

УДК 62–50

© 2000 г. Ю.К. Зотов

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТРАНСПОРТНОГО РОБОТА

Рассматривается нелинейная математическая модель движения транспортного робота (ТР) с гусеничным шасси и с приводами на базе двигателей постоянного тока, являющегося неголономной электромеханической системой. Построены нелинейные канонические преобразования координат пространства состояний и управлений, приводящие исходные уравнения движения ТР к более простой канонической форме, удобной для анализа и синтеза систем управления ТР. Найдены условия управляемости ТР как объекта управления. Даны алгоритмы построения программных движений (ПД) ТР. Синтезированы стабилизирующие законы управления, обеспечивающие асимптотическую устойчивость ПД ТР и заданный характер переходных процессов.

1. Постановка задачи. Уравнения математической модели плоскопараллельного движения по недеформированному горизонтальному основанию ТР с гусеничным шасси, в приводах которого используются двигатели постоянного тока (ДПТ) с независимым возбуждением, а механизмы передачи движения (трансмиссии) имеют абсолютно жесткие элементы, при ряде упрощающих допущений ([1, с. 112–116]; [2]) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= V_c \cos \psi_c, \quad \dot{y}_c = V_c \sin \psi_c \\ m_0 \dot{V}_c &= -k_{f011} V_c - f_1 mg + (Q_{u1} + Q_{u2})/r \\ J_z \ddot{\psi}_c &= -k_{f022} \dot{\psi}_c - f_2 mg + (Q_{u2} - Q_{u1})l/r \\ J_i \ddot{\alpha}_i + k_{f1ii} \dot{\alpha}_i + i_{pi}^{-1} \eta_{pi}^{-1} Q_{ui} &= k_{mi} I_{ai} \\ L_{ai} \dot{I}_{ai} + R_{ai} I_{ai} + k_{ei} \dot{\alpha}_i &= u_{ai} \\ \alpha_i &= i_{pi} q_i; \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь x_c, y_c – координаты центра масс ТР (середины оси ведущих колес (звездочек)) в неподвижной декартовой системе координат Oxy ; ψ_c – курсовой угол – угол наклона продольной оси ТР к оси Ox ; $V_c = r(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)/2$ – скорость центра масс ТР в направлении продольной оси ТР, совпадающей с касательной к траектории движения ТР, т.е. V_c – проекция вектора скорости V_c центра масс ТР (также направленного вдоль продольной оси ТР) на ось Sx' связанной (подвижной) декартовой системы координат $Sx'y'$, у которой ось Sx' направлена от центра масс ТР по продольной оси корпуса ТР к передней части корпуса ТР; считается, что при $V_c > 0$ ТР движется в направлении, которое совпадает с направлением оси Sx' , а при $V_c < 0$ – в направлении, противоположном направлению оси Sx' ; точка над символом означает операцию дифференцирования по времени t ; r и $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ – радиус и угловые скорости ведущих колес (звездочек) левого, правого бортов ТР соответственно; $\psi_c = (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)r/(2l)$ – курсовая

угловая скорость ТР относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс ТР; $2l$ – ширина колеи ТР; Q_{u1}, Q_{u2} – компоненты двумерного вектора $Q_u = \text{col}(Q_{u1}, Q_{u2})$ обобщенных (вращающих) моментов Q_{u1}, Q_{u2} , передаваемых от валов двигателей через трансмиссии к левому, правому ведущим колесам; $P_u = (Q_{u1} + Q_{u2})/r = P_{u1} + P_{u2}$ – сила тяги гусениц ТР; $P_{ui} = Q_{ui}/r$ – сила тяги i -й гусеницы ТР; $M_u = (Q_{u2} - Q_{u1})/l$ – поворачивающий момент, создаваемый силами тяги P_{u1}, P_{u2} гусениц ТР; $m_0 = m + 2J_0/(r^2)$ – приведенная масса ТР; m – масса ТР; J_0 – приведенный момент инерции всех вращающихся деталей и гусеницы, размещенных на одном борту ТР; J_z – суммарный момент инерции ТР относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс ТР; k_{f011}, f_1 – коэффициенты силы сопротивления $F_c = -k_{f011}V_c - f_1 mg$ продольному движению ТР; g – ускорение силы тяжести; k_{f022}, f_2 – коэффициент момента сопротивления $M_c = -k_{f022}\dot{\psi}_c - f_2 mg$ вращательному движению ТР вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс ТР; α_i – угол поворота вала i -го двигателя;

$$I_a = \text{col}(I_{a1}, I_{a2}) \quad (1.2)$$

– двумерный вектор токов I_{a1}, I_{a2} в якорных цепях ДПТ; J_i – момент инерции ротора i -го двигателя; k_{f1i} – коэффициент момента сопротивления вязкого трения $M_{ci} = -k_{f1i}\dot{\alpha}_i$ на валу i -го двигателя; i_{pi}, η_{pi} – коэффициенты передачи и КПД i -го редуктора трансмиссии; k_{mi} – коэффициент электромагнитного момента $M_i = k_{mi}I_{ai}$ i -го ДПТ; L_{ai}, R_{ai} – суммарные индуктивность и активное сопротивление якорной цепи i -го ДПТ; k_{ei} – коэффициент пропорциональности противо-ЭДС $u_{ei} = k_{ei}\dot{\alpha}_i$ i -го ДПТ;

$$u_a = \text{col}(u_{a1}, u_{a2}) \quad (1.3)$$

– двумерный вектор напряжений u_{a1}, u_{a2} , подаваемых на якорные цепи ДПТ;

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \kappa_0 \begin{bmatrix} V_c \\ \dot{\psi}_c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P_u \\ M_u \end{bmatrix} = \kappa_0^* Q_u, \quad \kappa_0 = \begin{bmatrix} 1/r - l/r \\ 1/r \quad l/r \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

где звездочка означает операцию транспонирования.

Отметим, что поскольку в системе уравнений движения ТР (1.1) первые два уравнения описывают неголономные связи [3] между гусеничным шасси и опорной горизонтальной поверхностью (осуществляемые ведущими звездочками (колесами) гусеничного шасси), то модель динамики ТР (1.1) является неголономной электро-механической системой.

Исключив из уравнений (1.1) переменные $Q_{u1}, Q_{u2}, \alpha_1, \alpha_2$, а также используя обозначения (1.2), (1.3), соотношения (1.4), получим уравнения движения ТР в виде следующей системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно переменных $x_c, y_c, V_c, \psi_c, I_{a1}, I_{a2}$:

$$\dot{x}_c = V_c \cos \psi_c, \quad \dot{y}_c = V_c \sin \psi_c$$

$$\begin{bmatrix} V_c \\ \dot{\psi}_c \end{bmatrix}^* = -k_f \begin{bmatrix} V_c \\ \dot{\psi}_c \end{bmatrix} - F_f + A^{-1} I_a \quad (1.5)$$

$$\dot{I}_a = L_a^{-1} \left(u_a - R_a I_a - k_e i_p \kappa_0 \begin{bmatrix} V_c \\ \dot{\psi}_c \end{bmatrix} \right)$$

Здесь

$$A = \Theta_1 + \Theta_0 A_0 = \| a_{ij} \|_{i,j=1,2}, \quad A_0 = \text{diag} \| m_0, J_z \|$$

$$\Theta_0 = k_m^{-1} i_p^{-1} \eta_p^{-1} [\kappa_0^*]^{-1}, \quad \Theta_1 = k_m^{-1} J_i i_p \kappa_0$$

$$k_f = A^{-1}k_m^{-1}[i_p^{-1}\eta_p^{-1}(\kappa_0^*)^{-1}k_{f0} + k_{f1}i_p\kappa_0] = \|k_{fij}\|_{i,j=1,2} \quad (1.6)$$

$$F_f = \text{col}(F_{f1}, F_{f2}) = A^{-1}\Theta_0 \begin{vmatrix} f_1 mg \\ f_2 mg \end{vmatrix}$$

$A, \Theta_0, \Theta_1, k_f$ — постоянные (2×2) -матрицы; F_f — двумерный вектор; A_0 и $J, k_{j0}, k_{j1}, i_p, \eta_p, k_m, L_a, R_a, k_e$ — диагональные (2×2) -матрицы с диагональными элементами: m_0, J_z и $J_i, k_{j0ii}, k_{j1ii}, i_{pi}, \eta_{pi}, k_{mi}, L_{ai}, R_{ai}, k_{ei}$ ($i = 1, 2$) соответственно.

Сделаем неособые линейные преобразования переменных I_a (1.2) и управлений u_a (1.3) по формулам

$$\bar{I}_a = \text{col}(\bar{I}_{a1}, \bar{I}_{a2}) = A^{-1}I_a \quad (1.7)$$

$$\bar{u}_a = \text{col}(\bar{u}_{a1}, \bar{u}_{a2}) = A^{-1}L_a^{-1}u_a \quad (1.8)$$

Будем считать вспомогательные управляющие воздействия $\bar{u}_{a1}, \bar{u}_{a2}$ такими, что

$$\dot{\bar{u}}_{a1} = u_1, \quad \bar{u}_{a2} \equiv u_2 \quad (1.9)$$

где u_1, u_2 — компоненты вектора управлений

$$u = \text{col}(u_1, u_2) \quad (1.10)$$

подаваемых на входы системы (1.5)–(1.9).

