

УДК 531.36 : 62–50

© 2000 г. Н.В. Смирнов, Т.Е. Смирнова

СИНТЕЗ МНОГОПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Для билинейной нестационарной управляемой системы с многомерным входом рассматривается задача синтеза многопрограммных управлений. Доказывается теорема о существовании и представлении управления, обеспечивающего выполнение исходной системой заданного множества программных движений, каждое из которых будет асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Была рассмотрена [1, 2] проблема представления правых частей систем дифференциальных уравнений, имеющих наперед заданное конечное семейство решений, а также задача синтеза управлений, которые реализуют заданную совокупность программных движений. Особое внимание было уделено [2] представлению таких управлений в линейных стационарных управляемых системах. Применение полученных результатов иллюстрировалось [1, 2] на задаче управления механическими системами, описываемыми уравнениями Лагранжа второго рода и задаче управления движением заряженных частиц в электромагнитном поле.

Ниже показана возможность распространения данного подхода на класс билинейных управляемых систем, являющихся более гибким средством аппроксимации нелинейных систем, чем линейные системы. Был предложен [3] один из методов построения билинейных аппроксимаций, рассмотрен случай билинейной стационарной системы с одним скалярным управлением [4].

1. Постановка задачи. Рассматривается билинейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = \left(A(t) + \sum_{i=1}^r B_i(t)u_i \right) x + F(t) \quad (1.1)$$

где x – n -мерный вектор фазового состояния; $u_1, \dots, u_r$ – скалярные управления; $A(t), B_i(t)$ ($i = 1, \dots, r$) – вещественные, непрерывные $(n \times n)$ -матрицы с ограниченными при $t \geq 0$ элементами; $F(t)$ – вещественная, непрерывная вектор-функция, заданная при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Введем в рассмотрение вектор управлений $u = (u_1, \dots, u_r)^T$. Предположим, что для системы (1.1) построены программные управления $u_1(t), \dots, u_N(t)$ и соответствующие им программные движения $x_1(t), \dots, x_N(t)$. Число программных движений N не связано с размерностью системы (1.1) и размерностью пространства управлений.

Здесь не рассматриваются методы построения таких управлений. Отметим лишь, что каждое программное управление $u_j(t)$ и программное движение $x_j(t)$ строится как решения некоторой граничной задачи, причем граничные условия различны при всех $j = 1, \dots, N$. Таким образом, если программное управление $u_j(t) = (u_{j1}(t), \dots, u_{jr}(t))^T$ и соответствующее программное движение $x_j(t)$ подставить в систему (1.1), то получится тождество по t на интервале, где эти функции определены

$$\dot{x}_j \equiv P_j(t)x_j + F(t), \quad P_j(t) = A(t) + \sum_{i=1}^r B_i(t)u_{ji}(t) \quad (1.2)$$

Задача. Требуется построить управление

$$u = u(x, t) \quad (1.3)$$

которое реализует заданные программные движения $x_1(t), \dots, x_N(t)$ и обеспечивает их асимптотическую устойчивость по Ляпунову.

2. Теорема о представлении стабилизирующего управления.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) программные движения $x_1(t), \dots, x_N(t)$ системы (1.1) при управлениях $u_1(t), \dots, u_N(t)$ различимы, т.е.

$$\inf_{t \geq 0} \|x_i - x_j\| > 0, \quad i \neq j$$

2) вспомогательные линейные управляемые системы

$$\dot{y}_j = P_j(t)y_j + Q_j(t)v_j \quad (2.1)$$

где

$$Q_j(t) = (B_1(t)x_j(t), \dots, B_r(t)x_j(t)) \quad (2.2)$$

стабилизуемы управлениями

$$v_j = C_j(t)y_j \quad (2.3)$$

Здесь $y_j = x - x_j(t)$, $v_j = u - u_j(t)$ — отклонения от программных движений и программных управлений соответственно.

Тогда существует управление (1.3), реализующее программные движения $x_1(t), \dots, x_N(t)$, при этом каждое из них будет асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Прежде чем приступить к доказательству, приведем несколько известных определений и утверждений, на которые будем ссылаться.

