

© 2000 г. И.Н. Дашевский, В.Э. Шкловер

**ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ ПОДАТЛИВОСТИ
КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ**

Рассматривается серия задач о нахождении формы тонкого криволинейного стержня (опорного элемента искусственного хрусталика) постоянного поперечного сечения, имеющего заданную длину, с концами в заданных точках и находящегося в заданных условиях нагружения при максимальной податливости для характерных типов заделки концов и вариантов нагружения. Показано, что возникающая краевая задача для нелинейного уравнения Эйлера может иметь множество (возможно, счетное) решений, одно из которых реализует абсолютный максимум податливости, а остальные – локальные максимумы. Проведен подробный анализ задачи, в ряде важных случаев получены аналитические решения и построены соответствующие формы.

В ряде задач, связанных с конструкциями, включающими в себя опорные элементы (ОЭ), выполненные в виде тонких криволинейных стержней, возникает необходимость в нахождении формы ОЭ, имеющего максимальную податливость. В частности, это требуется в задачах оптимизации конструкций для интракапсулярного искусственного хрусталика [1]. Ниже задача максимизации податливости рассматривается как вариационная задача на основе изгиба ОЭ как криволинейного стержня, у которого диаметр и момент инерции поперечного сечения считаются постоянными. В рассматривавшихся ранее [2] задачах о стержнях минимальной податливости искомая кривая определяется однозначно. Подробное обоснование принятой постановки, а также обсуждение других подходов к описанию механики системы "капсула – искусственный хрусталик" были приведены ранее в [1, 3–5]¹.

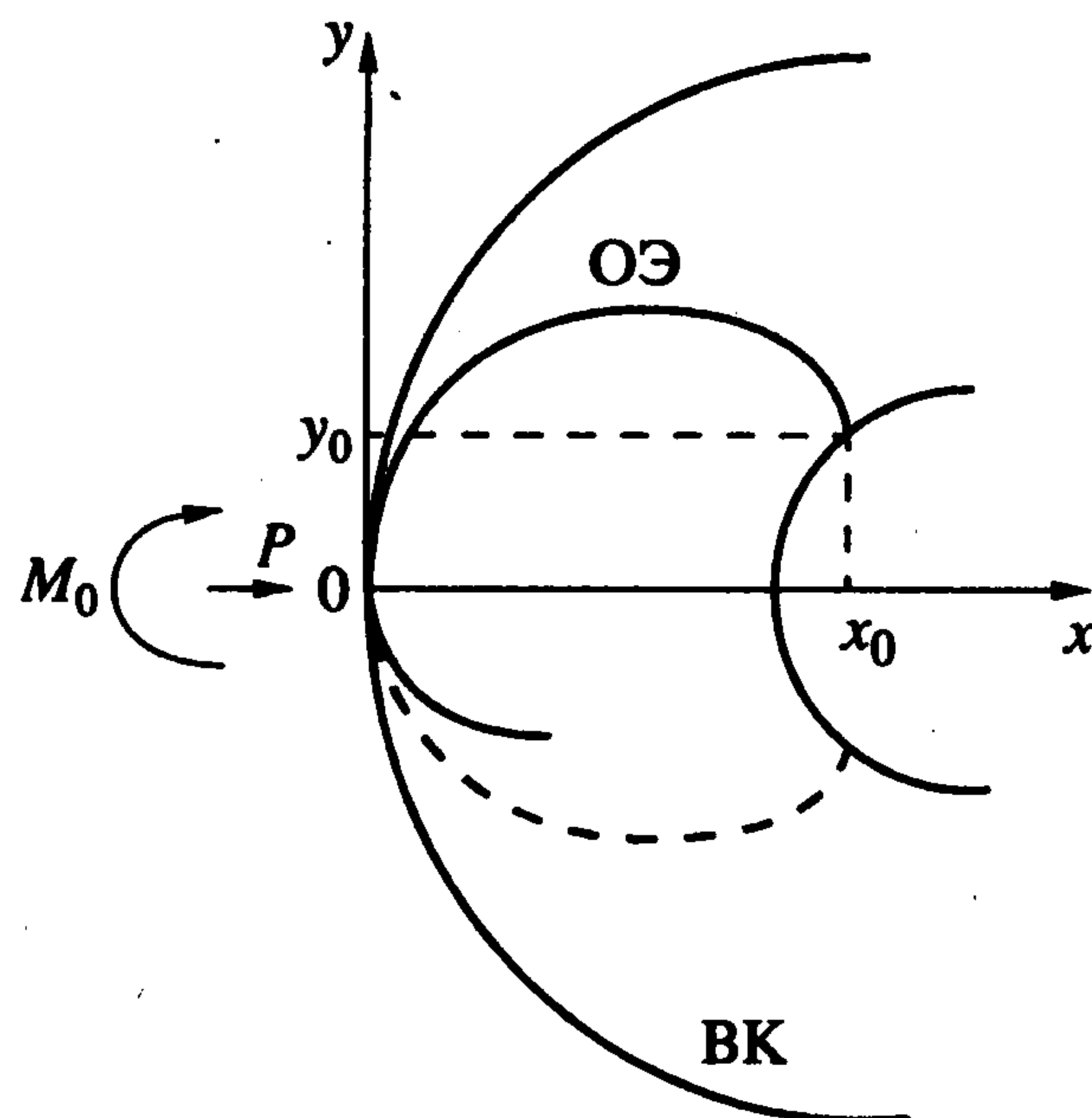
1. Постановка задачи. Формулы для податливости. Для линейных систем связь между обобщенными силами и соответствующими им обобщенными перемещениями линейна: $u_i = P_{ij}Q_j$, где $\|P_{ij}\|$ – матрица податливостей ([6, с. 457]), или "матрица внешней податливости системы" ([7, с. 58]), или "матрица коэффициентов влияния" ([8, с. 159]). Ниже всегда будем рассматривать лишь одно обобщенное перемещение как результат действия одной обобщенной силы, поэтому будем использовать приведенное соотношение в виде $u = PQ$ или $P = u/Q$, всякий раз уточняя, о какой именно податливости P , обобщенной силе Q и обобщенном перемещении u будет идти речь в каждом конкретном случае. Тогда требование максимальной податливости можно в общем виде записать как