Тогда уравнения движения ТР (1.5)–(1.10) можно записать в виде системы нелинейных ОДУ

$$\dot{z} = F(z, u), \quad z_0 = z(t_0), \quad t \geq t_0 \quad (1.11)$$

Здесь

$$z = \text{col}(z_1, z_2, z_3, z_4) \quad (1.12)$$

$$z_1 = \text{col}(x_c, y_c), \quad z_2 = \text{col}(V_c, \psi_c), \quad z_3 = \text{col}(\bar{I}_{a1}, \dot{\bar{I}}_{a2}), \quad z_4 = \text{col}(\bar{u}_{a1}, \bar{I}_{a2})$$

$$F(z, u) = \text{col}(F_1(z_2), F_2(z_2^3), F_3(z_2^4), F_4(z_2^4, u)) \quad (1.13)$$

$$z_i = \text{col}(z_{i1}, z_{i2}), \quad z_i^j = \text{col}(z_i, z_{i+1}, \dots, z_j), \quad j \geq i; \quad z_i^i = z_i$$

$$F_1(z_2) = \text{col}(z_{21} \cos z_{22}, z_{21} \sin z_{22})$$

$$F_2(z_2^3) = C_{20} + C_{22}z_{21} + D_2z_3$$

$$F_3(z_2^4) = C_{30} + C_{32}z_{32} + C_{33}z_3 + D_3z_4$$

$$F_4(z_2^4, u) = C_{42}z_{21} + C_{43}z_3 + C_{44}z_{42} + u$$

$$C_{20} = \begin{vmatrix} -F_{f1} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} -k_{f11} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -k_{f12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_{30} = \begin{vmatrix} 0 \\ -F_{f2} \end{vmatrix}, \quad C_{32} = \begin{vmatrix} -\bar{k}_{e11} \\ -k_{f21} \end{vmatrix}, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} -\bar{R}_{a11} & -\bar{k}_{e12} \\ 0 & -k_{f22} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -\bar{R}_{a12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad C_{42} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\bar{k}_{e21} \end{vmatrix}, \quad C_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{R}_{a21} & -\bar{k}_{e22} \end{vmatrix}$$

$$C_{44} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\bar{R}_{a22} \end{Bmatrix}, \quad \bar{R}_a = A^{-1}L_a^{-1}R_aA = \|\bar{R}_{aij}\|_{i,j=1,2}$$

$$\bar{k}_e = A^{-1}L_a^{-1}k_e i_p \kappa_0 = \|\bar{k}_{eij}\|_{i,j=1,2}$$

Отметим, что вектор состояния z (1.12) системы (1.11)–(1.13) связан с вектором состояния

$$\bar{z} = \text{col}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4) \quad (1.14)$$

$$\bar{z}_1 = \text{col}(x_c, y_c), \quad \bar{z}_2 = \text{col}(V_c, \psi_c), \quad \bar{z}_3 = \dot{\psi}_c, \quad \bar{z}_4 = I_a = \text{col}(I_{a1}, I_{a2})$$

исходных уравнений движения ТР (1.5), (1.6) линейным преобразованием вида

$$z = H_1 \bar{z} + H_0 u_a \quad (1.15)$$

а вектор $\bar{z}$ связан с вектором z линейным преобразованием вида

$$\bar{z} = H_2 z \quad (1.16)$$

где

$$H_1 = \text{diag}(I_4, H_{11}), \quad H_{11} = \begin{Bmatrix} 0 & a_{111} & a_{112} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{121} & a_{122} \end{Bmatrix}, \quad H_0 = \begin{Bmatrix} O_{6 \times 2} \\ h_1^* A^{-1} L_a^{-1} \\ O \end{Bmatrix}$$

$$H_2 = \text{diag}(I_4, H_{21}), \quad H_{21} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{22} \end{Bmatrix}$$

H_1, H_{11}, H_0 – матрицы размерностей 8×7 , 4×3 и 8×2 ; I_m – единичная ($m \times m$)-матрица, $O_{6 \times 2}$ – нулевая матрица размерности 6×2 , O – нулевой вектор (матрица), соответствующей размерности, $h_1 = \text{col}(1, 0)$ – двумерный вектор, $A^{-1} = A_1 = \|\bar{a}_{1ij}\|_{i,j=1,2}$; H_2, H_{21} – матрицы размерностей 7×8 и 3×4 .

Отметим также, что для исходной модели динамики ТР (1.5), (1.6) компоненты u_{a1}, u_{a2} вектора напряжений u_a (1.3), подаваемых на якорные цепи ДПТ, в силу равенств (1.8), (1.9) связаны с компонентами u_1, u_2 вектора управлений u (1.10) соотношениями

$$u_{aj} = u_{aj}(t) = L_{aj} a_{j1} \int_{t_0}^t u_1(\tau) d\tau + L_{aj} a_{j2} u_2(t), \quad j = 1, 2, \quad t \geq t_0 \quad (1.17)$$

и, следовательно, исходные уравнения движения ТР (1.5), (1.6), (1.17) при учете соотношений (1.7)–(1.9), (1.14)–(1.16) эквивалентны системе – модели динамики ТР (1.11)–(1.13), (1.10). Поэтому в дальнейшем формулировка постановки задачи и ее решение приводятся для модели динамики ТР (1.11)–(1.13), (1.10).

Система (1.11)–(1.13), (1.10) называется управляемой [4], если для любых двух состояний $z_{p0} \in R^8$ и $z_{p1} \in R^8$ (где R^n – n -мерное евклидово пространство), любых $t_0 < t_1$, $t_1 - t_0 < \infty$ существует управление $u = u(t)$ (1.10), такое, что соответствующее ему решение $z(t)$ (1.12) системы (1.11)–(1.13) удовлетворяет граничным (начально-краевым) условиям

$$z(t_0) = z_{p0}, \quad z(t_1) = z_{p1} \quad (1.18)$$

Решение

$$z = z_p(t), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (1.19)$$

системы (1.11)–(1.13), (1.10), удовлетворяющее граничным условиям (1.18), будем называть программным движением (ПД), а соответствующее ему управление

$$u = u_p(t), t \in [t_0, t_1] \quad (1.20)$$

программным управлением.

Рассмотрим некоторое ПД $z_p(t)$ (1.19), (1.18) системы (1.11)–(1.13), (1.10). Будем говорить, что оно стабилизируемо, если существует закон управления с обратной связью по вектору состояния z вида

$$u = u(t, z), t \geq t_0 \quad (1.21)$$

обеспечивающий асимптотическую устойчивость ПД $z_p(t)$ (1.19), (1.18).

Рассматриваемые ниже задачи заключаются в исследовании условий управляемости и стабилизируемости математической модели движения ТР (1.11)–(1.13), (1.10) как объекта управления. Описываются алгоритмы построения ПД и синтеза стабилизирующих законов управления.

2. Уравнения движения ТР в канонической форме. Предлагаемые ниже методы исследования условий управляемости ТР, алгоритмы построения ПД, синтеза стабилизирующих управлений и анализа устойчивости ПД ТР основаны на приведении исходной модели движения ТР (1.11)–(1.13), (1.10) к канонической форме с помощью нелинейных преобразований координат пространства состояний и управлений.

Канонической формой описания уравнений движения ТР будем называть их представление в виде линейного ОДУ

$$\dot{x} = Px + Qw, x(t_0) = x_0, t \geq t_0 \quad (2.1)$$

где

$$x = \text{col}(x_1, x_2, x_3, x_4), w = \text{col}(w_1, w_2) \quad (2.2)$$

$$x_1 = \text{col}(x_c, y_c), x_i = \text{col}(x_{i1}, x_{i2}) = \dot{x}_{i-1} = x_1^{(i-1)}, i = 2, 3, 4$$

$$P = \begin{bmatrix} O & I_6 \\ O & O \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} O \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

x, x_0 – восьмимерные векторы канонических переменных состояния ТР в текущий и начальный моменты времени; $x_1^{(i)} = x_1^{(i)}(t)$ – i -я производная по t от $x_1 = x_1(t)$; $x_1^{(0)} = x_1$; $\dot{x}_i = x_1^{(i)}$; w – двумерный вектор "канонических" управлений; P, Q – постоянные блочные матрицы размерностей 8×8 и 8×2 .

3. Приведение уравнений движения ТР к каноническому виду. Построим преобразования координат пространства состояний z и управлений u исходных уравнений движения ТР (1.11)–(1.13), (1.10), которые приводят их к более простой канонической форме (2.1)–(2.3). Будем искать преобразования в виде

$$x = \Psi(z) \quad (3.1)$$

$$w = \Psi_5(z_2^4, u) \quad (3.2)$$

где Ψ, Ψ_5 – восьми- и двумерные вектор-функции

$$\Psi(z) = \text{col}(\Psi_1(z_1), \Psi_2(z_2), \Psi_3(z_2^3), \Psi_4(z_2^4)) \quad (3.3)$$

$$x_1 = \Psi_1(z_1) = z_1 \quad (3.4)$$

$\Psi_i (i = 2, 3, 4, 5)$ – двумерные вектор-функции, подлежащие определению.

Опишем алгоритм нахождения неизвестных вектор-функций $\Psi_i (i = 2, 3, 4, 5)$.

