

УДК 531.36:62–50

© 2000 г. И.М. Ананьевский

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПРИ СМЕШАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Рассматривается линейная управляемая механическая система четвертого порядка, содержащая колебательное звено. На управляющие и фазовые переменные наложены геометрические ограничения. Решена задача о приведении системы в заданное состояние за конечное время. Для решения использован подход, основанный на общей схеме Калмана построения управления в виде линейных комбинаций собственных движений неуправляемой системы. Приведены результаты численного моделирования динамики замкнутой системы.

Рассмотрим задачу о гашении колебаний груза, закрепленного на конце упругой балки с помощью активного динамического гасителя с поступательно перемещающейся массой. Управляющей величиной служит сила взаимодействия между гасителем и грузом. Системы такого типа используются, например, на космических летательных аппаратах, где измерительные приборы располагаются на платформе, удаленной от корпуса аппарата на значительное расстояние с помощью длинной штанги. Проведение измерений требует высокой точности позиционирования и стабилизации измерительных приборов, поэтому гашение колебаний штанги представляет собой существенную проблему, которую приходится учитывать при конструировании космических аппаратов (КА). Одним из способов ее решения является использование управляемого гасителя, расположенного на самой платформе (П). Гаситель состоит из направляющей 1, перпендикулярной оси штанги 2, и подвижной массы 3, которая может перемещаться вдоль направляющей посредством электропривода (фиг. 1). Такая схема применяется для гашения поперечных колебаний штанги.

Особенностью данной задачи является наличие двух естественных ограничений на различные переменные системы: одно – на управляющую силу, обусловленное ограниченными возможностями привода, другое – на величину смещения второй массы относительно первой, вызванное конечностью хода массы гасителя (направляющая гасителя имеет конечные размеры).

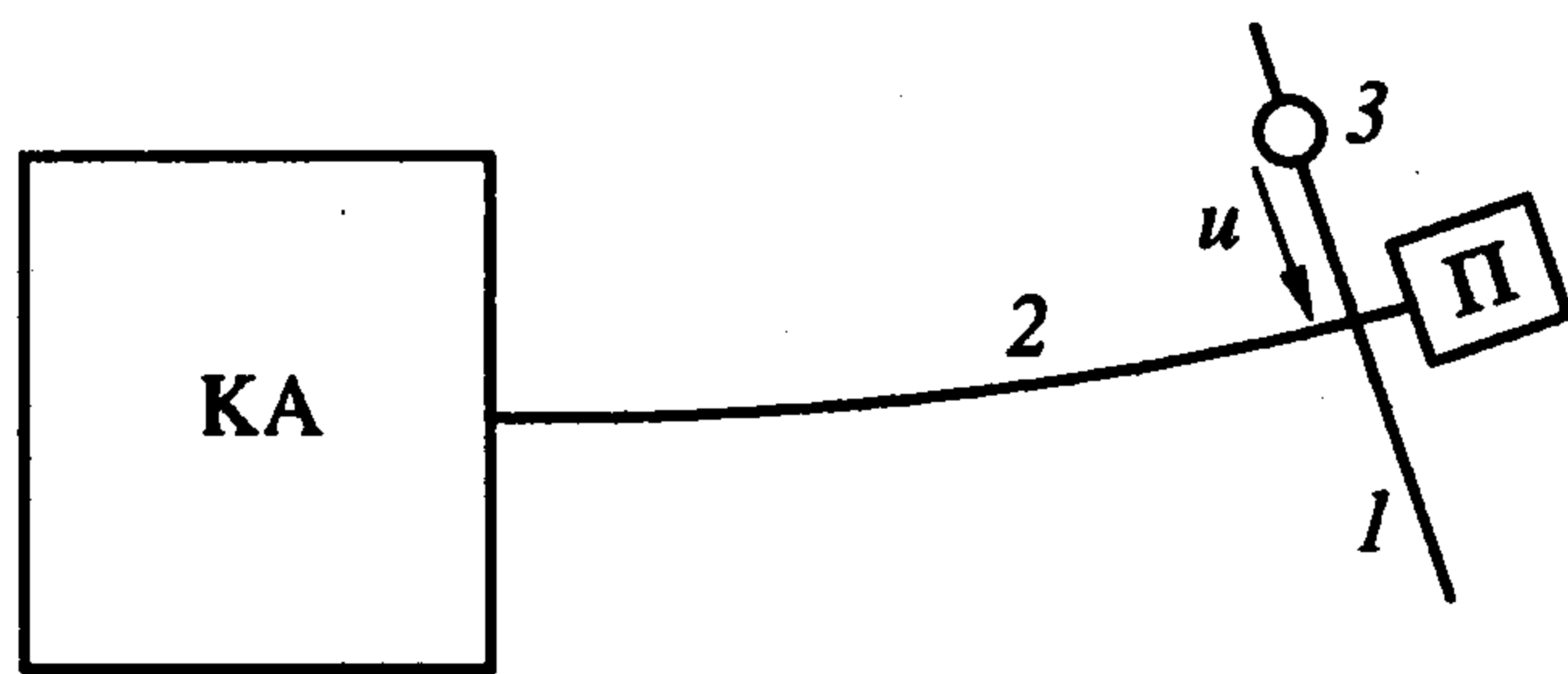
Таким образом, рассматриваемая задача относится к типу задач со смешанными ограничениями, т.е. с ограничениями, накладываемыми на разнородные переменные системы. Для ее решения предлагается использовать подход, основанный на общей схеме Калмана построения управления в виде линейных комбинаций собственных движений неуправляемой системы [2]. Этот подход был распространен [3, 4] на случай наличия ограничений на управляющую функцию.

