

УДК 539.374

© 2000 г. Л.А. Максимова

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ СЛОЯ, СЖАТОГО ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

Анализируется возможность представления решения задачи об обжатии пространственного слоя двумя шероховатыми плитами, если использовать допущение Прандтля о линейном изменении по толщине касательных напряжений (не зависящих от координат вдоль плит). Рассматривается также случай анизотропного материала с пределом текучести, подчиняющимся условию Хилла.

Асимптотическое решение Прандтля [1] для плоского слоя из идеально пластического материала, сжатого жесткими шероховатыми плитами, определило основные представления о характере распределения давления и послужило основой для многих работ по теории обработки металлов давлением. Д.Д. Ивлев [2], исходя из условия полной пластичности Хаара и Кармана [3], предложил обобщение решения Прандтля на случай пространственного состояния слоя. Ниже рассматривается сжатие идеально пластического слоя в случае неколлинеарного направления контактного трения на поверхностях сжимающих плит; изучается также влияние сдвигающих напряжений на величину предельного сдавливающего усилия в случае идеально пластического анизотропного материала.

1. Сжатие идеально пластического изотропного слоя. Условие полной пластичности, предложенное в работе Хаара и Кармана [3]

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 + 2k, \quad k = \text{const} \quad (1.1)$$

где σ_i – компоненты главных напряжений, k – предел текучести на сдвиг, может быть записано в виде [4]

$$\sigma_x = \sigma - \frac{2k}{3} + 2kn_1^2, \quad \tau_{xy} = 2kn_1n_2 \quad (xyz, 123) \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (1.2)$$

где $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$ – компоненты напряжений в декартовой системе координат xyz ; n_1, n_2, n_3 – направляющие косинусы, определяющие ориентацию третьего главного напряжения σ_3 в пространстве xyz . Здесь и далее символ $(xyz, 123)$ означает, что к выписанным соотношениям должны быть добавлены соотношения, получающиеся круговой перестановкой указанных индексов.

Соотношения (1.2) могут быть переписаны в виде

$$\sigma_x = \sigma - \frac{2k}{3} + \frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}} \quad (xyz) \quad (1.3)$$

$$\frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}} + \frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}} + \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}} = 2k$$

Рассмотрим слой пластического материала толщиной $2h$ и введем декартову систему координат, так что границы слоя соответствуют $z = h_1$ и $z = -h_2$; $h_1 + h_2 = 2h$.

Следуя Прандтлю [1], используем предположение о линейном изменении касательного напряжения по толщине слоя

$$\tau_{xz} = az + c_1, \quad \tau_{yz} = bz + c_2, \quad a, b, c_1, c_2 = \text{const} \quad (1.4)$$

Из соотношений (1.3), (1.4) получим

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{(az + c_1)(bz + c_2)}{(az + c_1)^2 + (bz + c_2)^2} [k \pm (k^2 - (az + c_1)^2 - (bz + c_2)^2)^{1/2}] \\ \sigma_x &= \sigma - \frac{2k}{3} + \tau_{xy} \frac{az + c_1}{bz + c_2} \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{2k}{3} + \tau_{xy} \frac{bz + c_2}{az + c_1} \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{2k}{3} + \frac{1}{\tau_{xy}} (az + c_1)(bz + c_2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (xyz)$$

и соотношений (1.4), (1.5) получим

$$\begin{aligned} \sigma &= -ax - by + C + \frac{2k}{3} - \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}}, \quad C = \text{const} \\ \sigma_x &= -ax - by + C + \frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}} - \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}} \\ \sigma_y &= -ax - by + C + \frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}} - \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}} \\ \sigma_z &= -ax - by + C \end{aligned} \quad (1.6)$$

причем τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} определяются согласно соотношениям (1.4) и первому соотношению (1.5).

Из последнего равенства (1.6) следует

$$\text{grad } \sigma_z = -a\mathbf{i} - b\mathbf{j} \quad (1.7)$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ – единичные орты вдоль осей x , y .