С этой целью рассмотрим тождества

$$\dot{x}_1 = \dot{\Psi}_1(z_1) = \dot{z}_1, \quad x_1^{(i)} = \dot{x}_i = \dot{\Psi}_i(z_2^i) = \sum_{k=2}^i \frac{\partial \Psi_i(z_2^i)}{\partial z_k} \dot{z}_k, \quad i = 2, 3, 4 \quad (3.5)$$

где $\partial \Psi_i(z_2^i) / \partial z_k$ — $(m \times m)$ -матрица-функция Якоби. Заменяя в (3.5) производные по времени $\dot{x}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) в силу системы (2.1)–(2.3), а $\dot{z}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) в силу системы (1.11)–(1.13), (1.10), получим соотношения

$$x_2 = F_1(z_2) = \begin{Bmatrix} z_{21} \cos z_{22} \\ z_{21} \sin z_{22} \end{Bmatrix} \equiv \Psi_2(z_2) \quad (3.6)$$

$$x_3 = \frac{\partial \Psi_2(z_2)}{\partial z_2} F_2(z_2^3) = L_2(z_2) F_2(z_2^3) = K_3(z_2) + L_3(z_2) z_3 \equiv \Psi_3(z_2^3) \quad (3.7)$$

$$(x_2 = \dot{x}_1, x_3 = \dot{x}_2 = x_1^{(2)})$$

$$L_2(z_2) = \frac{\partial \Psi_2(z_2)}{\partial z_2} = \frac{\partial F_1(z_2)}{\partial z_2} = \begin{Bmatrix} \cos z_{22} & -z_{21} \sin z_{22} \\ \sin z_{22} & z_{21} \cos z_{22} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$$K_3(z_2) = L_2(z_2)(C_{20} + C_{22}z_{21}), \quad L_3(z_2) = L_2(z_2)D_2 \quad (3.9)$$

$$x_4 = \sum_{k=2}^3 \frac{\partial \Psi_3(z_2^3)}{\partial z_k} F_k(z_2^{k+1}) = K_4(z_2^3) + L_4(z_2) z_4 \equiv \Psi_4(z_2^4) \quad (3.10)$$

$$(x_4 = \dot{x}_3 = x_1^{(3)})$$

$$K_4(z_2^3) = \frac{\partial \Psi_3(z_2^3)}{\partial z_2} F_2(z_2^3) + L_3(z_2)[C_{30} + C_{32}z_{21} + C_{33}z_3] \quad (3.11)$$

$$L_4(z_2) = \frac{\partial \Psi_3(z_2^3)}{\partial z_3} D_3 = L_3(z_2)D_3$$

$$w = \sum_{k=2}^3 \frac{\partial \Psi_4(z_2^4)}{\partial z_k} F_k(z_2^{k+1}) + \frac{\partial \Psi_4(z_2^4)}{\partial z_4} F_4(z_2^4, u) =$$

$$= K_5(z_2^4) + L_5(z_2)u \equiv \Psi_5(z_2^4, u) \quad (3.12)$$

$$(w = \dot{x}_4 = x_1^{(4)})$$

$$K_5(z_2^4) = \sum_{k=2}^3 \frac{\partial \Psi_4(z_2^4)}{\partial z_k} F_k(z_2^{k+1}) + L_4(z_2)(C_{42}z_{21} + C_{43}z_3 + C_{44}z_{42}) \quad (3.13)$$

$$L_5(z_2) = \frac{\partial \Psi_4(z_2^4)}{\partial z_4} = L_4(z_2)$$

Таким образом, построены исходные преобразования (3.1) и (3.2) в аналитическом виде (3.1), (3.3), (3.4), (3.6)–(3.11) и (3.12), (3.13) соответственно.

Покажем, что построенные исходные преобразования (3.1), (3.3), (3.4), (3.6)–(3.11) и (3.12), (3.13) однозначно разрешимы относительно z и u соответственно. С учетом равенств (3.4) имеем

$$z_1 = \Phi_1(x_1) = x_1 \quad (3.14)$$

Вычислим главные миноры Δ_1, Δ_2 матрицы L_2 (3.8)

$$\Delta_1 = \cos z_{22} > 0 \text{ при } z_{22} \in \Omega_{z_{22}} = (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\Delta_2 = z_{12} \neq 0 \text{ при } z_{21} \in \Omega_{z_{21}} = \begin{cases} \Omega_{z_{21}}^+, & \text{если } z_{21} = V_c > 0 \\ \Omega_{z_{21}}^-, & \text{если } z_{21} = V_c < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

где множества

$$\Omega_{z_{21}}^+ \equiv (\varepsilon_V, k_V) \quad (3.16)$$

$$\Omega_{z_{21}}^- \equiv (-k_V, -\varepsilon_V) \quad (3.17)$$

ε_V, k_V — некоторые положительные вещественные числа, $0 < \varepsilon_V < k_V < \infty$.

Всюду ниже для определенности (чтобы не вводить лишних обозначений и не повторять выкладок) рассмотрим случай, когда в соотношениях (3.15) фигурирует множество $\Omega_{z_{21}}$ вида (3.16), т.е.

$$\Omega_{z_{21}} = \Omega_{z_{21}}^+ \equiv (\varepsilon_V, k_V) \quad (3.18)$$

и введем в рассмотрение некоторый параметр $\rho = 1$, соответствующий этому случаю.

Отметим, что случай, когда в (3.15) фигурирует множество $\Omega_{z_{21}}$ вида (3.17), т.е.

$$\Omega_{z_{21}} = \Omega_{z_{21}}^- \equiv (-k_V, -\varepsilon_V) \quad (3.19)$$

рассматривается вполне аналогично при замене всюду ниже в разд. 2–6 соответственно множества (3.16) на множество (3.17), множества (3.18) на множество (3.19), а $\rho = 1$ на $\rho = -1$. В результате могут быть получены оценки и утверждения, аналогичные приводимым ниже.

Итак, в случае, когда в (3.15) фигурирует множество $\Omega_{z_{21}}$ вида (3.18), из теоремы 20.9 ([5, с. 484]) вытекает, что преобразование (3.6) однозначно разрешимо относительно z_2 в прямоугольной области

$$\Omega_{\Psi_2} = \{z_2 = \text{col}(z_{21}, z_{22}) \in R^2 : z_{21} \in \Omega_{z_{21}} \equiv \Omega_{z_{21}}^+, z_{22} \in \Omega_{z_{22}}\} \quad (3.20)$$

т.е. существует обратное преобразование

$$z_2 = \Phi_2(x_2) \quad (3.21)$$

$$\Phi_2(x_2) = \text{col}(\Phi_{21}(x_2), \Phi_{22}(x_2)) \quad (3.22)$$

$$\Phi_{21}(x_2) = \rho \cdot (x_{21}^2 + x_{22}^2)^{1/2} \equiv z_{21} = V_c \in \Omega_{z_{21}} \equiv \Omega_{z_{21}}^+, \rho = 1, x_2 \in \Omega_{\Phi_2} \quad (3.23)$$

$$\Phi_{22}(x_2) = \text{arctg}(x_{22} / x_{21}) \in \Omega_{z_{22}}, x_2 \in \Omega_{\Phi_2} \quad (3.24)$$

$$\Omega_{\Phi_2} = \{x_2 = \text{col}(x_{21}, x_{22}) \in R^2 : x_{21} \in \{R^1 \setminus 0\}, x_{22} \in R^1\}$$

$$z_2 = \Phi_2(x_2) \in \Omega_{\Psi_2} \quad (3.25)$$

Далее, поскольку матрицы L_2 (3.8), L_3 (3.9), L_4 (3.11), L_5 (3.13), такие, что $|\det L_i(z_2)| = |z_{21}| > \varepsilon_V > 0$ ($i = 2, 3, 4, 5$) при $z_2 \in \Omega_{\Psi_2}$, то

$$\text{rank } L_i(z_2) = 2, z_2 \in \Omega_{\Psi_2}, i = 2, 3, 4, 5 \quad (3.26)$$

и существуют соответственно обратные матрицы $L_i^{-1}(z_2)$ ($i = 2, 3, 4, 5$) для соответственно значений $z_2 \in \Omega_{\Psi_2}$, следовательно, преобразования (3.7), (3.10), (3.12) однозначно разрешимы относительно z_3, z_4 и соответственно, т.е. имеют обратные пре-

образования вида

$$z_i = \Phi_i(x_2^i), \quad i = 3, 4 \quad (3.27)$$

где

$$\Phi_i(x_2^i) = M_i(x_2^{i-1}) + N_i(x_2)x_i, \quad i = 3, 4 \quad (3.28)$$

$$M_i(x_2^{i-1}) = -L_i^{-1}(\Phi_2(x_2))K_i(\Phi_2^{i-1}(x_2^{i-1})) \quad (3.29)$$

$$N_i(x_2) = L_i^{-1}(\Phi_2(x_2)) = D_{i-1}^{-1}L_{i-1}^{-1}(\Phi_2(x_2)), \quad i = 3, 4$$

$$L_2^{-1}(\Phi_2(x_2)) = L_{2x}(x_2) = \|l_{2xij}(x_2)\|_{i,j=1,2}, \quad l_{2x1j}(x_2) = \quad (3.30)$$

$$= x_{2j} / \Phi_{21}(x_2), \quad l_{2x2j}(x_2) = (-1)^j x_{2,3-j} / [\Phi_{21}(x_2)]^2, \quad j = 1, 2$$

$$\Phi_2^{i-1}(x_2^{i-1}) = \text{col}(\Phi_2(x_2), \Phi_3(x_2^3), \dots, \Phi_{i-1}(x_2^{i-1}))$$

$$u = \Phi_5(x_2^4, w) \quad (3.31)$$

$$\Phi_5(x_2^4, w) = M_5(x_2^4) + N_5(x_2)w \quad (3.32)$$

$$M_5(x_2^4) = -L_5^{-1}(\Phi_2(x_2))K_5(\Phi_2^4(x_2^4)), \quad N_5(x_2) = L_5^{-1}(\Phi_2(x_2)) \quad (3.33)$$

Таким образом, при учете соотношений (3.14), (3.21)–(3.30) для исходного преобразования (3.1), (3.3), (3.4), (3.6)–(3.11) построено взаимно однозначное обратное преобразование

$$z = \Phi(x), \quad x \in \Omega_\Phi \quad (3.34)$$

где

$$\Phi(x) = \text{col}(\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2), \Phi_3(x_2^3), \Phi_4(x_2^4)) \quad (3.35)$$