$$P = u/Q \rightarrow \max \quad (1.1)$$

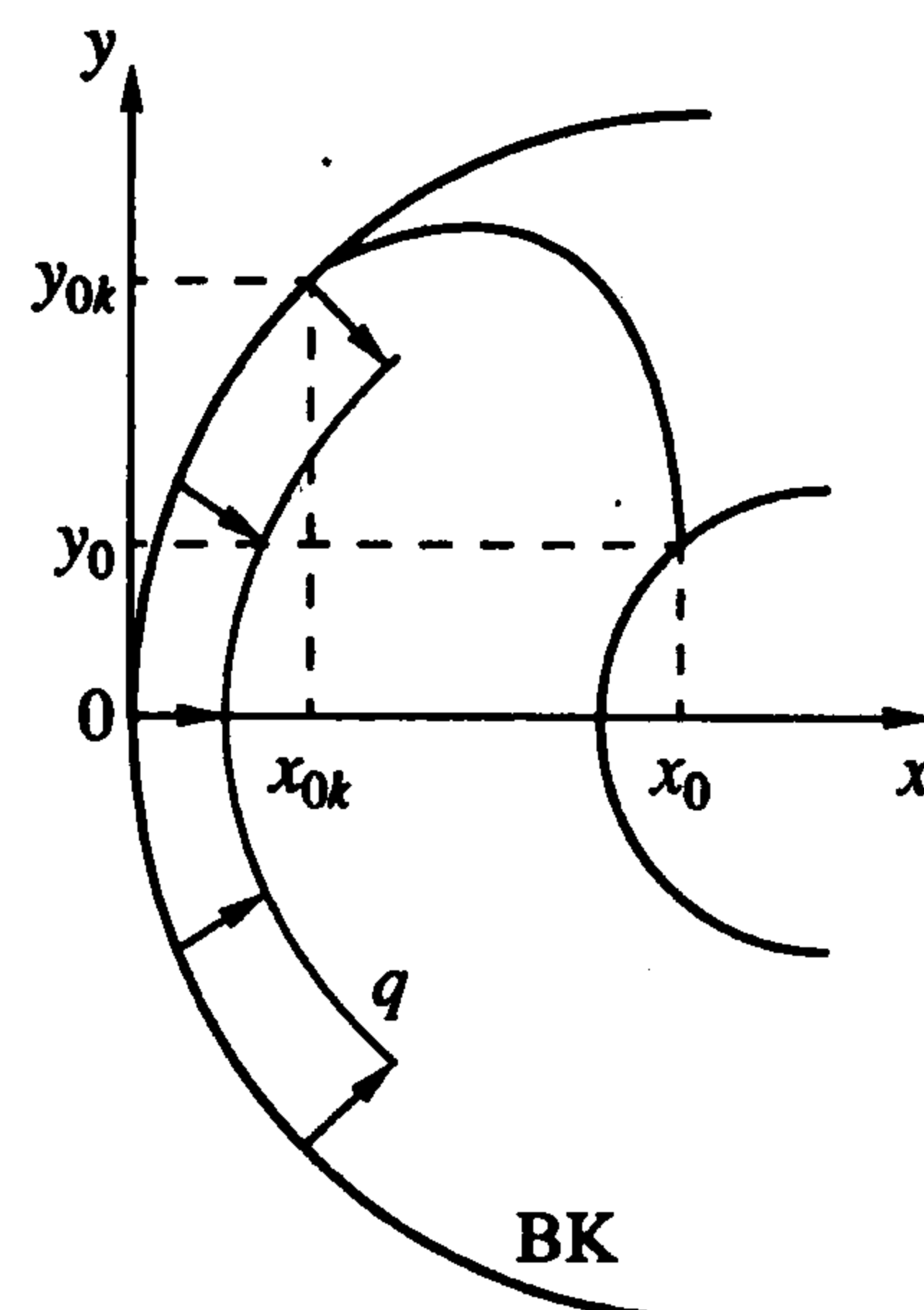
где u – характерные смещения точек ОЭ, Q – приложенные или возникающие реактивно извне со стороны внешней конструкции нагрузки на ОЭ.

