворот в плоскости платформы на одинаковые углы в противоположные стороны. Управление движением платформы осуществляется специальной системой коррекции, с помощью которой вырабатываются корректирующие моменты относительно осей платформы и кожухов гироскопов.

Уравнения движения платформы в предположении ее установки на основании, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω относительно вертикали, могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + 2H\dot{x}_2 + 2H\omega x_3 + s_1 x_2 &= 0 \\ J_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 - 2H\dot{x}_1 + 2H\omega x_4 - s_2 x_1 &= 0 \\ J_2 \ddot{x}_3 + b_2 \dot{x}_3 + 2H\dot{x}_4 + 2H\omega x_1 + s_2 x_4 &= 0 \\ J_3 \ddot{x}_4 + b_3 \dot{x}_4 - 2H\dot{x}_3 + 2H\omega x_2 - s_1 x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

где x_1, x_4 – углы отклонения платформы от плоскости горизонта в возмущенном движении системы; x_2, x_3 – углы отклонения каждой пары гироскопов относительно вертикальных осей их кожухов; b_1, b_2, b_3 – коэффициенты вязкого трения в подвесе платформы и гироскопов; H – собственный кинетический момент каждого из четырех гироскопов; s_1, s_2 – положительные коэффициенты пропорциональности в моментах коррекции; J_1, J_3, J_2 – соответственно суммарные моменты инерции системы относительно осей платформы и вертикальных осей кожухов гироскопов.

Разделяя матрицу позиционных членов в системе (5.1) на симметрическую и кососимметрическую составляющие, приведем названную систему к виду, охватываемому

исходным матричным уравнением (1.1), где в данном случае следует считать

$$x = \text{col}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad J = \text{diag}(J_1, J_2, J_2, J_3)$$

$$D = \text{diag}(b_1, b_2, b_2, b_3), \quad HG = 2H \text{diag}(S, S), \quad P = s \text{diag}(S, S)$$

$$\Pi = \begin{Bmatrix} mT & 2H\omega E \\ 2H\omega E & -mT \end{Bmatrix}, \quad T = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

$$s = \frac{1}{2}(s_1 + s_2), \quad m = \frac{1}{2}(s_1 - s_2)$$

Сопоставляя полученные выражения матриц G и P с представлениями (3.1), убеждаемся, что рассматриваемый гироскоп принадлежит к классу систем, рассмотренных в разд. 3. Полагая $L = \|l_{ij}\|_1^4$, получаем уравнение (3.2) в виде

$$\|l_{ij}\|_1^4 = \text{diag} \left(\begin{Bmatrix} 0 & -b_1^{-1}s \\ b_2^{-1}s & 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 & -b_2^{-1}s \\ b_3^{-1}s & 0 \end{Bmatrix} \right) \|l_{ij}\| \quad (5.3)$$

Удовлетворяя в решениях уравнения (5.3) условию $L(0) = E$, приходим к матрице Ляпунова $L = \text{diag}(L_1, L_2)$. Составляющие L_1, L_2 могут быть найдены из общего представления (3.5), если принять $q = 2$ и учесть обозначения в уравнениях (5.1).

Если в соответствии с концепцией Зоммерфельда–Гринхилла положить $b_1 = \mu J_1$, $b_2 = \mu J_2$, $b_3 = \mu J_3$, то для оценки нижней границы коэффициента μ , обеспечивающей погашение нутационных колебаний, можно использовать условия (3.10), откуда с учетом обозначений (5.2) имеем

$$\mu > (s_1 + s_2)/(4H) \quad (5.4)$$

В случае неподвижного основания ($\omega \equiv 0$), когда система (5.1) распадается на две независимые системы относительно (x_1, x_2) и (x_3, x_4) , выполнение условия (5.4) обеспечивает асимптотическую устойчивость гироскопизации.

Если $\omega \neq 0$, чему соответствует $\Pi \neq 0$ в (5.1), необходимо, как уже отмечалось в разд. 3, дополнительное исследование прецессионной системы, получаем из (5.1). Для случая $b_3 = b_1$ такое исследование было проведено [13] с помощью критерия Гурвица и сводится применительно к обозначениям в системе (5.1) к неравенству

$$s_1 s_2 > b_1 b_2 \omega^2 \quad (5.5)$$

Одновременное выполнение условий (5.4) и (5.5) обеспечивает асимптотическую устойчивость рассматриваемой системы при $\omega \neq 0$.

Неравенство (5.5) согласуется с условиями положительной определенности матрицы $W_1 = JW$, где W определяется согласно последней формуле (2.8), если учесть, что преобразование подобия (2.8) не изменяет характеристических чисел матриц V и W в уравнении (2.7). При этом в матрице W_1 для данного случая следует удерживать, по самому способу получения прецессионных уравнений, лишь составляющие, содержащие множителем величину H собственного кинетического момента каждого из четырех гироскопов. Имеем

$$W_1 = 2H \begin{Bmatrix} b_2^{-1}s & 0 & \omega & 0 \\ 0 & b_1^{-1}s & 0 & \omega \\ \omega & 0 & b_3^{-1}s & 0 \\ 0 & \omega & 0 & b_2^{-1}s \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

Применение критерия Сильвестра к симметрической матрице (5.6) приводит к условиям ее положительной определенности. Полагая в них $b_3 = b_1$, получаем

неравенство

$$(s_1 + s_2)^2 > 4b_1b_2\omega^2 \quad (5.7)$$

Поскольку при $s_1 \neq s_2$ всегда $(s_1 + s_2)^2 > 4s_1s_2$, то при выполнении неравенства (5.5) и подавно выполняется условие (5.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошляков В.Н. О структурных преобразованиях уравнений возмущенного движения некоторого класса динамических систем // Укр. мат. журн. 1997. Т. 49. № 4. С. 535–539.
2. Кошляков В.Н. О структурных преобразованиях динамических систем с гироскопическими силами // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 774–780.
3. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
4. Новоселов В.С. Движение гироскопических систем // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 1. С. 176–178.
5. Новожилов И.В. О переходе к прецессионным уравнениям гироскопии на бесконечном интервале времени // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 10–15.
6. Кобрин А.И., Мартыненко Ю.Г., Новожилов И.В. О прецессионных уравнениях гироскопических систем // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 230–237.
7. Горелова Е.Я., Стрыгин В.В. Полное разделение движения в некоторых системах гироскопического типа // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 8–13.
8. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
9. Кошляков В.Н., Соболев В.А. К проблеме допустимости применения прецессионных уравнений гироскопических компасов // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 17–22.
10. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М. Гостехиздат, 1955. 207 с.
11. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. М.: Изд-во МГУ, 1976. 401 с.
12. Агафонов С.А. Об устойчивости неконсервативных систем // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1972. № 4. С. 87–90.
13. Ройтенберг Я.Н. Гироскопы. М.: Наука, 1975. 592 с.
14. Агафонов С.А. Об асимптотической устойчивости неконсервативных систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 3–8.

Киев

Поступила в редакцию
6.IX.1999