Рассмотрим вспомогательную линейную управляемую систему

$$\dot{x} = P(t)x + q(t)u \quad (2.4)$$

Элементы $(n \times n)$ -матрицы $P(t)$ и n -мерного вектора $q(t)$ являются вещественными, непрерывными при $t \geq 0$ функциями; x — n -мерный вектор фазового состояния; u — скалярное управление.

Теорема 2 [5]. Пусть $P(t) \in C_{t \in [0, +\infty)}^{2n-2}$, $q(t) \in C_{t \in [0, +\infty)}^{2n-1}$, $D = P(t) - E_n d/dt$ — оператор дифференцирования и матрица $S = (q(t), Dq(t), \dots, D^{n-1}q(t))$ является матрицей Ляпунова. Тогда систему (2.4) можно преобразовать к каноническому виду Фробениуса, а управление $u = m^T x$ выбрать таким образом, чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (P(t) + q(t)m^T)x$$

была правильной (приводимой) и имела наперед заданные характеристические показатели.

Определение 1 [6]. Квадратная матрица $S(t)$ называется матрицей Ляпунова, если

1) $S(t) \in C_{t \in [0, +\infty)}^1$;

2) матрицы $S(t)$ и $\dot{S}(t)$ — ограничены при $t \in [0, +\infty)$;

3) модуль определителя матрицы $S(t)$ равномерно по $t \geq 0$ отделен от нуля.

Замечание 1. Было показано [5], что теорема 2 остается в силе и для линейных систем с r -мерным управлением. Доказательство теоремы содержит конструктивный алгоритм построения таких управлений.

Определение 2. Линейную управляемую систему, для которой выполнены условия теоремы 2, будем называть стабилизируемой.

Замечание 2. Условие 2 теоремы 1 означает, что каждая система (2.1) стабилизируема в смысле определения 2 и стабилизирующее управление (2.3) построено.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим управление (1.3) в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N \left(\mathbf{u}_j + \mathbf{C}_j(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - 2\mathbf{u}_j(t) \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^2} \right) p_j(\mathbf{x}, t) \quad (2.5)$$

где

$$p_j(\mathbf{x}, t) = \prod_{i=1, i \neq j}^N \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^2}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^2} \quad (2.6)$$

Для управления (2.5) и скалярных функций (2.6) выполнены следующие очевидные тождества:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_j(t), t) \equiv \mathbf{u}_j(t); \quad p_j(\mathbf{x}_i, t) \equiv 0, \quad i \neq j; \quad p_j(\mathbf{x}_j, t) \equiv 1$$

В силу этих свойств система (1.1), замкнутая управлением (2.5), (2.6), имеет заданные программные движения $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)$, т.е. будет двигаться по одному из них в случае точной установки соответствующих начальных данных.

Перейдем к доказательству асимптотической устойчивости программных движений замкнутой системы.

Обозначим через $u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_r(\mathbf{x}, t)$ элементы вектора $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Рассмотрим произвольное движение $\mathbf{x}_k(t)$ ($k = 1, \dots, N$) и построим для него систему в отклонениях. Для отклонения $\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t)$ получим систему

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_k = & \left(\mathbf{A}(t) + \sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i(t) u_i(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k, t) \right) \mathbf{y}_k + \\ & + \left(\sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i(t) u_i(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k, t) \right) \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i(t) \mathbf{x}_k(t) u_i(\mathbf{x}_k, t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В системе (2.7) выделим линейное приближение. Для этого найдем представление для функций $u_j(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k, t)$. Используя вид управления (2.5), получим

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k, t) = \sum_{j=1}^N (\mathbf{u}_j(t) + \mathbf{C}_j(t)(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) - 2\mathbf{u}_j(t) S_{jk}) p_j(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k, t) \quad (2.8)$$

$$S_{jk} = \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^2} (\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)$$