С точки зрения качественного анализа и получения эффективных решений удобнее иметь дело с сосредоточенными нагрузками (см. фиг. 1; для незамкнутого ОЭ его нижняя часть показана сплошной, для замкнутого – штриховой линией, ВК – внешняя

¹ См. также Дашевский И.Н., Шкловер В.Э. Некоторые задачи, связанные с механикой искусственного хрусталика. Препринт № 355. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1988. 30 с.; Дашевский И.Н., Шкловер В.Э. Интракапсулярный искусственный хрусталик и криволинейные стержни максимальной податливости. Препринт № 398. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1989. 28 с.



Фиг. 1



Фиг. 2

конструкция). Однако физически область контакта ОЭ с внешней конструкцией имеет конечные размеры (фиг. 2) и Q в (1.1) представляет собой давление q в области контакта (удобно принять его постоянным). При ненулевой области контакта ее форму и размеры в оптимизационной постановке вплоть до разд. 6 будем считать заданными и (в соответствии с офтальмологическим подтекстом: опора ОЭ на круговую капсулу естественного хрусталика) представлять дугой окружности.

Если u – обобщенное смещение в точке a в каком-либо направлении под действием обобщенной силы Q , приложенной в точке b (вообще говоря, $b \neq a$) или распределенной по конечной области, то для плоской в общем случае статически неопределимой стержневой системы, работающей на изгиб, формулу для податливости с использованием интегралов Мора можно записать в прямоугольных декартовых координатах x, y в виде ([8], с. 161, [9], с. 199 и далее)

$$\Pi = \frac{u}{Q} = \frac{1}{EJ} \int_0^{x_0} M_{1a} M_* \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad M_* = M_{1b} + \lambda_1 M_{1c_1} + \dots + \lambda_n M_{1c_n} \quad (1.2)$$

Здесь E – модуль Юнга, J – момент инерции, x_0 – абсцисса конца ОЭ, $y(x)$ – форма ОЭ, M_{1a} – распределение момента за счет единичного силового фактора, действующего в точке a в направлении смещения, M_{1b} – то же для точки b в направлении приложения силы, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – реакции связей в точках $c_1, c_2, \dots, c_n$, порожденные единичным силовым фактором Q , M_{1c} – распределения моментов, порождаемые единичными реакциями связей в точках c (для статически определимой системы $\lambda_i = 0$ и $M_* = M_{1b}$). Уравнения связей, выражающие отсутствие смещений в точках $c_1, c_2, \dots, c_n$, имеют вид

$$\int_0^{x_0} M_{1c_i} M_* \sqrt{1 + y'^2} dx = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

Если направления силы и смещения, а также точки a и b совпадают, то, заменяя в (1.2) a на b , домножая каждое из равенств (1.3) на λ_i и суммируя все это, вместо (1.2) получим

$$\Pi = \frac{1}{EJ} \int_0^{x_0} M_*^2 \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1.4)$$

Для замыкания постановки оптимизационной задачи необходимо задать краевые условия – координаты концов стержня – и условие фиксированной длины ОЭ

$$y(0) = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad \int_0^{x_0} \sqrt{1 + y'^2} dx = l \quad (1.5)$$

2. Максимизация податливости по угловому смещению для незамкнутого ОЭ. Рассмотрим вначале простейший модельный случай. Введем систему координат и обозначения, как указано на фиг. 1, причем под u будем понимать угловое смещение незамкнутого ОЭ (угол, на который повернется касательная к ОЭ), например, в точке O при действии на ОЭ в этой точке вдоль оси x сосредоточенной силы P (рассмотрение действия равномерно распределенного нормального давления q (фиг. 2) аналогично проводимому в настоящем разделе).

Воспользуемся выражением для Π в виде (1.2). В данном случае $a = b$, $M_{1a} = 1$, $M_* = M_{1b} = y(x)$, что дает оптимизационную задачу в форме

$$E\Pi = \int_0^{x_0} y(x) \sqrt{1 + y'^2} dx \rightarrow \max \quad (2.1)$$

при условиях (1.5).

Задача (2.1), (1.5) – изопериметрическая задача вариационного исчисления, математически с точностью до несущественной замены $\max \leftrightarrow \min$ эквивалентная классической задаче Бернулли о форме тяжелой нити (цепи, каната) в поле тяжести с решением в виде цепной линии ([10, с. 390]).

По теореме взаимности перемещений ([8], с. 159, [9], с. 214) полученное решение является также решением задачи об оптимизации податливости по линейному смещению вдоль оси Ox под действием момента M_0 , приложенного к ОЭ в точке O .

3. Максимизация податливости незамкнутого ОЭ по линейному смещению. Сосредоточенная сила. Постановка этого раздела соответствует фиг. 1, где под u понимается линейное смещение ОЭ в точке O по направлению силы $Q = P$. При этом в (1.2) $M_* = M_{1b}$, $a = b$, и оптимизируемый функционал принимает вид

$$E\Pi = \int_0^{x_0} y^2(x) \sqrt{1 + y'^2} dx \rightarrow \max \quad (3.1)$$

при условиях (1.5).