Φ_i ($i = 1, \dots, 4$) – вектор-функции (3.14), (3.21)–(3.30), множества

$$\Omega_\Phi = \{x \in R^8 : z = \Phi(x) \in \Omega_\Psi\} \quad (3.36)$$

$$\Omega_\Psi = \{z = \text{col}(z_1, z_2, z_3, z_4) \in R^8 : z_i \in R^2, i = 1, 3, 4; z_2 \in \Omega_{\Psi_2}\} \quad (3.37)$$

Покажем теперь, что если взять любое решение $x_1(t)$ ОДУ

$$x_1^{(4)} = \Psi_5(\Phi_2^4(\dot{x}_1, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}), u) \quad (3.38)$$

эквивалентного системе (2.1)–(2.3) при $w = \Psi_5(\Phi_2^4(\dot{x}_1, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}), u)$, где $x_2^4 = \text{col}(x_2, x_3, x_4) = \text{col}(\dot{x}_1, x_1^{(2)}, x_1^{(3)})$, подставить его в систему (3.5):

$$x_1^{(i)} = \dot{x}_i = \dot{\Psi}_i(z_2^i) = \Psi_{i+1}(z_2^{i+1}) = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.39)$$

где $z_2^1 = z_2$, и определить из этой системы вектор-функции $z_i(t)$ ($i = 2, 3, 4$), то система вектор-функций

$$x_1(t) = z_1(t), \quad z_2(t), \quad z_3(t), \quad z_4(t) \quad (3.40)$$

будет решением системы (1.11)–(1.13), (1.10).

Подставим указанную систему вектор-функций (3.40) в систему (1.11)–(1.13), (1.10) и тем самым обратим все уравнения этой системы в тождества, в частности, получим

тождество

$$\dot{x}_1 = \dot{z}_1 \equiv F_1(z_2) \quad (3.41)$$

Дифференцируя это тождество по t , получим

$$\ddot{x}_1 = \ddot{z}_1 = \dot{x}_2 = \dot{\Psi}_2(z_2) = \frac{\partial \Psi_2(z_2)}{\partial z_2} \dot{z}_2 \quad (3.42)$$

В этом тождестве пока нельзя заменить $\dot{z}_2$ вектор-функцией F_2 , так как еще не показано, что полученные указанным выше путем из уравнения (3.38) и системы (3.39) вектор-функции $x_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, $z_4(t)$ (3.40) удовлетворяют исходной системе (1.11)–(1.13), (1.10), так как именно это утверждение и необходимо доказать.

Вычитая почленно из тождества (3.42) тождество (3.7), получим

$$\frac{\partial \Psi_2(z_2)}{\partial z_2} (\dot{z}_2 - F_2(z_2^3)) \equiv 0 \quad (3.43)$$

Аналогично, дифференцируя по t тождества $x_i = \Psi_i(z_2^i)$ ($i = 3, 4$) (3.39)

$$\dot{x}_i = \dot{\Psi}_i(z_2^i) = \sum_{k=2}^i \frac{\partial \Psi_i(z_2^i)}{\partial z_k} \dot{z}_k, \quad i = 3, 4$$

и вычитая соответственно тождества

$$\dot{x}_i = \dot{\Psi}_i(z_2^i) = \sum_{k=2}^i \frac{\partial \Psi_i(z_2^i)}{\partial z_k} F_k(z_2^{k+1}), \quad i = 3, 4$$

из (3.10), (3.12), получим

$$\sum_{k=2}^i \frac{\partial \Psi_i(z_2^i)}{\partial z_k} (\dot{z}_k - F_k(z_2^{k+1})) \equiv 0, \quad i = 3, 4 \quad (3.44)$$

Уравнения (3.43), (3.44) относительно неизвестных $(\dot{z}_k - F_k(z_2^{k+1}))$ ($k = 2, 3, 4$) запишем в виде системы

$$J_0(z_2^3)(\dot{z}_2^4 - F_2^4(z_2^5)) = 0 \quad (3.45)$$

где $z_2^5 = \text{col}(z_2, \dots, z_5)$, $z_5 = u$, $F_2^4(z_2^5) = \text{col}(F_2(z_2^3), F_3(z_2^4), F_4(z_2^5))$

$$J_0(z_2^3) = \frac{\partial \Psi_2^4(z_2^4)}{\partial z_2^4} \quad (3.46)$$

– (6×6) -матрица-функция Якоби, $\Psi_2^4(z_2^4) = \text{col}(\Psi_2(z_2), \Psi_3(z_2^3), \Psi_4(z_2^4))$.

При учете соотношений (3.6)–(3.11) заключаем, что матрица-функция J_0 (3.46) блочно-нижнетреугольная с диагональными (2×2) -блоками L_i ($i = 2, 3, 4$) (3.8), (3.9), (3.11), которые, согласно (3.26), невырождены. Поэтому

$$\text{rank } J_0(z_2^3) = 6, \quad \forall z_2^3 \in \Omega_{J_0} \quad (3.47)$$

где множество

$$\Omega_{J_0} = \{z_2^3 = \text{col}(z_2, z_3) \in R^4 : z_2 \in \Omega_{\Psi_2}, z_3 \in R^2\} \quad (3.48)$$

и, следовательно, учитывая соотношение (3.47), заключаем, что матрица-функция J_0 (3.46) также невырождена. Отсюда вытекает, что система (3.45) в каждой точке множества Ω_{J_0} (3.48) имеет только тривиальное решение

$$\dot{z}_2^4 - F_2^4(z_2^5) = 0$$

Принимая во внимание еще тождество (3.41), получим, что вектор-функция $y = \text{col}(x_1, z_2, z_3, z_4) \equiv z$ — решение исходной системы уравнений (1.11)–(1.13), (1.10).

4. Управляемость и алгоритмы построения ПД ТР. Сначала покажем, что модель движения ТР в канонической форме (2.1)–(2.3) вполне управляема ([6, с. 269]). Поскольку матрица

$$S = \|Q, PQ, \dots, P^7 Q\| \quad (4.1)$$

имеет подматрицу $S_0 = \|Q, PQ, P^2 Q, P^3 Q\|$, для которой в силу (2.3) $|\det S_0| = 1$, и, следовательно,

$$\text{rank } S = \text{rank } S_0 = 8 \quad (4.2)$$

то система (2.1)–(2.3) вполне управляема ([6, с. 269], теорема 3.1), т.е. существует закон управления

$$w = w_p = w_p(t) = Q^* e^{P^*(t_1-t)} K_0^{-1} (x_{p1} - e^{PT} x_{p0}) \quad (4.3)$$

где

$$K_0 = \int_{t_0}^{t_1} e^{P(t_1-t)} Q Q^* e^{P^*(t_1-t)} dt \quad (4.4)$$

— постоянная положительно-определенная (8×8) -матрица в силу вполне управляемости системы (2.1)–(2.3) [6], переводящий систему (2.1)–(2.3) из любого начального состояния $x_p(t_0) = x_{p0} = \Psi(z_{p0}) \in R^8$ (в частности, при $z_{p0} \in \Omega_\Psi$, где Ω_Ψ — множество (3.37)) в произвольное конечное состояние $x_p(t_1) = x_{p1} = \Psi(z_{p1}) \in R^8$ (в частности, при $z_{p1} \in \Omega_\Psi$) за время $t_1 - t_0 < \infty$ по траектории

$$x_p = x_p(t) = e^{P(t-t_0)} x_{p0} + \int_{t_0}^t e^{P(t-s)} Q w_p(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (4.5)$$

Отметим, что для вычисления $e^{P(t-t_0)}$, $e^{P(t-s)}$, $e^{P(t_1-t)}$, e^{PT} , где P — матрица (2.3), можно использовать представление $e^{P\tau}$ в виде

$$e^{P\tau} = \sum_{i=0}^3 \frac{P^i \tau^i}{i!}$$

Отсюда, используя преобразования (3.6), (3.8)–(3.10), получим, что закон управления

$$u = u_p = \Phi_5(x_{p2}^4, w_p) = \Phi_5(\Psi_2^4(z_{p2}^4), w_p) \quad (4.6)$$

где $\Psi_2^4(z_{p2}^4) = \text{col}(\Psi_2(z_{p2}), \Psi_3(z_{p2}^3), \Psi_4(z_{p2}^4))$, а w_p, x_p определены согласно соотношениям (4.3)–(4.5), переводит исходную модель движения ТР (1.11)–(1.13) из любого начального состояния $z_p(t_0) = z_{p0} \in \Omega_\Psi$ в произвольное конечное состояние $z_p(t_1) = z_{p1} \in \Omega_\Psi$, где Ω_Ψ — множество (3.37), за время $t_1 - t_0 < \infty$ по траектории

$$z = z_p = \Phi(x_p) \quad t \in [t_0, t_1] \quad (4.7)$$

Поэтому исходная модель движения ТР (1.11)–(1.13), (1.10) также управляема.

5. Критерии стабилизируемости ПД ТР. Рассмотрим сначала задачи синтеза стабилизирующих законов управления w и анализа устойчивости ПД $x_p(t)$, принадлежащего множеству Ω_Φ (3.36), $t \geq t_0$ для канонической модели движения ТР (2.1)–(2.3).