Было показано [4], что при $j \neq k$ порядок функций $p_j(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k, t)$ ($j = 1, \dots, N$) по компонентам вектора $\mathbf{y}_k$ не меньше двух. Следовательно, линейные члены по $\mathbf{y}_k$ в правой части равенства (2.8) существуют только при $j = k$. Рассмотрим слагаемое при $j = k$. После преобразований оно запишется в виде

$$\mathbf{u}_k(t) + \mathbf{C}_k(t) \mathbf{y}_k + \tilde{\mathbf{u}}_k \quad (2.9)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = 2(\mathbf{C}_k(t) \mathbf{y}_k - 2\mathbf{u}_k(t) s_k) s_k + (\mathbf{u}_k(t) + \mathbf{C}_k(t) \mathbf{y}_k - 2\mathbf{u}_k(t) s_k) h_k(\mathbf{y}_k)$$

$$s_k = \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i}{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)^2} \mathbf{y}_k$$

Здесь использовано представление функций $p_k(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k, t)$ из [4], причем порядок функции $h_k(\mathbf{y}_k)$ по компонентам вектора $\mathbf{y}_k$ не меньше двух.

Очевидно, что порядок компонент вектора $\tilde{\mathbf{u}}_k$ по y_k также не меньше двух. В результате равенство (2.8) принимает вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k, t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{C}_k(t)\mathbf{y}_k + \hat{\mathbf{u}}_k \quad (2.10)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \sum_{j=1, j \neq k}^N (\mathbf{u}_j(t) + \mathbf{C}_j(t)(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) - 2\mathbf{u}_j(t)S_{jk})p_j(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k, t)$$

Используя найденное представление (2.10) в правой части системы (2.7) и учитывая обозначения (1.2), (2.2), после преобразований систему в отклонениях для программного движения $\mathbf{x}_k(t)$ запишем в окончательном виде

$$\dot{\mathbf{y}}_k = (\mathbf{P}_k(t) + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{C}_k(t))\mathbf{y}_k + \mathbf{g}_k(\mathbf{y}_k) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{y}_k) = \left(\sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i(t)(\mathbf{c}_{ki}(t)\mathbf{y}_k + \hat{u}_{ki}) \right) \mathbf{y}_k + \sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i(t)\mathbf{x}_k(t)\hat{u}_{ki}$$

Здесь $\hat{u}_{ki}$ — компоненты вектора $\hat{\mathbf{u}}_k$; $\mathbf{c}_{ki}(t)\mathbf{y}_k$ — скалярное произведение i -й строки матрицы $\mathbf{C}_k(t)$ и вектора $\mathbf{y}_k$; $i = 1, \dots, r$.

По второму условию теоремы все системы (2.1) стабилизируемы. В этом случае по теореме 2 для всех $k = 1, \dots, N$ существуют $(r \times n)$ -матрицы $\bar{\mathbf{C}}_k(t)$, такие, что линейные системы

$$\dot{\mathbf{y}}_k = (\mathbf{P}_k(t) + \mathbf{Q}_k(t)\bar{\mathbf{C}}_k(t))\mathbf{y}_k$$

асимптотически устойчивы по Ляпунову. Отметим, что был приведен [5] алгоритм построения таких матриц.

Пусть все матрицы $\bar{\mathbf{C}}_k(t)$ ($k = 1, \dots, N$) построены. По теореме об устойчивости по линейному приближению [7] при $\mathbf{C}_k(t) = \bar{\mathbf{C}}_k(t)$ все системы (2.11) асимптотически устойчивы по Ляпунову. Следовательно, управление (2.5), (2.6), где $\mathbf{C}_j(t) = \bar{\mathbf{C}}_j(t)$, обеспечивает системе (1.1) асимптотически устойчивые программные движения $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов В.И. Интерполяция систем дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1991. № 1. С. 28–31.
2. Зубов В.И. Синтез многопрограммных устойчивых управлений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 274–277.
3. Svoronos S., Stephanopoulos G., Aris R. Bilinear approximation of general non-linear dynamic systems with linear inputs // Intern. J. Control. 1980. V. 31. № 1. P. 109–126.
4. Smirnov N.V., Smirnova T.E. The problem of the stabilization for some programmed motions of the bilinear stationary system // Proc. of 3 Intern. Workshop: Beam Dynamics and Optimization. St.-Petersburg: BDM, 1996. P. 258–263.
5. Смирнов Е.Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 198 с.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Санкт-Петербург
e-mail: nikolay.smirnov@pobox.spbu.ru

Поступила в редакцию
13.VII.1999