Вводя множитель Лагранжа μ и исследуя на безусловный экстремум функционал

$$\int_0^{x_0} (y^2 + \mu) \sqrt{1 + y'^2} dx \rightarrow \max \quad (3.2)$$

получим уравнение Эйлера

$$\frac{y''}{1 + y'^2} = \frac{2y}{y^2 + \mu} \quad (3.3)$$

Для уяснения некоторых общих особенностей решения рассмотрим вначале предельный случай формы, мало отклоняющейся от оси x , формально: $y^2(x) \ll |\mu|$ и $y'^2 \ll 1$. При этом уравнение (3.3) и последнее из условий (1.5) вырождаются в

$$y'' = \frac{2y}{\mu}, \quad \int_0^{x_0} y'^2 dx = 2(l - x_0) \quad (3.4)$$

Решая уравнение (3.4) с учетом первых двух условий (1.5) и пользуясь затем соотношением (3.1), получим для формы и податливости

$$y(x) = A \sin\left(\omega \frac{x}{x_0}\right), \quad \Pi = \frac{A^2 x_0}{2EJ} \left(1 - \frac{\sin 2\omega}{2\omega}\right) \quad (3.5)$$

Постоянные интегрирования (частота ω и амплитуда A) определяются формулами

$$\frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} = \frac{y_0^2}{4x_0(l - x_0)} \left[1 + \frac{\sin 2\omega}{2\omega}\right], \quad A = \pm \frac{2}{\omega} [x_0(l - x_0)]^{1/2} \left(1 + \frac{\sin 2\omega}{2\omega}\right)^{-1/2} \quad (3.6)$$

Если безразмерный параметр $\varepsilon = y_0 / (2\sqrt{x_0(l-x_0)}) \ll 1$ (что несколько усиливает исходные допущения), то из второго соотношения (3.6) получим, что для не слишком больших корней ω_m таких, что $\omega_m \varepsilon \ll 1$, будет $|\sin \omega_m| \ll 1$. Отсюда $\omega_m = \pi m + \omega \approx \pi m$, где $|\omega| \ll 1$, $m = 1, 2, \dots \ll 1/(\pi\varepsilon)$, что соответствует решению $y_m(x)$ с приблизительно m полуволнами (решения с $m = 0$ при $\varepsilon \ll 1$ невозможны, так как тогда было бы $|\omega_m| = |\omega| \ll 1$ и отношение $\sin \omega_m / \omega_m$ было бы порядка единицы, а не порядка $\varepsilon \ll 1$; решения же с $m < 0$ можно отбросить, так как ввиду $\omega_m \approx \pi m$ они лишь меняют знак $y_m(x)$ в (3.5), что и так уже учитывается знаками $\pm$ во втором соотношении (3.6) для A). Для амплитуды, пренебрегая во втором соотношении (3.6) слагаемым $\sin 2\omega / (2\omega)$, получим $A_m = \pm 2[x_0(l-x_0)]^{1/2}(\pi m)$. Выражения для оптимальной формы и податливости при этом выписываются явно

$$y_m(x) = \pm \frac{\sqrt{2x_0(l-x_0)}}{\pi m} \sin \pi m \frac{x}{x_0}, \quad \Pi_m = \frac{2x_0^2(l-x_0)}{\pi^2 m^2 EJ}$$

Ввиду наличия целочисленного параметра m решение задачи, вообще говоря, многозначно, при этом каждому допустимому m отвечает решение с m полуволнами.

Равенство $y_0 = 0$ влечет $\varepsilon = 0$, и полученные явные формулы для ω_m , A_m , $y_m(x)$ и Π_m становятся по (3.6), (3.5) в рамках исходных допущений точными, а количество решений – счетным ($m = 1, 2, \dots$).

Возвращаясь к уравнению Эйлера (3.3) в общем случае немалых $y(x)$, находим его первый интеграл в виде

$$p = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\left(\frac{y^2 + \mu}{c}\right)^2 - 1} \quad (3.7)$$

где для определенности принято, что постоянная интегрирования $c > 0$.

Применение условия Лежандра (проверка знака второй производной по y) к (3.2) показывает, что характер экстремума определяется знаком $y^2 + \mu$. Из (3.7) следует, что $y^2 + \mu$ на отрезке $x \in [0, x_0]$ не обращается в нуль, т.е. сохраняет постоянный знак. Если $y^2 + \mu > 0$, решение при условии $y(0) = 0$ реализует минимум функционала (3.2); при этом оно монотонно и определяется однозначно [2]. Случаю максимума отвечает $y^2 + \mu < 0$, что принципиально меняет ситуацию.