1. Постановка задачи. При некоторых упрощающих предположениях [1] моделью описываемых конструкций может служить следующая управляемая двухмассовая механическая система, содержащая колебательное звено (фиг. 2). Два тела, массами m_1 и m_2 , перемещаются вдоль горизонтальной прямой. Первое тело соединено с неподвижным основанием пружиной жесткости $k > 0$. Второе тело соединено с первым посредством привода, который генерирует силу u . Уравнения движения такой системы имеют вид

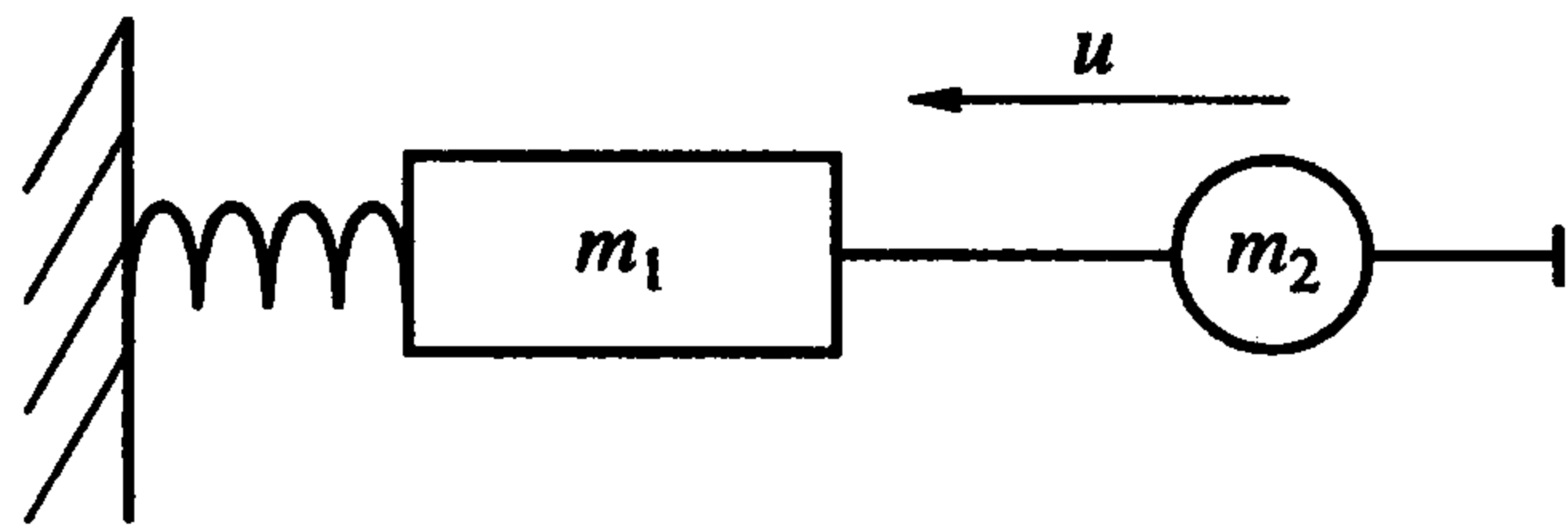
$$m_1 \ddot{y} + ky = -u, \quad m_2 \ddot{z} = u \quad (1.1)$$

Здесь y – координата первого тела, z – координата второго тела на прямой. На управляющую силу u наложено ограничение

$$|u(t)| \leq a, \quad a > 0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

а на величину смещения второго тела относительно первого – условие

$$|z(t) - y(t)| \leq d, \quad d > 0 \quad (1.3)$$

Требуется построить управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничению (1.2) и переводящее систему (1.1) из заданного начального состояния

$$y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad z(0) = z^0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}^0 \quad (1.4)$$

в состояние покоя

$$y(T) = z(T) = 0, \quad \dot{y}(T) = \dot{z}(T) = 0 \quad (1.5)$$

При этом координаты $y(t)$ и $z(t)$ должны удовлетворять условию (1.3) на протяжении всего процесса движения, время окончания которого T нефиксировано.