Из вполне управляемости этой модели (выполнения соотношений (4.2), (4.3)) следует ([6, с. 274], теорема 4.1), что существует постоянная (2×8) -матрица коэффи-

центов усиления

$$\Gamma_0 = \|\Gamma_{01}, \dots, \Gamma_{04}\| \quad (5.1)$$

где Γ_{0j} ($j = 1, \dots, 4$) – (2×2) -блоки, такая, что матрица

$$\Gamma = P + Q\Gamma_0 \quad (5.2)$$

имеет заданные собственные значения λ_i ($i = 1, \dots, 8$), в частности, например, такие, чтобы матрица Γ была устойчивой (гурвицевой) ([6, с. 597]), т.е. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, \dots, 8$). Более того, матрицу Γ_0 (5.1) можно выбрать так, что матрица Γ (5.2) будет иметь, например, заданные, различные, вещественные, отрицательные собственные значения, т.е.

$$\lambda_i < 0 \quad (\lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j; \quad i = 1, \dots, 8; \quad j = 1, \dots, 8) \quad (5.3)$$

Синтезируем закон управления с "канонической" обратной связью по x в виде

$$w = w_p + \Gamma_0(x - x_p) \quad (5.4)$$

Тогда уравнение переходных процессов (ПП) $e_x = x - x_p$ в замкнутой системе (2.1)–(2.3), (5.4), (5.3) имеет вид

$$\dot{e}_x = \Gamma e_x, \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \geq t_0 \quad (5.5)$$

Следовательно, ПД $x_p(t)$ (4.5) системы (2.1)–(2.3), (5.4), (5.1)–(5.3) асимптотически устойчиво в целом с оценкой

$$|e_x(t)| \leq \beta_0 |e_x(t_0)| \exp[\gamma_0(t - t_0)], \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \geq t_0 \quad (5.6)$$

причем ПП $e_x(t)$ имеет заданный аperiodический характер затухания (в частности, при e_{x0} , таких, что $e_{x0} + x_{p0} = x_0 = x(t_0) \in \Omega_\Phi$), где

$$\gamma_0 = \max_i \lambda_i, \quad \lambda_i < 0 \quad (i = 1, \dots, 8); \quad \beta_0 = \sum_{i=1}^8 |\bar{\Gamma}_i| > 0$$

$$\bar{\Gamma}_i = \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^8 (\Gamma - \lambda_k I_8) \right] \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^8 (\lambda_i - \lambda_k) \right]^{-1} \quad (i = 1, \dots, 8)$$

– матрицы-коэффициенты интерполяционного многочлена Лагранжа – Сильвестра

$$e^{\Gamma(t-t_0)} = \sum_{i=1}^8 \bar{\Gamma}_i \exp[\lambda_i(t - t_0)]$$

([7, с. 49])

$$|a| = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2} \quad \text{и} \quad |A| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

– евклидовы нормы (модули) вектора $a = \operatorname{col}(a_1, \dots, a_n) \in R^n$ и $(n \times n)$ -матрицы $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,n}$.

Подставляя соотношения (5.4), (5.1)–(5.3) в (3.31) и используя преобразования координат пространства состояний (3.3)–(3.4), (3.6)–(3.11), получим искомый стабили-

зирующий закон управления с обратной связью по z вида

$$u = \text{col}(u_1, u_2) = \Phi_5(x_2^4, w_p + \Gamma_0(x - x_p)) = \\ = \Phi_5(\Psi_2^4(z_2^4), w_p + \Gamma_0(\Psi(z) - \Psi(z_p))) = \text{col}(\bar{\Phi}_{51}(\Gamma_0, t, z), \bar{\Phi}_{52}(\Gamma_0, t, z)) \quad (5.7)$$

$$(u_i = \bar{\Phi}_{5i}(\Gamma_0, t, z) = h_i^* \Phi_5(\Psi_2^4(z_2^4), w_p + \Gamma_0(\Psi(z) - \Psi(z_p))), \quad i = 1, 2)$$

где $h_1 = \text{col}(1, 0)$, $h_2 = \text{col}(0, 1)$ – двумерные векторы, для исходной модели движения ТР (1.11)–(1.13).

Уравнение ПП $e = z - z_p$ в замкнутой исходной модели движения ТР (1.11)–(1.13), (5.7), (5.1)–(5.3) имеет вид

$$\dot{e} = F_e(e, t), \quad e(t_0) = e_0, \quad t \geq t_0 \quad (5.8)$$

где

$$F_e(e, t) = F(e + z_p, \Phi_5(\Psi_2^4(e_2^4 + z_{p2}^4), w_p + \Gamma_0(\Psi(e + z_p) - \Psi(z_p)))) - F(z_p, u_p) \quad (5.9)$$

$$F_e(0, t) \equiv 0, \quad e_0 + z_{p0} = z_0 \in \Omega_\Psi$$

Оценим ПП e в (5.8), (5.9). Будем считать, что ПД

$$z_p(t) \in \Omega_{zp}, \quad t \geq t_0 \quad (5.10)$$

где множество

$$\Omega_{zp} = \left\{ z_p = \text{col}(z_{p1}, z_{p2}, z_{p3}, z_{p4}) \in \Omega_\Psi : k_{zpik} = \right. \\ \left. = \sup_{t \geq t_0} |z_{pik}(t)| < \infty \quad (i = 3, 4; k = 1, 2) \right\} \quad (5.11)$$

Ω_Ψ – множество (3.37), k_{zpik} ($i = 3, 4; k = 1, 2$) – некоторые постоянные.

Используя формулы для конечных приращений вектор-функций ([8, с. 122], лемма 3.1), соотношения (5.10), (5.11), (3.36), (3.37), (3.20), (3.25), неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, оценки:

$$|a| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|, \quad |A| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

для модулей вектора $a \in R^n$ и $(n \times m)$ -матрицы A , можно последовательно показать (см. Приложение), что для модулей $|e_i|$ ($i = 1, 2, 3, 4$) подвекторов $e_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) вектора $e = z(t) - z_p(t) = \text{col}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ имеют место соответственно оценки (6.1), (6.2), (6.17), (6.25), т.е.

$$|e_1(t)| = |z_1(t) - z_{p1}(t)| = |e_{x1}(t)| = |x_1(t) - x_{p1}(t)| \quad (5.12)$$

$$|e_2(t)| = |z_2(t) - z_{p2}(t)| \leq v_2 |e_{x2}(t)|, \quad t \geq t_0 \quad (5.13)$$

где $v_2 = (\rho^2 + \varepsilon_V^{-2})^{1/2} > 0$, $\rho = 1$,

$$|e_3(t)| \leq v_3 (|e_{x2}(t)| + |e_{x3}(t)|), \quad t \geq t_0 \quad (5.14)$$

$$|e_4(t)| \leq v_4 (|e_{x2}| + |e_{x3}| + |e_{x4}| + |e_{x2}|^2 + |e_{x3}|^2), \quad t \geq t_0 \quad (5.15)$$

где v_3, v_4 – некоторые постоянные, определяемые согласно соотношениям (6.18) и (6.26).

Теперь оценим $|e(t)| = |z(t) - z_p(t)|$, используя оценки (5.12)–(5.15) для векторов $e_i(t) = z_i(t) - z_{pi}(t)$ ($i = 2, 3, 4$). Получим

$$\begin{aligned}
|e(t)| &= |\Delta\Phi(e_x, t)| = |\Phi(e_x + x_p) - \Phi(x_p)| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^4 |e_i(t)| \leq |e_{x1}(t)| + v_2 |e_{x2}(t)| + v_3 (|e_{x2}(t)| + |e_{x3}(t)|) + \\
&+ v_4 (|e_{x2}| + |e_{x3}| + |e_{x4}| + |e_{x2}|^2 + |e_{x3}|^2) \leq \Delta\Phi_0(e_x) = \\
&= \left[\int_0^1 J_{\Delta\Phi_0}(\theta e_x) d\theta \right] e_x \leq \left\| \left[\int_0^1 J_{\Delta\Phi_0}(\theta e_x) d\theta \right] \right\| |e_x| \leq \mu_0 |e_x(t)| = \\
&= \mu_0 \beta_0 |e_x(t_0)| \exp[\gamma_0(t - t_0)] = \mu |\Delta\Psi(e_0, t_0)| \exp[\gamma_0(t - t_0)] \\
e_0 + z_{p0} &= z_0 \in \Omega_\Psi, \quad t \geq t_0
\end{aligned} \tag{5.16}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi_0(e_x) &= v_{01} |e_x| + v_4 (|e_{x2}|^2 + |e_{x3}|^2) \\
v_{01} &= 4 \max\{1, v_2 + v_3 + v_4, v_3 + v_4, v_4\}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
J_{\Delta\Phi_0}(e_x) &= \frac{\partial \Delta\Phi_0(e_x)}{\partial e_x} = \|v_{01} |e_x|^{-1/2} e_{x1}, \quad (v_{01} |e_x|^{-1/2} + 2v_4) e_{x2} \\
&\quad (v_{01} |e_x|^{-1/2} + 2v_4) e_{x3}, \quad v_{01} |e_x|^{-1/2} e_{x4}\|
\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\sup_{\tilde{e}_x \in [0, e_x], t \geq t_0} |J_{\Delta\Phi_0}(\tilde{e}_x)| \leq v_{01} + 2v_4 \sum_{i=2}^3 |\tilde{e}_{xi}| = \mu_0, \quad \mu = \mu_0 \beta_0 \tag{5.19}$$

$$[0, e_x] = \{\tilde{e}_x | \tilde{e}_x = \theta e_x, \quad e_x + x_p = x \in \Omega_\Phi, \quad 0 \leq \theta \leq 1\}$$

$\tilde{e}_x = \text{col}(\tilde{e}_{x1}, \dots, \tilde{e}_{x4})$; $\tilde{e}_{xi}$ ($i = 1, \dots, 4$) – двумерные векторы, $\Delta\Psi(e_0, t_0) = \Psi(e_0 + z_{p0}) - \Psi(z_{p0})$.