Введем ортогональные координаты

$$\xi = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad \eta = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1.8)$$

Тогда

$$\sigma_z = -\xi \sqrt{a^2 + b^2} + C \quad (1.9)$$

Припишем компонентам напряжений на сторонах слоя, индекс плюс и минус соответственно.

На $z = h_1$ и $z = -h_2$ верхней и нижней сторонах слоя согласно соотношениям (1.4) получим

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^+ &= ah_1 + c_1, \quad \tau_{yz}^+ = bh_1 + c_2, \quad z = h_1 \\ \tau_{xz}^- &= ah_2 + c_1, \quad \tau_{yz}^- = -bh_2 + c_2, \quad z = -h_2\end{aligned}\quad (1.10)$$

Векторы касательных напряжений и величины результирующих касательных напряжений на сторонах слоя будут иметь вид

$$\mathbf{T}_1 = \tau_{xz}^+ \mathbf{i} + \tau_{yz}^+ \mathbf{j}, \quad \mathbf{T}_2 = \tau_{xz}^- \mathbf{i} + \tau_{yz}^- \mathbf{j} \quad (1.11)$$

$$T_1 = \sqrt{\tau_{xz}^{+2} + \tau_{yz}^{+2}} = \sqrt{(ah_1 + c_1)^2 + (bh_1 + c_2)^2} = k_1 \leq 1$$

$$T_2 = \sqrt{\tau_{xz}^{-2} + \tau_{yz}^{-2}} = \sqrt{(-ah_2 + c_1)^2 + (-bh_2 + c_2)^2} = k_2 \leq 1 \quad (1.12)$$

Угол φ между векторами $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ и их направления равенствам, согласно (1.10), (1.11), определяются из соотношений

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2}{T_1 T_2} = \frac{c_1^2 + c_2^2 - (a^2 + b^2)h_1 h_2 + (c_1 a + c_2 b)(h_1 - h_2)}{k_1 k_2} \quad (1.13)$$

$$\operatorname{tg} \mu_1 = \frac{\tau_{yz}^+}{\tau_{xz}^+} = \frac{bh_1 + c_2}{ah_1 + c_1}, \quad \operatorname{tg} \mu_2 = \frac{\tau_{yz}^-}{\tau_{xz}^-} = \frac{bh_2 - c_2}{ah_2 - c_1}, \quad \varphi = \mu_2 - \mu_1 \quad (1.14)$$

Величины a , b , c_1 , c_2 определяются заданием величин k_1 , k_2 , μ_1 , μ_2 .

Случай $c_1 = c_2 = 0$, $\mu_1 = \mu_2$ рассмотрен ранее [2].

Предположим, что вектор $\mathbf{T}_1$ направлен вдоль оси x , тогда, согласно соотношениям (1.10), (1.11), (1.13), получим

$$\mu_1 = 0, \quad \varphi = \mu_2, \quad \cos \varphi = \frac{2ah - k_1}{k_2}, \quad \sin \varphi = \frac{2bh}{k_2}$$

Из последних двух равенств выразим a и b через k_1 , k_2 и из соотношения (1.9) получим

$$\sigma_z = -\frac{1}{2h}(k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \cos \varphi)^{1/2} \xi + C \quad (1.15)$$

Уравнение линии, параллельно которой изменяется давление σ_z , согласно соотношениям (1.8), имеет вид

$$y = \frac{b}{a} x = \frac{k_2 \sin \varphi}{k_1 + k_2 \cos \varphi} x \quad (1.16)$$

При $k_1 = k_2 = k$ имеем

$$\sigma_z = -\frac{k}{h} \xi \cos \frac{\varphi}{2} + C, \quad y = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} x \quad (1.17)$$

т.е. в этом случае давление σ_z растет по линейному закону вдоль биссектрисы угла между направлениями векторов напряжений $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$.

Случай $\varphi = 0$ соответствует решению Прандтля [1]

$$\sigma_z = -\frac{k}{h} x + C, \quad \xi = x, \quad a = \frac{k}{h}, \quad c_1 = b = c_2 = 0 \quad (1.18)$$

При $\varphi = \pi/2$ имеем

$$\sigma_z = -\frac{\sqrt{2}k}{h}\xi + C, \quad \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \quad (1.19)$$

т.е. изменение давления происходит по прямому, параллельному прямой $y = x$.