Разделяя переменные x и y , перепишем соотношение (3.7) в виде

$$\frac{dy}{\sqrt{(-y^2 - \mu - c)(-y^2 - \mu + c)}} = \pm \frac{dx}{c} \quad (3.8)$$

Поскольку $y^2 + \mu < 0$, то $\mu < 0$. Из (3.8) следует, что $-\mu - c > 0$, $|y| \leq \sqrt{-\mu - c}$. Поэтому от y, μ, c можно перейти к Θ, k, ω

$$y = \sqrt{-\mu - c} \sin \Theta, \quad \Theta(0) = 0, \quad k = \sqrt{\frac{-\mu - c}{-\mu + c}}, \quad 0 < k < 1, \quad \omega = \frac{x}{c} \sqrt{-\mu + c} \quad (3.9)$$

Условие $\Theta(0) = 0$ принимаем с учетом первого из условий (1.5) и считаем $x_0 > 0$ (случай $x_0 = 0$ – вырожденный и после выяснения общей картины поведения решений, естественно, получается как предел при $x_0 \rightarrow 0$).

Переходя в уравнении (3.8) к переменным Θ, k, ω и интегрируя его при условии $\Theta(0) = 0$, получим $\Theta = \pm \text{am}(\omega x / x_0, k)$, где $\text{am}(u, k)$ – эллиптическая функция Якоби, а знаки "плюс" и "минус" соответствуют двум разным решениям.

Возвращаясь по (3.9) от Θ к y , имеем

$$y(x) = \pm \frac{2kx_0}{\omega(1-k^2)} \operatorname{sn}\left(\omega \frac{x}{x_0}, k\right) = \pm \sqrt{-\mu - c} \operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{-\mu - c}}{c} x, \sqrt{\frac{-\mu - c}{-\mu + c}}\right) \quad (3.10)$$

$$\operatorname{sn}(u, k) \equiv \sin(\operatorname{am}(u, k)), \quad u = \int_0^{\operatorname{am} u} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}.$$

Таким образом, решение представляет собой функцию наподобие синусоиды с амплитудой, зависящей от частоты.

Подставляя выражение (3.10) в (3.1) и пользуясь некоторыми свойствами эллиптических функций Якоби ([11], с. 791, 792, 47–51), после ряда преобразований получим выражение для податливости в виде

$$\Pi = \frac{8x_0^3}{3EJ} \frac{1}{\omega^3} \frac{k^2}{(1-k^2)^3} \left\{ \frac{1-k^2}{2k^2} \left[\frac{(1+k^2)(1+\bar{l})}{2} - 1 \right] \omega - \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega \right\}, \quad \bar{l} = \frac{l}{x_0} \quad (3.11)$$

Для определения постоянных k , ω из второго условия (1.5) получим

$$\operatorname{am}(\omega, k) = (-1)^m \arcsin \frac{\pm y_0 \omega (1-k^2)}{2kx_0} + \pi m \quad (3.12)$$

где m – целое число, равное округленному числу полувольт, укладывающихся в отрезке $[0, x_0]$. Из соотношений $c > 0$, $-\mu > 0$, $x_0 > 0$ по (3.9) следует $\omega > 0$, $\operatorname{am}(\omega, k) > 0$, и из (3.12) получаем, что $m \geq 0$, причем если $\pm y_0 \leq 0$, то $m \geq 1$. Переходя от равенства (3.12) к соотношению $F(f_1, k) = F(f_2, k)$, где f_1, f_2 – соответственно правая и левая части (3.12), а $F(\omega, k)$ – нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода ([12], с. 753), и учитывая, что $F[\operatorname{am}(\omega, k), k] = \omega$, получим

$$\pm (-1)^m F\left(\arcsin \frac{y_0 \omega (1-k^2)}{2kx_0}, k\right) + 2mK(k) = \omega \quad (3.13)$$

где $K(k)$ – полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода ([12, с. 757 и далее]).

Далее из последнего условия (1.5) при учете соотношений (3.7), (3.10) и свойств эллиптических функций Якоби после некоторых преобразований получим

$$E(\operatorname{am}(\omega, k), k) = \frac{(l+x_0)\omega(1-k^2)}{2x_0} = \omega \frac{1-k^2}{2} (1+\bar{l})$$