Из (5.16), (5.17) вытекает, что имеет место оценка

$$|e(t)| = |\Delta\Phi(e_x, t)| \leq \Delta\Phi_0(e_x) = v_{01} |e_x| + v_4 (|e_{x2}|^2 + |e_{x3}|^2), \quad t \geq t_0 \tag{5.20}$$

из которой следует, что вектор-функция $\Delta\Phi(e_x, t)$ непрерывна по e_x при $e_x = 0$ равномерно относительно $t \in [t_0, \infty)$, причем $\Delta\Phi(0, t) = 0$.

Из (5.16)–(5.19), (5.6), (5.3) вытекает, что

$$|e(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty \tag{5.21}$$

Покажем, что из устойчивости по Ляпунову решения $e_x = 0$ системы (5.5), (5.1)–(5.3) следует устойчивость по Ляпунову решения $e = 0$ системы (5.9), (5.1)–(5.3).

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Поскольку вектор-функция $\Delta\Phi(e_x, t) = \Phi(e_x + x_p(t)) - \Phi(x_p(t))$ непрерывна по e_x при $e_x = 0$ равномерно относительно $t \in [t_0, \infty)$, то по данному $\varepsilon > 0$

можно найти $\varepsilon_0 > 0$ такое, чтобы

$$|e_x| < \varepsilon_0 \Rightarrow |e| = |\Delta\Phi(e_x, t)| < \varepsilon \quad (5.22)$$

где $e_x = e_x(e_{x0}, t)$, $e = e(e_0, t)$.

Поскольку решение $e_x = 0$ системы (5.5), (5.1)–(5.3) устойчиво по Ляпунову, то по $\varepsilon_0 > 0$ можно указать $\delta_0 > 0$, такое, что

$$|e_{x0}| < \delta_0 \Rightarrow |e_x(e_{x0}, t)| < \varepsilon_0, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (5.23)$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\Delta\Psi(e, t) = \Psi(e + z_p(t)) - \Psi(z_p(t))$$

где Ψ – вектор-функция (3.3), (3.4), (3.6)–(3.11). Используя непрерывность по e при $e = 0$ вектор-функции $\Delta\Psi(e, t_0)$, по $\delta_0 > 0$ найдем $\delta > 0$ такое, чтобы

$$|e_0| < \delta \Rightarrow |e_{x0}| = |\Delta\Psi(e_0, t_0)| < \delta_0 \quad (5.24)$$

Учитывая неравенства (5.22)–(5.24), получим

$$|e_0| < \delta \Rightarrow |e_{x0}| < \delta_0 \Rightarrow |e_x(e_{x0}, t)| < \varepsilon_0 \Rightarrow |e(e_0, t)| < \varepsilon, \quad t \geq t_0$$

Следовательно, из устойчивости по Ляпунову нулевого решения системы (5.5), (5.1)–(5.3) вытекает устойчивость по Ляпунову нулевого решения системы (5.8), (5.9), (5.1)–(5.3).

Таким образом, показано, что имеет место следующая

Теорема. Пусть для исходной модели движения ТР (1.11)–(1.13), (1.10) задано (построено) ПД $z_p(t)$ (5.10), (5.11). Тогда стабилизирующий закон управления u (5.7), (5.1)–(5.3) с обратной связью по z обеспечивает асимптотическую устойчивость ПД $z_p(t)$ (5.10), (5.11) и для ПП $e(t) = z(t) - z_p(t)$ в замкнутой исходной модели движения ТР (1.11)–(1.13), (5.7), (5.1)–(5.3) имеет место оценка (5.16)–(5.19).

Отметим, что, подставляя закон управления u (5.7), (5.1)–(5.3) в (1.17), с учетом оценок (5.16)–(5.19) для $e = z - z_p$, вытекающих из доказанной выше теоремы, получим стабилизирующие законы изменения управляющих напряжений

$$\begin{aligned} u_{aj} = u_{aj}(t) = L_{aj} a_{j1} \int_{t_0}^t \bar{\Phi}_{51}(\Gamma_0, \tau, z) d\tau + \\ + L_{aj} a_{j2} \bar{\Phi}_{52}(\Gamma_0, t, z), \quad t \geq t_0, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

подаваемых на якорные цепи ДПТ, обеспечивающие асимптотическую устойчивость ПД

$$\bar{z}_p = H_2 z_p$$

где H_2 – матрица, определенная согласно преобразованию (1.16), исходных уравнений движения ТР (1.5), (1.6), с оценкой ПП

$$\bar{e} = \bar{z} - \bar{z}_p = H_2(z - z_p) = H_2 e$$

вида

$$|\bar{e}| \leq |H_2| |e| \leq \bar{\mu} |\Delta\Psi(e_0, t_0)| \exp[\gamma_0(t - t_0)], \quad e_0 + z_{p0} = z_0 \in \Omega_\Psi, \quad t \geq t_0$$

где

$$\bar{\mu} = |H_2| \mu, \quad e_0 = H_1 \bar{e}_0 + H_0(u_{a0} - u_{ap0}) = H_1 \bar{e}_0 + H_0(u_{a0} - L_a A \bar{u}_{ap0})$$

$u_{a0} = u_a(0)$, $u_{ap0} = u_{ap}(0)$, $\bar{u}_{ap0} = \bar{u}_{ap}(0)$. Матрицы H_1, H_0 определены согласно преобразованию (1.15).

6. Приложение. Последовательно оценим модули $|e_i|$ ($i = 1, 2, 3, 4$) подвекторов $e_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) вектора $e = z(t) - z_p(t) = \text{col}(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Имеем

$$|e_1(t)| = |z_1(t) - z_{p1}(t)| = |e_{x1}(t)| = |x_1(t) - x_{p1}(t)| \quad (6.1)$$

Используя формулу для конечных приращений вектор-функции

$$\Delta\Phi_2(e_{x2}, t) = \Phi_2(e_{x2} + x_{p2}) - \Phi_2(x_{p2})$$

получим ([8, с. 122], лемма 3.1)

$$\begin{aligned} |e_2(t)| &= |z_2(t) - z_{p2}(t)| = |\Delta\Phi_2(e_{x2}, t)| = \\ &= |\Phi_2(e_{x2} + x_{p2}) - \Phi_2(x_{p2})| = \left| \text{col}(\Delta\Phi_{21}(e_{x2}, t), \Delta\Phi_{22}(e_{x2}, t)) \right| = \\ &= \left| \int_0^1 J_{\Delta\Phi_2}(\theta e_{x2}(t), t) d\theta \right| e_{x2}(t) \leq v_2 |e_{x2}(t)|, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь при учете соотношений (3.23)–(3.26), (3.30) имеем

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{21}(e_{x2}, t) &= \Phi_{21}(e_{x2} + x_{p2}) - \Phi_{21}(x_{p2}) = \\ &= \rho \left\{ \left[(e_{x21} + x_{p21})^2 + (e_{x22} + x_{p22})^2 \right]^{1/2} - [x_{p21}^2 + x_{p22}^2]^{1/2} \right\}, \\ \rho &= 1, \quad e_{x2} + x_{p2} = x_2 \in \Omega_{\Phi_2} \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{22}(e_{x2}, t) &= \Phi_{22}(e_{x2} + x_{p2}) - \Phi_{22}(x_{p2}) = \\ &= \text{arctg} \frac{e_{x22} + x_{p22}}{e_{x21} + x_{p21}} - \text{arctg} \frac{x_{p22}}{x_{p21}}, \quad e_{x2} + x_{p2} = x_2 \in \Omega_{\Phi_2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} J_{\Delta\Phi_2}(e_{x2}, t) &= \frac{\partial \Delta\Phi_2(e_{x2}, t)}{\partial e_{x2}} = \left\| \begin{matrix} \rho l_{2x11}(x_2) & \rho l_{2x12}(x_2) \\ l_{2x21}(x_2) & l_{2x22}(x_2) \end{matrix} \right\| = \\ &= \left\| \begin{matrix} \rho \cos z_{22} & \rho \sin z_{22} \\ -\frac{\sin z_{22}}{z_{21}} & \frac{\cos z_{22}}{z_{21}} \end{matrix} \right\|, \quad \rho = 1 \end{aligned} \quad (6.5)$$

где

$$\sup_{\tilde{e}_{x2} \in [0, e_{x2}], \quad t \geq t_0} |J_{\Delta\Phi_2}(\tilde{e}_{x2}, t)| \leq v_2 \quad (6.6)$$

$$[0, e_{x2}] = \{ \tilde{e}_{x2} | \tilde{e}_{x2} = \theta e_{x2}, \quad e_{x2} + x_{p2} = x_2 \in \Omega_{\Phi_2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \}$$

$$v_2 = (\rho^2 + \varepsilon_V^{-2})^{1/2} > 0, \quad \rho = 1.$$

Оценим $|e_i(t)|$ ($i = 3, 4$). Имеем

$$\begin{aligned} |e_i(t)| &= |z_i(t) - z_{pi}(t)| = |\Delta\Phi_i(e_{x2}^i, t)| = |\Phi_i(e_{x2}^i + x_{p2}^i) - \Phi_i(x_{p2}^i)| \leq \\ &\leq |\Delta M_i(e_{x2}^{i-1}, t)| + |\Delta N_i(e_{x2}, t) x_{pi}| + |N_i(e_{x2} + x_{p2}) e_{xi}|, \quad i = 3, 4 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь (при учете соотношений (3.28), (3.29), (3.9)–(3.11), (6.5))