Для определения постоянной C следует воспользоваться предположениями об интегральном характере распределения усилий на краю плиты [5].

Соотношения, определяющие кинематику пластического течения, могут быть записаны в виде [4]

$$\varepsilon_x + \varepsilon_{xy} \frac{n_2}{n_1} + \varepsilon_{xz} \frac{n_3}{n_1} = \varepsilon_{xy} \frac{n_1}{n_2} + \varepsilon_y + \varepsilon_{yz} \frac{n_3}{n_2} = \varepsilon_{xz} \frac{n_1}{n_3} + \varepsilon_{yz} \frac{n_2}{n_3} + \varepsilon_z \quad (1.20)$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \quad (1.21)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_{xy}, \dots$ — компоненты скорости пластической деформации.

Решение определяется в виде

$$U = p_1 x + q_1 y + u(z), \quad V = p_2 x + q_2 y + v(z), \\ W = pz \quad (1.22)$$

где U, V, W — компоненты скорости перемещения.

Используя выражения (1.2) и (1.21), придадим соотношениям (1.20) вид

$$\tau_{yz} \left(\frac{2p_1}{\tau_{yz}} + \frac{q_1 + p_2}{\tau_{xz}} + \frac{u'}{\tau_{xy}} \right) = \tau_{xz} \left(\frac{q_1 + p_2}{\tau_{yz}} + \frac{2q_2}{\tau_{xz}} + \frac{v'}{\tau_{xy}} \right) = \tau_{xy} \left(\frac{u'}{\tau_{yz}} + \frac{v'}{\tau_{xz}} + \frac{2p}{\tau_{xy}} \right) \quad (1.23)$$

где штрих означает производную по z . Компоненты касательных напряжений σ определены согласно соотношениям (1.5) и являются функциями координаты z . Два уравнения (1.23) определяют две непрерывные функции $u(z), v(z)$.

Таким образом, согласно соотношениям (1.5), (1.22), (1.23) и уравнениям равновесия, компоненты напряжений и скоростей деформации могут быть определены.

Рассмотрим случай, когда на решение Прандтля (1.18) наложены сдвигающие усилия

$$\tau_{xz} = \frac{k_1 z}{h}, \quad \tau_{yz} = k_2, \quad k_1^2 + k_2^2 = k^2 \quad (1.24)$$

решению Прандтля соответствует $k_2 = 0$.

Из соотношений (1.3), (1.24) получим

$$\tau_{xy} = \frac{k + \sqrt{k^2 - [(k_1 z)^2 + k_2^2]}}{(k_1 z)^2 + k_2^2} k_1 k_2 z \quad (1.25)$$

Сдвигающие усилия $\tau_{yz} = k_2$ приводят к появлению напряжений τ_{xy} (1.25), определяющих кручение вдоль оси y . Момент кручения на единицу длины может быть определен из соотношения

$$M = 2 \int_{-h_2}^{h_1} \tau_{xy} z dz$$

Согласно последнему соотношению (1.24), (1.25), характер распределения сдвигающего напряжения

$$\sigma_z = -\frac{1}{h}(\sqrt{k^2 - k_2^2})x + C \quad (1.26)$$

сохраняет линейный характер, величина сдвигающего усилия $\tau_{yz} = k_2$ оказывает влияние на угловой коэффициент прямой, определяющей зависимость σ_z от координаты x . Величина $\tau_{yz} = k_2$ влияет также на значение постоянной C , которая определяется из условий равновесия на свободных краях слоя. При свободном крае полосы $x = 0$ следует положить

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma_x dy = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (1.27)$$

Напряжение σ_x — определяется согласно второму соотношению (1.5) и равенствам (1.24).