Введем новые переменные

$$x_1 = ky, \quad x_3 = m_2 kz / m_1, \quad t' = (k / m_1)^{1/2} t \quad (1.6)$$

В новых переменных система (1.1) примет вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -u, \quad \ddot{x}_3 = u \quad (1.7)$$

а ограничение (1.3) – вид $|m_1 x_3 / m_2 - x_1| \leq kd$. Введем в рассмотрение постоянный вектор $p^T = (-1, 0, m_1/m_2, 0)$ и перепишем последнее неравенство следующим образом:

$$|p^T x(t)| \leq kd \quad (1.8)$$

В уравнениях (1.7) и ниже точками обозначены производные по новому времени t' . В дальнейшем штрихи у величины t' будут опущены.

Положим $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_3 = x_4$. Условия (1.4), (1.5) после замены переменных (1.6) переписутся в виде

$$x_i(0) = x_i^0, \quad x_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, 4} \quad (1.9)$$

Здесь x_i^0 – некоторые заданные постоянные, $T > 0$ – неизвестное пока время окончания процесса.

Поставленная задача сводится к построению управления, удовлетворяющего ограничению (1.2) и переводящему систему (1.7) из заданного начального состояния (1.9) в начало координат с соблюдением ограничения (1.8) на протяжении всего процесса движения.

2. Построение управления. Обозначим через $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ фазовый вектор системы (1.7) и перепишем систему в векторной форме

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Начальные и конечные условия (1.9) могут быть записаны следующим образом:

$$x(0) = x^0, \quad x(T) = 0 \quad (2.2)$$

Следуя подходу Калмана [2], управление будем искать в виде линейной комбинации собственных движений однородной (неуправляемой) системы (2.1).

Введем обозначения

$$s = \sin t, \quad c = \cos t \quad (2.3)$$

Фундаментальная матрица решений однородной системы и обратная к ней матрица имеют вид

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t) = \begin{vmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Введем в рассмотрение вектор

$$h(t) = \Phi^{-1}(t)b, \quad h^T(t) = (s, -c, -t, 1) \quad (2.4)$$

и матрицы

$$Q(t) = h(t)h^T(t) = \begin{vmatrix} s^2 & -sc & -ts & s \\ -sc & c^2 & tc & -c \\ -ts & tc & t^2 & -t \\ s & -c & -t & 1 \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

$$R(t) = \int_0^t Q(\tau) d\tau = \begin{vmatrix} (t-sc)/2 & -s^2/2 & tc-s & 1-c \\ -s^2/2 & (t+sc)/2 & ts+c-1 & -s \\ tc-s & ts+c-1 & t^3/3 & -t^2/2 \\ 1-c & -s & -t^2/2 & t \end{vmatrix}$$

Выражение для управляющей функции $u(t)$, переводящей систему (2.1) из начального состояния x^0 в начало координат фазового пространства, может быть записано [2] в виде

$$u(t) = V^T(t, T)x^0, \quad V(t, T) = -R^{-1}(T)h(t) \quad (2.6)$$

3. Соблюдение ограничений на управляющую функцию. Покажем, что, выбирая время окончания процесса T достаточно большим, можно гарантировать выполнение ограничений (1.2) на управление $u(t)$. Оценим для этого функцию $u(t)$ следующим образом:

$$|u(t)| \leq \sum_{i=1}^4 |V_i(t, T)x_i^0| \leq \|V(t, T)\|_{\infty} \|x^0\|_1 \quad (3.1)$$

Через $\|\cdot\|_{\infty}$ и $\|\cdot\|_1$ обозначены нормы в пространствах R_{∞}^4 и R_1^4 соответственно, которые для произвольного вектора q имеют вид

$$\|q\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq 4} |q_i|, \quad \|q\|_1 = \sum_{i=1}^4 |q_i|$$

Введем вспомогательную функцию

$$\nu(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \|V(t, T)\|_{\infty} \quad (3.2)$$

и перепишем оценку (3.1) следующим образом:

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u(t)| \leq \nu(T) \|x^0\|_1 \quad (3.3)$$

Предложим два способа определения момента окончания движения T , обеспечивающие выполнение ограничений (1.2). Первый основан на аналитических оценках функции $u(T)$, второй – на численном построении этой функции.