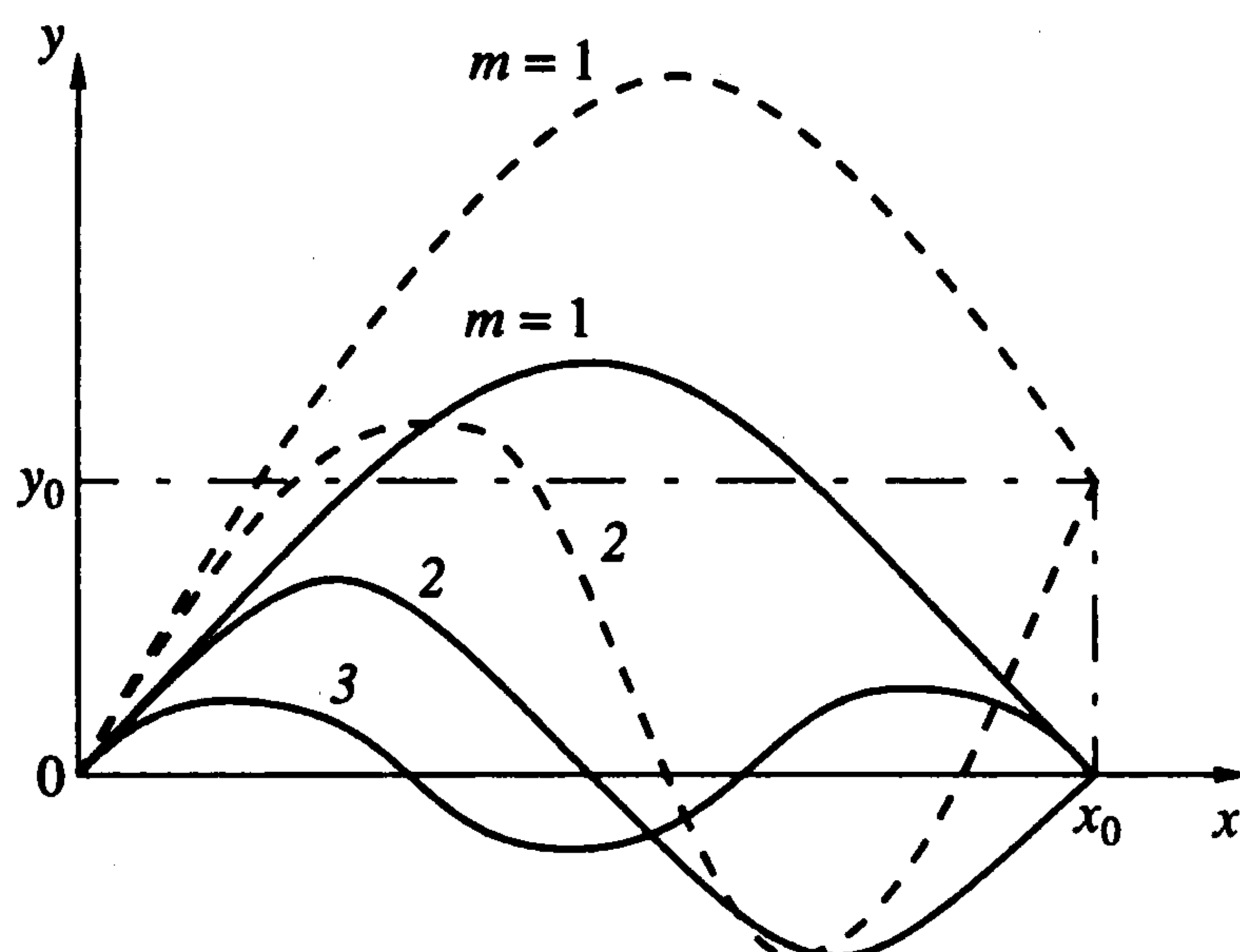
где $E(\varphi, k)$ – нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода ([12, с. 753]).

Подставляя в последнее соотношение (3.12), приходим к

$$\pm (-1)^m E\left(\arcsin \frac{y_0 \omega (1-k^2)}{2kx_0}, k\right) + 2mE(k) = \frac{(l+x_0)\omega(1-k^2)}{2x_0} \quad (3.14)$$

где $E(k) = E(\pi/2, k)$ – полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода ([12], с. 757 и далее).

Соотношения (3.13) и (3.14) дают два уравнения для определения двух неизвестных постоянных интегрирования k , ω . Ввиду наличия в (3.13), (3.14) неопределенного целочисленного параметра m решение задачи максимизации (3.2) при условиях (1.5), вообще говоря, многозначно (несколько экстремалей и соответствующих им локальных максимумов). Для нахождения глобального максимума надо найти податливость по



Фиг. 3

каждому из локальных максимумов (т.е. для каждого допустимого m) и выбрать наибольшую из них.

При $y_0 = 0$ соотношения (3.13), (3.14) переходят в

$$\omega = 2mK(k) \quad (3.15)$$

$$E(k) / K(k) = (1 - k^2)(1 + l/x_0)/2 \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) имеет однозначное решение $k(l/x_0)$ ([12, с. 757 и далее]), по которому соотношение (3.15) определяет счетное множество частот ω_m для всех $m = 1, 2, \dots$

Подставляя выражение (3.15) в соотношения (3.10) и (3.11) и учитывая, что при этом $\operatorname{sn} \omega = \operatorname{sn}(2mK(k)) = 0$, получим для решения и податливости соответственно

$$y_m(x) = \pm \frac{kx_0}{m(1 - k^2)K(k)} \operatorname{sn} \left[2mK(k) \frac{x}{x_0}, k \right], \quad x \in [0, x_0] \quad (3.17)$$

$$\Pi_m = \frac{x_0^3}{3EJm^2} \frac{1}{(1 - k^2)^2 K(k)^2} \left[\frac{(1 + k^2)(1 + \bar{l})}{2} - 1 \right] = \frac{\Pi_1}{m^2}$$

Глобальный максимум податливости соответствует $m = 1$.

Полученные при $y_0 = 0$ решения (для знака плюс в (3.17)) приведены на фиг. 3 сплошными линиями. При $m = 1$ решение состоит из одной полуволны, на всем отрезке $x \in [0, x_0]$ является выпуклым (для знака плюс) и внутри него не обращается в нуль. При $y_0 \neq 0$, $m \geq 1$ (3.17) является приближенным решением, если не учитывать некоторую окрестность конца (x_0, y_0) .