При $k_2 = k$, согласно (1.24), $k_1 = 0$ соотношения (1.24), (1.25), (1.6) принимают вид

$$\sigma_x = C + k, \quad \sigma_y = C, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = k \quad (1.28)$$

Из равенства (1.27) и первого соотношения (1.28) следует

$$C = -k \quad (1.29)$$

и предельное напряженное состояние слоя при выполнении условия полной пластичности, согласно соотношениям (1.1), (1.28), (1.29), имеет вид

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \sigma_z = -k, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = k \quad (1.30)$$

2. Случай анизотропного материала. Для анизотропного материала предел текучести k (1.1) зависит от направления растяжения [2]

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 2k(n_1, n_2, n_3) \quad (2.1)$$

Предположим, что поверхность пределов текучести в пространстве x_{yz} определена в виде [6]

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(F\tau_{xy}^2 + G\tau_{yz}^2 + H\tau_{xz}^2) = 6k_0^2 \quad (2.2)$$

где A, B, C, F, G, H, k_0 — постоянные.

Из (2.1), (2.2) получим

$$k^2(n_1, n_2, n_3) = \frac{3k_0^2}{2} [A(n_1^2 - n_2^2)^2 + B(n_2^2 - n_3^2)^2 + C(n_3^2 - n_1^2)^2 + 6(Fn_1n_2^2 + Gn_2n_3^2 + Hn_3n_1^2)]^{-1} \quad (2.3)$$

При растяжении вдоль оси x, y или z имеем соответственно $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$; $n_1 = n_3 = 0, n_2 = 1$ или $n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1$. Из соотношений (2.3)

$$k_1^2 = k^2(1, 0, 0) = \frac{3k_0^2}{2(A + C)} \quad (123, ABC)$$

$$k_2^2 = k^2(0, 1, 0), \quad k_3^2 = k^2(0, 0, 1) \quad (2.4)$$

Далее будем иметь

$$k_4^2 = k^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{6k_0^2}{B + C + 6F} \quad (456, ABC, FGH) \quad (2.5)$$

Из соотношений (2.4), (2.5) найдем

$$A = \frac{3}{4}k_0^2\left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2}\right) \quad (123, ABC) \quad F = k_0^2\left(\frac{1}{k_4^2} - \frac{1}{4k_3^2}\right) \quad (123, 456, FGH) \quad (2.6)$$

Согласно соотношениям (2.6), вид предельной поверхности полностью определяется величинами пределов текучести $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$. Предел текучести $k(n_1, n_2, n_3)$ по любому направлению, определяемому величинами n_1, n_2, n_3 согласно (2.3)–(2.7), определяется заданием пределов текучести $k_i, i = 1, 2, \dots, 6$.

Из соотношений (1.3), (2.2) найдем

$$\tau_{xy}^4 \left[(A+B) \left(\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} \right)^2 + (A+C) \left(\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}} \right)^2 - 2A + 6F \right] - 2\tau_{xy}^2 [(B-3G)\tau_{yz}^2 + (C-3H)\tau_{xz}^2 + 3k_0^2] + (B+C)\tau_{xz}^2 \tau_{yz}^2 = 0 \quad (2.7)$$

Принимая предположения (1.4), из соотношений (1.5) и (2.7) определим

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(z). \quad (2.8)$$

Согласно соотношениям (1.3), (1.4), (2.8), величина $k = k(n_1, n_2, n_3)$ – функция одной переменной z . Следовательно, из равенств (1.3), (1.4) и уравнений равновесия следуют последние три выражения (1.6). Величина сдвигающего давления будет определяться согласно последнему равенству (1.6)

$$\sigma_z = -ax - by + C \quad (2.9)$$

Вид анизотропии не влияет на характер распределения давления, определяемого величиной σ_z . В выражениях для компонент σ_x, σ_y (1.6) влияние анизотропии, согласно равенствами (1.4), (2.7), определяется величиной τ_{xy} (2.7), влияние анизотропии проявляется величиной постоянной C (1.6), (2.9), определяемой из граничных условий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00066).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прандтль Л.* О твердости пластических материалов и сопротивлении резанию // Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 70–79.
2. *Ивлев Д.Д.* О пространственном течении идеально пластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Изв. РАН МТТ. 1998. № 1. С. 5–12.
3. *Хаар А., Карман Т.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 41–56.
4. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
5. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
6. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950. = *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
6.XII.1999

e-mail: max @ chuvashia.ru