Будем сначала выбирать в качестве T величину $T = 2\pi n$, где n – натуральное число. В этом случае матрица $R(T)$ упрощается

$$R(T) = \begin{vmatrix} T/2 & 0 & T & 0 \\ 0 & T/2 & 0 & 0 \\ T & 0 & T^3/3 & -T^2/2 \\ 0 & 0 & -T^2/2 & T \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

а обратная к ней матрица имеет вид

$$R^{-1}(T) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2T & 0 & -24/T & -12 \\ 0 & 2\Delta/T & 0 & 0 \\ -24/T & 0 & 12/T & 6 \\ -12 & 0 & 6 & 4(T^2 - 6)/T \end{vmatrix}, \quad \Delta = T^2 - 24 \quad (3.5)$$

Выпишем компоненты вектор-функции $V(t, T)$, используя последнее выражение для матрицы $R^{-1}(T)$ и соотношение (2.4), и оценим их, учитывая неравенство $T \geq 2\pi$, следующим образом:

$$\begin{aligned} |V_1(t, T)| &= \frac{|2T^2 \sin t + 24t - 12T|}{T\Delta} \leq \frac{2T + 12}{\Delta} \leq \frac{4T}{\Delta} \\ |V_2(t, T)| &= \frac{|2 \cos t|}{T} \leq \frac{2}{T} \leq \frac{4T}{\Delta} \\ |V_3(t, T)| &= \frac{|-24 \sin t - 12t + 6T|}{T\Delta} \leq \frac{6T + 24}{T\Delta} \leq \frac{4T}{\Delta} \\ |V_4(t, T)| &= \frac{|-12 \sin t - 6Tt + 4T^2 - 24|}{T\Delta} \leq \frac{4T^2 - 12}{T\Delta} \leq \frac{4T}{\Delta} \end{aligned}$$

Из полученных оценок и определения (3.2) функции $\nu(T)$ вытекает неравенство $\nu(T) \leq 4T/\Delta$. Отсюда и из соотношения (3.3) получаем оценку для управляющей функции $u(t)$

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u(t)| \leq \frac{4T}{T^2 - 24} \|x^0\|_1 \quad (3.6)$$

Так как $T = 2\pi n$, $n \in N$, то при достаточно больших n будет выполнено условие

$$4T/(T^2 - 24) \leq a/\|x^0\|_1 \quad (3.7)$$

Неравенства (3.6), (3.7) гарантируют выполнение ограничения (1.2).

Укажем еще один способ, как выбирать время окончания процесса T , чтобы обеспечить выполнение ограничения (1.2) для управляющей функции (2.6). Построим для этого функцию $u(T)$ численно, используя соотношения (2.5) – (2.6) и (3.2). Функция $u(T)$ целиком определяется матрицей A и вектором b системы (2.1), поэтому такое построение может быть выполнено для данной системы заранее 1 раз.

На фиг. 3 представлен график функции $u(T)$. Как и следовало ожидать, макси-

мальная величина управляющей силы оказалась тем меньше, чем больше время движения системы до терминального состояния. В качестве времени окончания процесса могут быть выбраны любые значения T , при которых

$$v(T) \leq a \|x^0\|_1 \quad (3.8)$$

4. Соблюдение ограничений на фазовые координаты. Обратимся теперь к вопросу о выборе величины T , обеспечивающем выполнение ограничений (1.8). В принятых обозначениях решение системы (2.1), начинающееся в момент времени $t = 0$ в точке x^0 , имеет вид

$$x(t) = \Phi(t) \left(x^0 + \int_0^t h(\tau) u(\tau) d\tau \right)$$

Подставим сюда выражение (2.6) для управляющей функции $u(t)$ и воспользуемся соотношениями (2.5), задающими матрицу $R(t)$. Получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t) \left(x^0 - \int_0^t h(\tau) [h^\top(\tau) R^{-1}(T) x^0] d\tau \right) = \Phi(t) \left(x^0 - \left[\int_0^t h(\tau) h^\top(\tau) d\tau \right] R^{-1}(T) x^0 \right) = \\ &= \Phi(t) (x^0 - R(t) R^{-1}(T) x^0) = W(t, T) x^0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$W(t, T) = \Phi(t) [R(T) - R(t)] R^{-1}(T)$$

Как и в случае с ограничением (1.2), предложим два способа определения величины T , гарантирующие выполнение условия (1.8).

Будем сначала выбирать время окончания процесса в виде $T = 2\pi n$, $n \in N$. Оценим евклидову норму вектора x через нормы матриц, стоящих в правой части (4.1) (под нормой матрицы понимаем норму соответствующего оператора в евклидовом пространстве).