Если $y_0 = 0$, то величина m в точности равна числу полуволн, но если $y_0 \neq 0$, то m — результат округления этого числа: в отрезке укладывается несколько меньше, либо больше, чем m полуволн, разница не превосходит четверть волны (фиг. 3, штриховые линии).

Исследование соотношений (3.10), (3.13), (3.14) при учете соотношений (3.9) и знаков параметров приводит к общей картине поведения решений, которую можно представить наглядно, если задать x_0 , $l > x_0$, "освободить" y_0 и проследить эволюцию решения в зависимости от ω . Значение $\omega = 0$ отвечает решению, представляющему собой отрезок, соединяющий начало координат и точку $(x_0, \pm(l^2 - x_0^2)^{1/2})$. С ростом ω этот отрезок начинает изгибаться, сохраняя свою длину l и скользя правым концом по вертикали $x = x_0$. Когда величина ω достигает значения $2K(k)$, где k — корень уравнения (3.16), впервые удовлетворяется уравнение (3.15), что отвечает случаю, когда на

отрезке $[0, x_0]$ помещается ровно одна полуволна решения. Дальнейший рост ω при фиксированной длине l ведет к образованию все большего количества складок-полуволин и сопровождается уменьшением амплитуды решения и затухающими колебаниями его правого конца вокруг точки $(x_0, y_0 = 0)$ по закону

$$y_0 = \pm 2kx_0 \operatorname{sn}(\omega, k) / [\omega(1 - k^2)]$$

При этом всякий раз, когда ω переходит через $2mK(k)$, величина y_0 проходит через нуль (определяемый нулями функции $\operatorname{sn}(\omega, k)$), а форма ОЭ в своем изменении минует конфигурацию с целым числом m полуволин.

В общем случае при заданном $y_0 \neq 0$ для m можно получить оценки: двустороннюю (см. работы, цитированные в сноске)

$$[1 - \operatorname{sign}(\pm y_0)]/2 \leq m \leq [(1 + x_0)/|y_0| + 1]/2$$

и более точную оценку сверху

$$m \leq (l^2 - x_0^2)^{1/2} (2|y_0| + 1)$$

Впрочем, чем больше m , тем меньше искомая податливость. Из сказанного следует, что глобальный максимум, т.е. решение задачи (1.1), реализуется при $m = 0$ или $m = 1$.

Интересно сравнить податливость $\Pi_1(\bar{l})$ оптимальной формы (для простоты при $y_0 = 0$) с податливостью модельных форм вида Λ , Π с теми же l и x_0 . Выражения для Π_Λ , Π_Π и асимптотики для Π_1 при $\bar{l} \rightarrow 1$, $\bar{l} \rightarrow \infty$ имеют вид соответственно