$$\begin{aligned}
\Delta M_3(e_{x2}, t) &= M_3(e_{x2} + x_{p2}) - M_3(x_{p2}) = -D_2^{-1} C_{22} \Delta \Phi_{21}(e_{x2}, t) = -D_2^{-1} C_{22} e_{21} \\
\Delta M_4(e_{x2}^3, t) &= M_4(e_{x2}^3 + x_{p2}^3) - M_4(x_{p2}^3) = -L_4^{-1}(\Phi_2(e_{x2} + x_{p2})) \times \\
&\times K_4(\Phi_2^3(e_{x2}^3 + x_{p2}^3)) + L_4^{-1}(\Phi_2(x_{p2})) K_4(\Phi_2^3(x_{p2}^3)) = \\
&= -L_4^{-1}(e_2 + z_{p2}) K_4(e_2^3 + z_{p2}^3) + L_4^{-1}(z_{p2}) K_4(z_{p2}^3) = \mu_1(e_2^3, t) + \mu_2(e_2^3, t) + \mu_3(e_{21}, e_3) \\
\mu_1(e_2^3, t) &= -D_3^{-1} D_2^{-1} G_0(e_2^3 + z_{p2}^3)(C_{22} e_{21} + D_2 e_3) \\
\mu_2(e_2^3, t) &= -D_3^{-1} D_2^{-1} \Delta G_0(e_2^3, t)(C_{20} + C_{22} z_{p21} + D_2 z_{p3}) \\
\mu_3(e_{21}, e_3) &= -D_3^{-1}(C_{32} e_{21} + C_{33} e_3) \\
G_0(e_2^3 + z_{p2}^3) &= L_2^{-1}(e_2 + z_{p2}) \frac{\partial \Psi_3(e_2^3 + z_{p2}^3)}{\partial e_2} = \\
&= \left\| \begin{array}{cc} -k_{f11} & -(e_{21} + z_{p21})(e_{32} + z_{p32}) \\ \frac{e_{32} + z_{p32}}{e_{21} + z_{p21}} - k_{f11} + \frac{-F_{f1} + e_{31} + z_{p31} - k_{f12}(e_{32} + z_{p32})}{e_{21} + z_{p21}} \end{array} \right\|
\end{aligned}$$

где $z_{ik} = e_{ik} + z_{pik}$ ($i = 2, 3, k = 1, 2$);

$$\begin{aligned}
L_2^{-1}(\Phi_2(e_{x2} + x_{p2})) &= L_{2x}(e_{x2} + x_{p2}) = \|l_{2xij}(e_{x2} + x_{p2})\|_{i,j=1,2} \equiv \\
&\equiv L_2^{-1}(e_2 + z_{p2}) = L_{2z}(e_2 + z_{p2}) = \|l_{2zij}(e_2 + z_{p2})\|_{i,j=1,2} = \\
&= \left\| \begin{array}{cc} \cos z_{22} & \sin z_{22} \\ -\frac{\sin z_{22}}{z_{21}} & \frac{\cos z_{22}}{z_{21}} \end{array} \right\| \\
\Delta G_0(e_2^3, t) &= G_0(e_2^3 + z_{p2}^3) - G_0(z_{p2}^3) = \|\Delta g_{0ij}(e_2^3, t)\|_{i,j=1,2} \\
\Delta g_{011}(e_2^3, t) &= 0, \quad \Delta g_{012}(e_2^3, t) = -(e_{21} + z_{p21})e_{32} - z_{p32}e_{21} \\
\Delta g_{021}(e_2^3, t) &= (e_{21} + z_{p21})^{-1} z_{p21}^{-1} (z_{p21}e_{32} - z_{p32}e_{21}) \\
\Delta g_{022}(e_2^3, t) &= (e_{21} + z_{p21})^{-1} z_{p21}^{-1} [z_{p21}e_{31} - k_{f12}z_{p21}e_{32} + (F_{f1} - z_{p31} + k_{f12}z_{p32})e_{21}] \\
\Delta N_i(e_{x2}, t) &= \Delta L_{xi}(e_{x2}, t) = L_i^{-1}(\Phi_2(e_{x2} + x_{p2})) - L_i^{-1}(\Phi_2(x_{p2})) = \\
&= D_{i-1}^{-1} \Delta L_{x,i-1}(e_{x2}, t) \equiv D_{i-1}^{-1} \Delta L_{z,i-1}(e_2, t), \quad i = 3, 4 \\
\Delta L_{2x}(e_{x2}, t) &= \|\Delta l_{2xij}(e_{x2}, t)\|_{i,j=1,2} = L_2^{-1}(\Phi_2(e_{x2} + x_{p2})) - \\
&- L_2^{-1}(\Phi_2(x_{p2})) = L_2^{-1}(e_2 + z_{p2}) - L_2^{-1}(z_{p2}) \equiv \Delta L_{2z}(e_2, t) = \|\Delta l_{2zij}(e_2, t)\|_{i,j=1,2}
\end{aligned}$$

$$\Delta l_{2ij}(e_{x2}, t) = l_{2ij}(e_{x2} + x_{p2}) - l_{2ij}(x_{p2}) \equiv \Delta l_{2zij}(e_2, t) = \\ = l_{2zij}(e_2 + z_{p2}) - l_{2zij}(z_{p2}), \quad i, j = 1, 2$$

$$\Delta l_{2z11}(e_2, t) = \cos(e_{22} + z_{p22}) - \cos z_{p22}, \quad \Delta l_{2z12}(e_2, t) = \sin(e_{22} + z_{p22}) - \sin z_{p22},$$

$$\Delta l_{2z21}(e_2, t) = -\frac{\sin(e_{22} + z_{p22})}{e_{21} + z_{p21}} + \frac{\sin z_{p22}}{z_{p21}},$$

$$\Delta l_{2z22}(e_2, t) = \frac{\cos(e_{22} + z_{p22})}{e_{21} + z_{p21}} - \frac{\cos z_{p22}}{z_{p21}}$$

Оценим модуль $|\Delta L_{2z}(e_2, t)|$ матрицы-функции ΔL_{2z} (6.13), (6.14). Имеем

$$|\Delta L_{2z}(e_2, t)| \leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |\Delta l_{2zij}(e_2, t)| \leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left| \int_0^1 J_{1ij}(\theta e_2, t) d\theta \right| e_2 \leq \\ \leq 2\varepsilon_V^{-2} |e_{21}| + 2(1 + \varepsilon_V^{-1}) |e_{22}| \leq k_{\Delta L_{2z}} (|e_{21}| + |e_{22}|), \quad t \geq t_0$$

где

$$J_{1ij}(e_2, t) = \|J_{1ij1}(e_2, t), J_{1ij2}(e_2, t)\| = \frac{\partial \Delta l_{2zij}(e_2, t)}{\partial e_2}$$

$$i = 1, 2; \quad j = 1, 2; \quad J_{111}(e_2, t) = \|0, -\sin(e_{22} + z_{p22})\|$$

$$J_{112}(e_2, t) = \|0, \cos(e_{22} + z_{p22})\|$$

$$J_{1211}(e_2, t) = \frac{\sin(e_{22} + z_{p22})}{(e_{21} + z_{p21})^2}, \quad J_{1212}(e_2, t) = -\frac{\cos(e_{22} + z_{p22})}{e_{21} + z_{p21}}$$

$$J_{1221}(e_2, t) = -\frac{\cos(e_{22} + z_{p22})}{(e_{21} + z_{p21})^2}, \quad J_{1222}(e_2, t) = -\frac{\sin(e_{22} + z_{p22})}{e_{21} + z_{p21}}$$

$$\sup_{\tilde{e}_2 \in [0, e_2], \quad t \geq t_0} |J_{11j}(\tilde{e}_2, t)| = 1, \quad \sup_{\tilde{e}_2 \in [0, e_2], \quad t \geq t_0} |J_{12i1}(\tilde{e}_2, t)| = \varepsilon_V^{-2}$$

$$\sup_{\tilde{e}_2 \in [0, e_2], \quad t \geq t_0} |J_{12i2}(\tilde{e}_2, t)| = \varepsilon_V^{-1} \quad (i = 1, 2; \quad j = 1, 2)$$

$$[0, e_2] = \{\bar{e}_2 | \bar{e}_2 = \theta e_2, \quad e_2 + z_{p2} = z_2 \in \Omega_{\Psi_2} \quad 0 \leq \theta \leq 1\}$$

$$k_{\Delta L_{2z}} = \max\{2\varepsilon_V^{-2}, 2(1 + \varepsilon_V^{-1})\}$$

Учитывая соотношения (6.2), (6.5), (6.12)–(6.16), получим

$$|e_3(t)| \leq |\Delta M_3(e_{x2}, t)| + |\Delta N_3(e_{x2}, t)x_{p3}| + |N_3(e_{x2} + x_{p2})e_{x3}| \leq \\ \leq |-D_2^{-1}C_{22}e_{21}| + |D_2^{-1}\Delta L_2^{-1}(e_{x2}, t)x_{p3}| + |D_2^{-1}L_2^{-1}(e_{x2} + x_{p2})e_{x3}| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq v_{30} \left[|e_{21}(t)| + k_{\Delta L 2z} (|e_{21}(t)| + |e_{22}(t)|) + v_2 |e_{x3}(t)| \right] \leq \\
&\leq v_{32} (|e_{21}(t)| + |e_{22}(t)| + |e_{x3}(t)|) \leq 2v_{32} |e_2(t)| + v_{32} |e_{x3}(t)| \leq \\
&\leq v_3 (|e_{x2}(t)| + |e_{x3}(t)|), \quad t \geq t_0
\end{aligned} \tag{6.17}$$