Известно [5], что величина $\|\Phi(t)\|^2$ равна максимальному собственному числу $\Phi(t)$ матрицы

$$\Phi^\top(t) \Phi(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 + 1 & t \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix}, \quad t \in [0, T]$$

Нетрудно вычислить, что $\Phi(t) \leq t^2 + 2$, откуда получаем

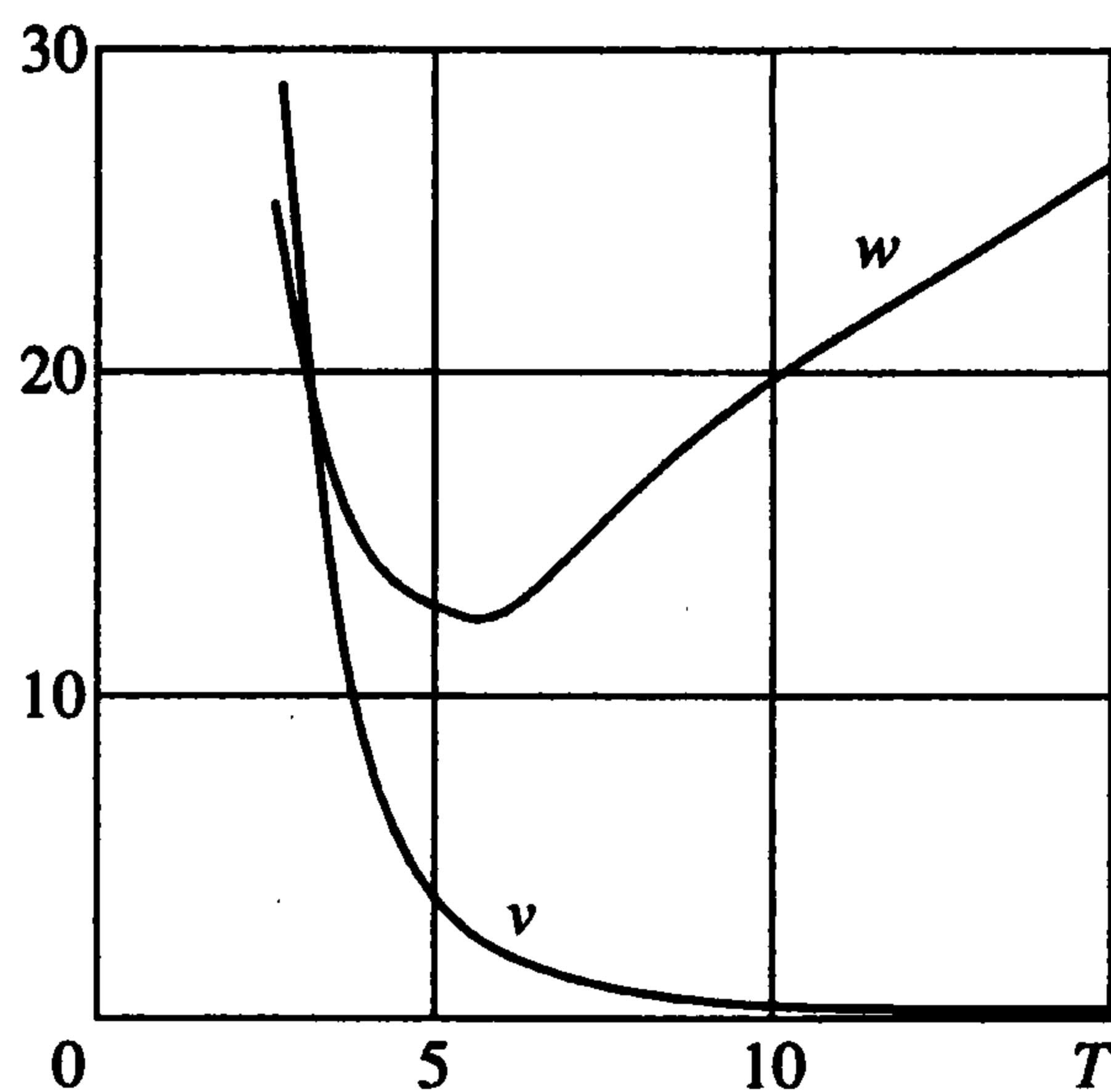
$$\|\Phi(t)\| \leq (T^2 + 2)^{1/2} \quad (4.2)$$

Матрица $R^{-1}(T)$ является симметрической и положительно определенной, следовательно, ее собственные числа положительны, а максимальное из них равно норме матрицы. Кроме того [5], сумма всех собственных чисел равна следу матрицы $R^{-1}(T)$. Из вида (3.5) матрицы $R^{-1}(T)$ можно заключить, что число $2/T$ является одним из ее собственных значений и

$$\frac{\text{tr } R^{-1}(T)}{4} = \frac{2T^2 - 15}{T(T^2 - 24)} > \frac{2}{T}$$

Следовательно, число $2/T$ не является максимальным собственным значением и

$$\|R^{-1}(T)\| \leq \text{tr } R^{-1}(T) - \frac{2}{T} = \frac{6(T^2 - 2)}{T(T^2 - 24)}, \quad T = 2\pi n \quad (4.3)$$



Фиг. 3

В силу определения матрицы R имеем

$$R(T) - R(t) = \int_t^T Q(\tau) d\tau = \int_t^T h(\tau) h^T(\tau) d\tau$$

Будем рассматривать функции $\sin \tau$, $-\cos \tau$, $-\tau$ и 1 , составляющие вектор-функцию $h(\tau)$, как элементы предгильбертова пространства $C_2[t, T]$ непрерывных на отрезке $[t, T]$ функций со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_t^T f(\tau) g(\tau) d\tau$$

Так как перечисленные функции линейно независимы, то матрица $(R(T) - R(t))$, которая представляет собой их матрицу Грама, является симметрической положительно-определенной матрицей [6].

Рассуждая аналогично, можно показать, что матрицы $R(t)$ и $R(T)$ также симметрические и положительно-определенные, так как представляют собой матрицы Грама тех же линейно независимых функций, рассматриваемых как элементы пространств $C_2[0, t]$ и $C_2[0, T]$ соответственно. Кроме того,

$$R(T) - R(t) < R(T), \quad 0 < t \leq T \quad (4.4)$$

(неравенство $X < Y$ для симметрических матриц X и Y означает, что матрица $Y - X$ положительно определена). Так как норма симметрической положительно-определенной матрицы равна ее максимальному собственному числу, а неравенство (4.4) влечет [5] соответствующее неравенство для собственных чисел матриц $R(T) - R(t)$ и $R(T)$, то справедливо соотношение $\|R(T) - R(t)\| \leq \|R(T)\|$.

Для оценки $\|R(T)\|$ воспользуемся рассуждением, аналогичным проведенному выше в отношении матрицы $R^{-1}(T)$. Из вида (3.4) матрицы $R(T)$ можно заключить, что число $T/2$ — не максимальное собственное значение $R(T)$, поэтому

$$\|R(T)\| \leq \text{tr } R(T) - T/2 = T(2T^2 + 9)/6, \quad T = 2\pi n$$

Из (4.1) – (4.3), равенства $\|p\| = (m_1^2 + m_2^2)^{1/2} / m_2$ и последнего соотношения вытекает

$$\begin{aligned} |p^T x(t)| &\leq \|p\| \|\Phi(t)\| \|R(T) - R(t)\| \|R^{-1}(T)\| \|x^0\| \leq \\ &\leq (m_1^2 + m_2^2)^{1/2} (2T^2 + 9)(T^2 - 2)(T^2 + 2)^{1/2} \|x^0\| / (m_2(T^2 - 24)) \end{aligned}$$

Следовательно, в качестве времени окончания процесса можно выбирать такие значения $T = 2\pi n$, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{(2T^2 + 9)(T^2 - 2)(T^2 + 2)^{1/2}}{T^2 - 24} \leq \frac{m_2 k d}{(m_1^2 + m_2^2)^{1/2} \|x^0\|} \quad (4.5)$$

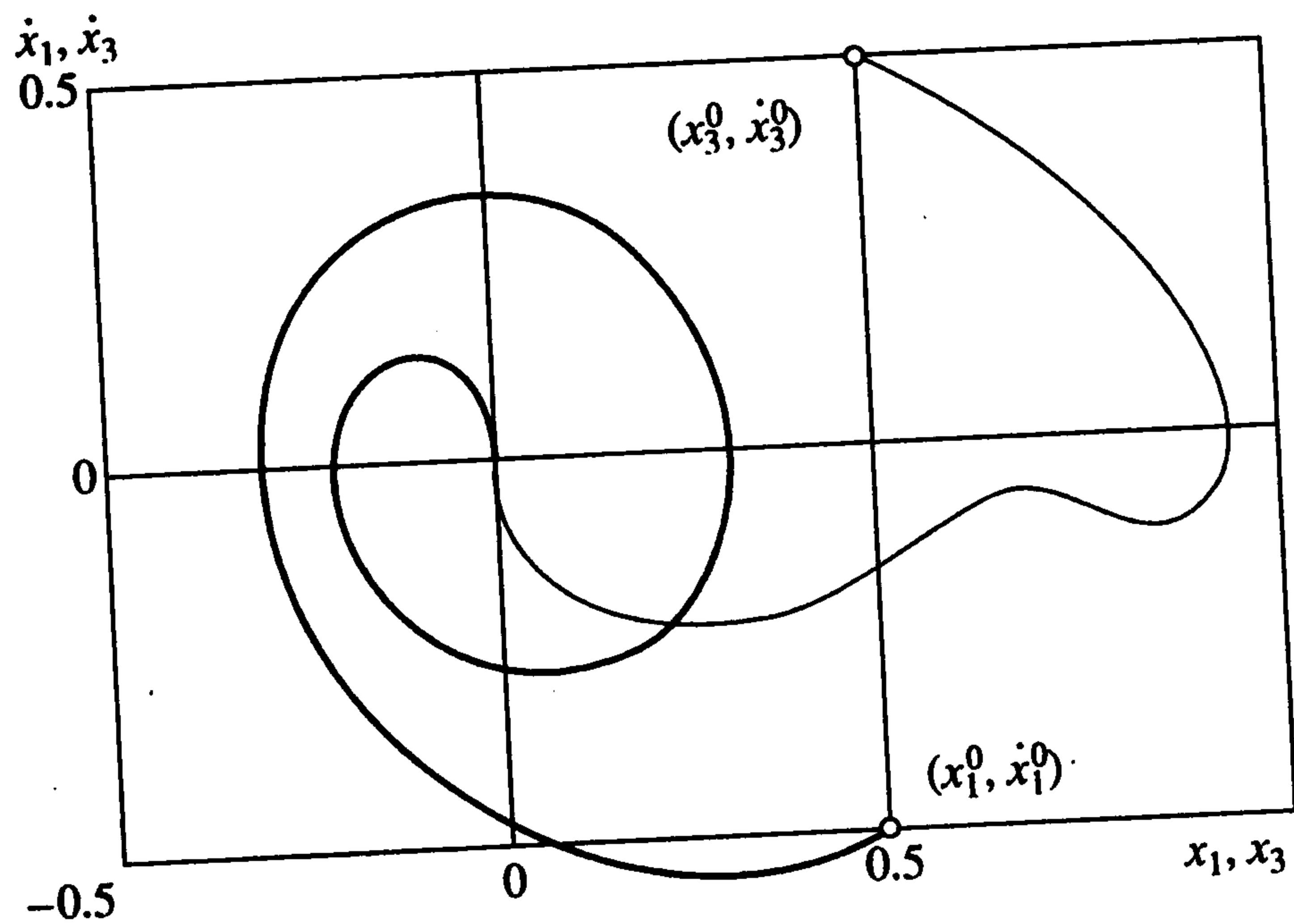
Рассмотрим еще один способ определения величины T , обеспечивающий выполнение ограничений (1.8). Из (4.1) вытекает