где

$$\begin{aligned}
v_{30} &= \max \left\{ \|D_2^{-1}\| C_{22}, \|D_2^{-1}\| k_{xp3}, \|D_2^{-1}\| \right\}, \\
k_{xp3} &= \sup_{t \geq t_0} |x_{p3}(t)| = \sup_{t \geq t_0} |\Psi_3(z_{p2}^3(t))|, \quad v_{31} = \max \{1 + k_{\Delta L 2z}, k_{\Delta L 2z}, v_2\} \\
v_{32} &= v_{30} v_{31}, \quad v_3 = \max \{2v_{32} v_2, v_{32}\}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Оценим $|e_4(t)|$ (6.7). С этой целью сначала оценим модуль $|G_0(e_2^3 + z_{p2}^3)|$ матрицы-функции G_0 (6.10). Получим

$$\begin{aligned}
|G_0(e_2^3 + z_{p2}^3)| &\leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |g_{0ij}(e_2^3 + z_{p2}^3)| \leq |k_{f11}| + \\
&+ |(e_{21} + z_{p21})(e_{32} + z_{p32})| + |(e_{21} + z_{p21})^{-1}(e_{32} + z_{p32})| + \\
&+ |-k_{f11} + (e_{21} + z_{p21})^{-1}[-F_{f1} + e_{31} + z_{p31} - k_{f12}(e_{32} + z_{p32})]| \leq \\
&\leq k_{001} + k_{031}|e_{31} + z_{p31}| + k_{032}|e_{32} + z_{p32}| \leq k_{0G0}(1 + |e_{31} + z_{p31}| + |e_{32} + z_{p32}|) \leq \\
&\leq k_{G0}(1 + |e_{31}| + |e_{32}|), \quad t \geq t_0
\end{aligned} \tag{6.19}$$

где

$$\begin{aligned}
k_{001} &= 2k_{f11} + |F_{f1}|/\varepsilon_V, \quad k_{031} = \sup_{z_{21} \in \Omega_{z21}, t \geq t_0} |z_{21}^{-1}(t)| = \varepsilon_V^{-1} \\
k_{032} &= \sup_{z_{21} \in \Omega_{z21}, t \geq t_0} [|z_{21}(t)| + (1 + k_{f12})|z_{21}^{-1}(t)|] = k_V + (1 + k_{f12})\varepsilon_V^{-1} \\
k_{0G0} &= \max \{k_{001}, k_{031}, k_{032}\}, \quad k_{G0} = k_{0G0}(1 + k_{zp31} + k_{zp32})
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Далее оценим модуль $|\Delta G_0(e_2^3, t)|$ для матрицы-функции ΔG_0 (6.11). Имеем

$$\begin{aligned}
|\Delta G_0(e_2^3, t)| &\leq |\Delta g_{012}(e_2^3, t)| + |\Delta g_{021}(e_2^3, t)| + |\Delta g_{022}(e_2^3, t)| \leq \\
&\leq k_{121}|e_{21}| + k_{131}|e_{31}| + k_{132}|e_{32}| \leq k_{\Delta G0}(|e_{21}| + |e_{31}| + |e_{32}|), \quad t \geq t_0
\end{aligned} \tag{6.21}$$

где

$$\begin{aligned}
k_{121} &= \sup_{t \geq t_0} \left[|z_{p32}(t)| + |(e_{21}(t) + z_{p21}(t))^{-1} z_{p21}^{-1}(t) z_{p32}(t)| + \right. \\
&\left. + |(e_{21}(t) + z_{p21}(t))^{-1} z_{p21}^{-1}(t) (F_{f1} - z_{p31}(t) + k_{f12} z_{p32}(t))| \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k_{zp3} + \varepsilon_V^{-2} \left[|F_{f1}| + k_{zp31} + (1 + k_{f12}) k_{zp32} \right] \\
k_{131} &= \sup_{t \geq t_0} \left| (e_{21}(t) + z_{p21}(t))^{-1} \right| = k_{031} = \varepsilon_V^{-1} \\
k_{132} &= \sup_{t \geq t_0} \left[|e_{21}(t) + z_{p21}(t)| + \left| (e_{21}(t) + z_{p21}(t))^{-1} (1 + k_{f12}) \right| \right] = \\
&= k_V + \varepsilon_V^{-1} (1 + k_{f12}), \quad k_{\Delta G0} = \max\{k_{121}, k_{131}, k_{132}\}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Оценим модуль $|\Delta M_4(e_2^3, t)|$ вектор-функции ΔM_4 (6.9). Используя оценки (6.19), (6.20) и (6.21), (6.22) для матриц-функций G_0 (6.10) и ΔG_0 (6.11), получим

$$\begin{aligned}
|\Delta M_4(e_2^3, t)| &\leq |\mu_1(e_2^3, t)| + |\mu_2(e_2^3, t)| + |\mu_3(e_{21}, e_3)| \leq \\
&\leq k_{\mu1} (1 + |e_{31}| + |e_{32}|) (|e_{21}| + |e_3|) + k_{\mu2} (|e_{21}| + |e_{31}| + |e_{32}|) + \\
&+ k_{\mu3} (|e_{21}| + |e_3|) \leq k_{\Delta M4} \left[(1 + |e_{31}| + |e_{32}|) (|e_{21}| + |e_3|) + \right. \\
&\left. + 2|e_{21}| + |e_{31}| + |e_{32}| + |e_3| \right], \quad t \geq t_0
\end{aligned} \tag{6.23}$$

где

$$\begin{aligned}
|\mu_1(e_2^3, t)| &= \left| -D_3^{-1} D_2^{-1} G_0(e_2^3 + z_{p2}^3) (C_{22} e_{21} + D_2 e_3) \right| \leq \\
&\leq \left| -D_3^{-1} D_2^{-1} \right| \left\| G_0(e_2^3 + z_{p2}^3) \right\| |C_{22} e_{21} + D_2 e_3| \leq \\
&\leq k_{\mu1} (1 + |e_{31}| + |e_{32}|) (|e_{21}| + |e_3|), \quad t \geq t_0 \\
k_{\mu1} &= \left| D_3^{-1} D_2^{-1} \right| k_{G0} k_{0\mu1}, \quad k_{0\mu1} = \max\{|C_{22}|, |D_2|\} \\
|\mu_2(e_2^3, t)| &= \left| -D_3^{-1} D_2^{-1} \Delta G_0(e_2^3, t) (C_{20} + C_{22} z_{p21} + D_2 z_{p3}) \right| \leq \\
&\leq k_{\mu2} (|e_{21}| + |e_{31}| + |e_{32}|), \quad t \geq t_0
\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}
k_{\mu2} &= \left| D_3^{-1} D_2^{-1} \right| k_{\Delta G0} k_{0\mu2}, \\
\sup_{t \geq t_0} (|C_{20}| + |C_{22}| |z_{p21}(t)| + |D_2| |z_{p3}(t)|) &\leq |C_{20}| + |C_{22}| k_V + |D_2| k_{zp3} = k_{0\mu2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mu_3(e_{21}, e_3)| &= \left| -D_3^{-1} (C_{32} e_{21} + C_{33} e_3) \right| \leq k_{\mu3} (|e_{21}| + |e_3|) \\
k_{\mu3} &= \max\{|D_3^{-1} C_{32}|, |D_3^{-1} C_{33}|\}, \quad k_{\Delta M4} = \max\{k_{\mu1}, k_{\mu2}, k_{\mu3}\}
\end{aligned}$$

Используя соотношения (6.5), (6.19)–(6.24), оценим модуль $|e_4(t)|$ (6.7). Получим

$$\begin{aligned}
|e_4(t)| &\leq |\Delta M_4(e_2^3, t)| + |\Delta N_4(e_{x2}, t) x_{p4}| + |N_4(e_{x2} + x_{p2}) e_{x4}| \leq \\
&\leq k_{\Delta M4} \left[(1 + |e_{31}| + |e_{32}|) (|e_{21}| + |e_3|) + 2|e_{21}| + |e_{31}| + |e_{32}| + |e_3| \right] + \\
&+ k_{\Delta N4} |e_2| + k_{N4} |e_{x4}| \leq k_{e4} [3|e_{21}| + |e_{31}| + |e_{32}| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2|e_3| + (|e_{31}|^2 + |e_{21}|^2)/2 + (|e_{32}|^2 + |e_{21}|^2)/2 + \\
& + (|e_3|^2 + |e_{31}|^2)/2 + (|e_3|^2 + |e_{32}|^2)/2 + |e_2| + |e_{x4}| \leq \\
& \leq k_{e4} (4|e_2| + 4|e_3| + |e_2|^2 + 2|e_3|^2 + |e_{x4}|) \leq \\
& \leq v_4 (|e_{x2}| + |e_{x3}| + |e_{x4}| + |e_{x2}|^2 + |e_{x3}|^2), \quad t \geq t_0
\end{aligned} \tag{6.25}$$

где

$$\begin{aligned}
k_{\Delta N4} &= 2|D_3^{-1} D_2^{-1}| k_{\Delta L2z} k_{xp4}, \\
k_{xp4} &= \sup_{t \geq t_0} |x_{p4}(t)| = \sup_{t \geq t_0} |\Psi_4(z_{p2}^4(t))| \\
k_{N4} &= |D_3^{-1} D_2^{-1}| v_2, \quad k_{e4} = \max\{k_{\Delta M4}, k_{\Delta N4}, k_{N4}\} \\
v_4 &= k_{e4} \times \max\{4v_2, 4v_3, v_2^2, 2v_3^2, 1\}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00581).

ЛИТЕРАТУРА

1. Метелицын И.И. Избранные труды. Теория гироскопа. Теория устойчивости. М.: Наука, 1977. 131 с.
2. Jiang Z.P., Nijmeijer H. Traking control of mobile robots: a case study in backstepping // Automatica. 1997. V. 33. № 7. P. 1393–1399.
3. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика негोलомных систем. М.: Наука, 1967. 520 с.
4. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 711 с.
5. Nikaido H. Convex Structures and Economic Theory. N.Y.; L.: Acad. Press, 1968. = Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 517 с.
6. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 616 с.
7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
8. Hartman P. Ordinary differential equations. N.Y. etc.: Wiley, 1964. = Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
6.I.2000