$$|p^T x(t)| \leq |p^T W(t, T) x^0| \leq w(T) \|x^0\|, \quad w(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \|W^T(t, T) p\|$$

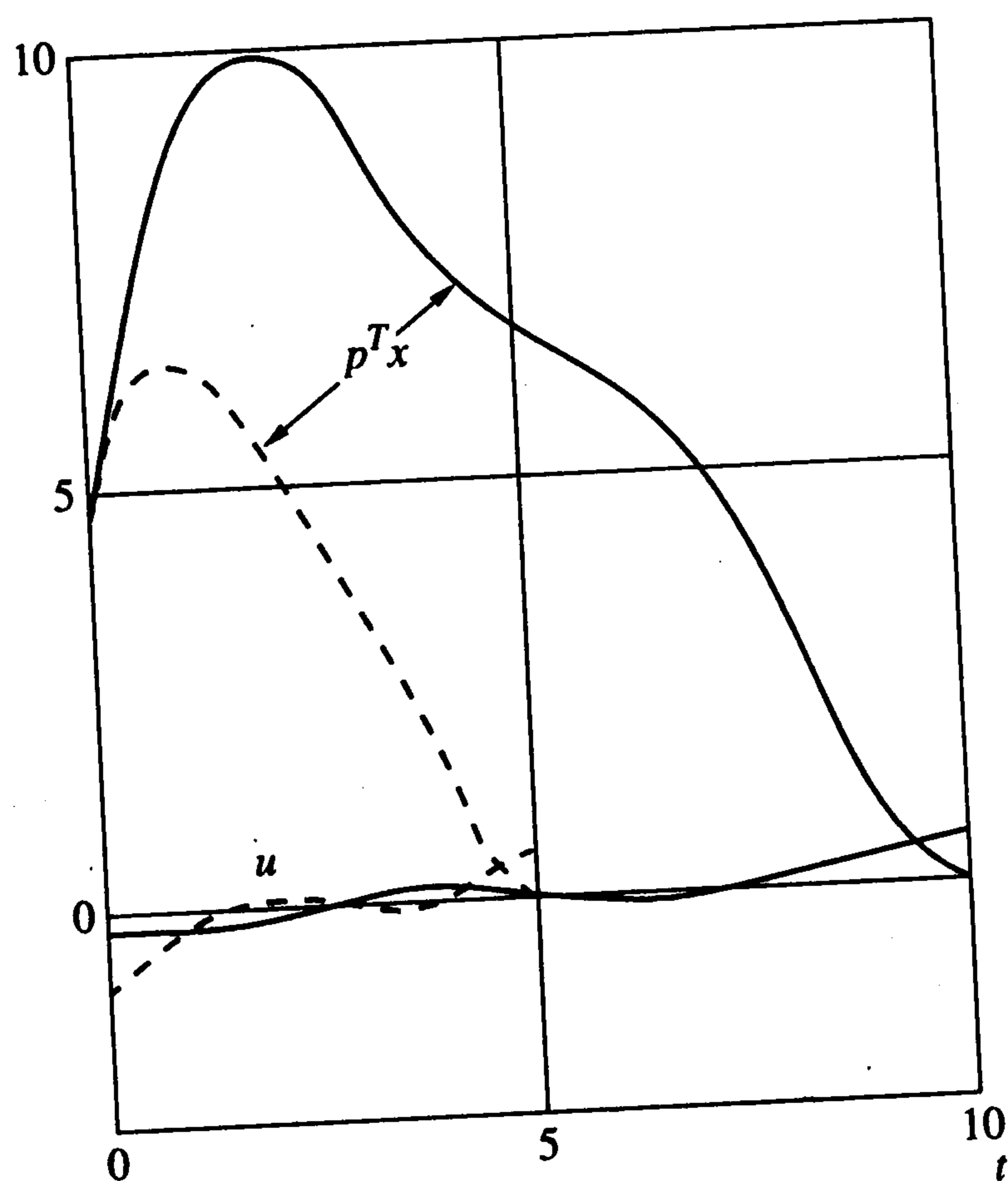
Построим функцию $w(T)$ численно. Эта функция целиком определяется матрицей A и векторами b и p , поэтому такое построение достаточно выполнить 1 раз.

На фиг. 3 представлен график функции $w(T)$. Видно, что с увеличением продолжительности процесса T величина $w(T)$ растет, хотя и немонотонно. В качестве времени окончания движения могут быть выбраны любые T , при которых значение функции $w(T)$ удовлетворяет неравенству

$$w(T) \leq kd / \|x^0\| \quad (4.6)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

5. Расчет управления и численное моделирование. Таким образом, предлагается следующая процедура построения управляющей функции $u(t)$. Сначала для заданного вектора начального состояния x^0 выбираем величину T – момент окончания процесса. Величину T можно искать в виде $T = 2\pi n$, где натуральное число n должно быть таким, чтобы выполнялись условия (3.7) и (4.5). Еще один способ нахождения времени заключается в численном построении функций $v(T)$ и $w(T)$ и выборе такого значения T , при котором выполняются неравенства (3.8) и (4.6).

После определения момента окончания процесса T управляющая функция u вычисляется аналитически согласно (2.6). Выражение для обратной матрицы $R^{-1}(T)$ полученное с помощью компьютерной программы MAPLE, оказывается довольно

громоздким. Приведем для примера левый верхний элемент этой матрицы, используя обозначения (2.3):

$$r_{11} = 2[(T^4 - 36T^2 + 72)sc + T(8T^2 - 9)c^2 + 36(T^2 - 2)s - \\ - 12T(T^2 - 6)c + T^5 - 14T^3 + 18][16T(T^2 + 15)sc + (T^4 - 96T^2 + 192)c^2 + \\ + 40T^2(T - 60)s - 8(T^4 - 6T^2 + 48)c + T^6 - 17T^4 + 48T^2 + 192]^{-1}$$

На фиг. 4 представлены результаты численного моделирования динамики системы (2.1). Система переводилась из начального состояния $x^0 = (0,5; -0,5; 0,5; 0,5)$ в начало координат. Время окончания процесса было выбрано равным $T = 10$. Жирной линией показана проекция фазовой траектории на плоскость $x_1, x_2 = \dot{x}_1$, а тонкой – ее проекция на плоскость $x_3, x_4 = \dot{x}_3$.

На фиг. 5 сплошными линиями изображены графики зависимости от времени управляющей функции $u(t)$ и величины

$$|p^T x(t)| = |m_1 x_3 / m_2 - x_1| = k |z(t) - y(t)|$$

из ограничения (1.8) для случая $m_1/m_2 = 10$. Для сравнения штриховыми линиями приведены графики тех же функций, но для времени окончания процесса $T = 5$. Видно, что величина $|p^T x(t)|$ при этом уменьшилась, а максимум модуля управляющей силы $u(t)$ возрос.

Работа выполнена в рамках гранта поддержки ведущих научных школ (00-15-96013) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00258 и 99-01-00222).

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Кумакшев С.А., Чернов А.А. Активное гашение колебаний крупногабаритных несущих конструкций посредством перемещения внутренних масс // Изв. АН СССР. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 135–145.
2. Kalman R.E. On the General Theory of Control Systems. Proc. 1st IFAC Congress. V. 1. London: Butterworths, 1960 = Калман Р. Об общей теории систем управления // Тр. 1-го конгр. Международной федерации по автомат. управлению (IFAC). М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 2. С. 521–547.
3. Черноусько Ф.Л. О построении ограниченного управления в колебательных системах // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 549–558.
4. Добрынина И.С., Черноусько Ф.Л. Ограниченное управление линейной системой четвертого порядка // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 6. С. 94–100.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
6. Bellman R. Introduction to Matrix Analysis. N.Y., etc.: McGraw – Hill, 1960 = Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.2000