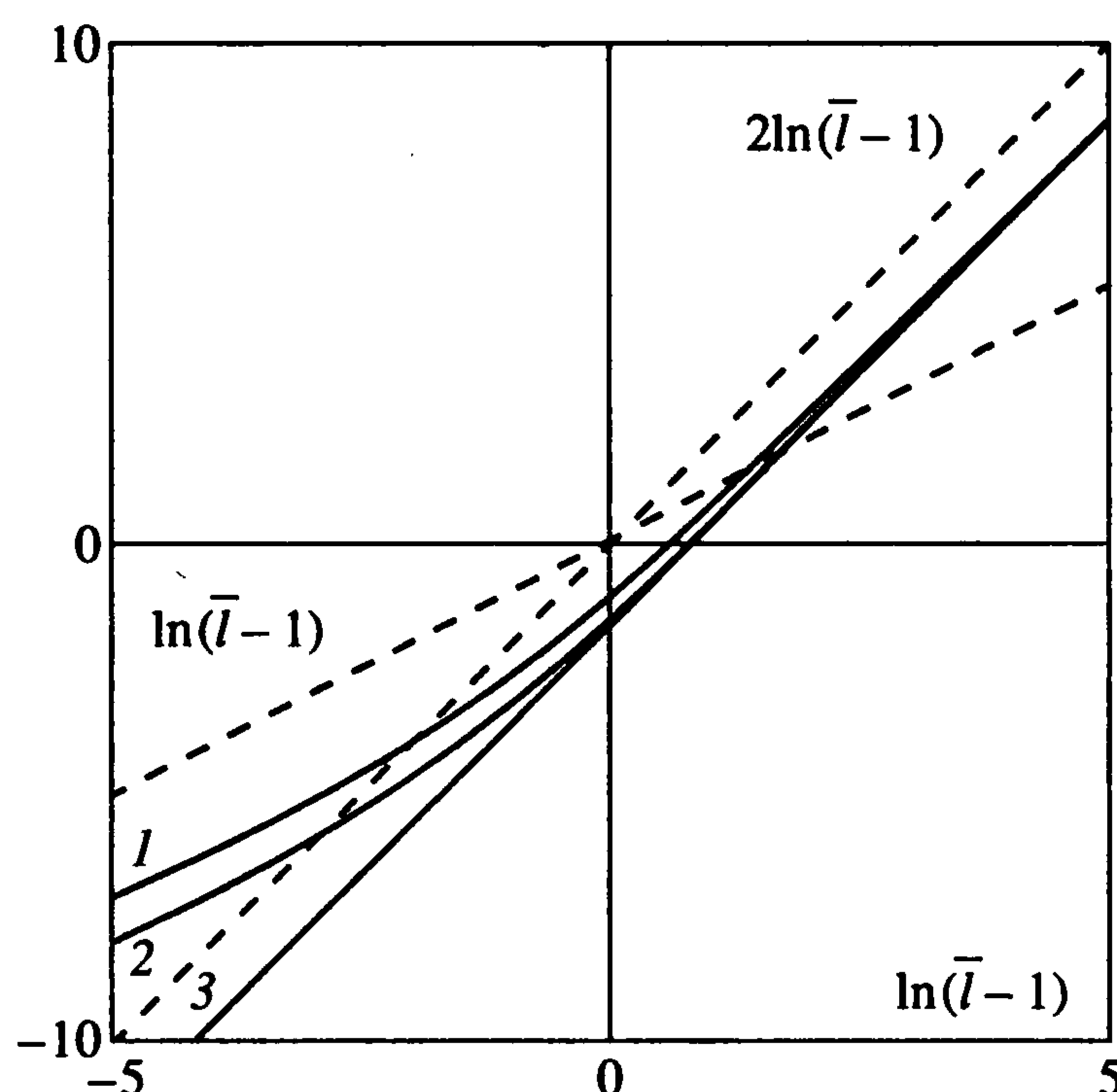
$$\Pi_\Lambda = \frac{x_0^3 \bar{l}(\bar{l}^2 - 1)}{12EJ}, \quad \Pi_\Pi = \frac{x_0^3 (\bar{l} - 1)^2 (\bar{l} + 2)}{12EJ}, \quad \Pi_1 \underset{\bar{l} \rightarrow 1}{\approx} \frac{2x_0^3 (\bar{l} - 1)}{\pi^2 EJ}, \quad \Pi_1 \underset{\bar{l} \rightarrow \infty}{\approx} \frac{x_0^3 \bar{l}^3}{12EJ}$$

откуда

$$\lim_{\bar{l} \rightarrow 1} \frac{\Pi_1}{\Pi_\Lambda} = \frac{12}{\pi^2}, \quad \lim_{\bar{l} \rightarrow 1} \frac{\Pi_1}{\Pi_\Pi} = \infty, \quad \lim_{\bar{l} \rightarrow \infty} \frac{\Pi_1}{\Pi_\Lambda} = \lim_{\bar{l} \rightarrow \infty} \frac{\Pi_1}{\Pi_\Pi} = 1$$

Таким образом, в отличие от случая $\bar{l} \rightarrow 1$ ($l \rightarrow x_0$) при $\bar{l} \rightarrow \infty$ податливости Π_1 , Π_Λ , Π_Π эквивалентны между собой и пропорциональны $\bar{l}^3$ (см. фиг. 4, где линии 1, 2, 3 соответствуют $\ln(E/\Pi_1)$, $\ln(E/\Pi_\Lambda)$, $\ln(E/\Pi_\Pi)$).

4. Распределенная нагрузка. Рассмотрим ту же задачу для случая равномерного распределения нагрузки (фиг. 2), так что в (1.1) будет $Q = q$. В соответствии со



Фиг. 4

сказанным в разд. 1 считаем, что контактная часть ОЭ представляет собой дугу окружности заданного радиуса R и углового размера φ_0 и определению подлежит лишь неконтактная часть ОЭ $y(x)$, $x \in [x_{ok}, x_0]$, где $x_{ok} = R[1 - \cos(\varphi_0/2)]$ – абсцисса границы области контакта.

По симметрии суммарная сила, действующая на ОЭ со стороны капсулы, направлена по оси Ox , а суммарный момент, взятый относительно любой точки на этой оси, равен нулю. Поэтому удобнее оптимизировать податливость Π по смещению u в середине области контакта в направлении соответствующего радиуса.

Подстановка соответствующих выражений для M_{1a} и M_{1b} в соотношения (1.2), (1.5) приводит к задаче оптимизации

$$E\Pi = E\Pi_{ok} + 2R \sin \frac{\varphi_0}{2} \int_{x_{ok}}^{x_0} y^2 \sqrt{1 + y'^2} dx \rightarrow \max$$

$$y(x_{ok}) = y_{ok} = R \sin(\varphi_0/2), \quad y(x_0) = y_0, \quad \int_{x_{ok}}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2} dx = l - R\varphi_0$$

где податливость контактной части ОЭ Π_{ok} – известная функция от R , φ_0 .

Решая эту задачу аналогично изложенному в разд. 3, получим для неконтактной части ОЭ

$$y(x) = \pm \frac{2kx_0}{\omega(1-k^2)} \operatorname{sn} \left(\omega \frac{x-x^*}{x_0}, k \right), \quad x \in [x_{ok}, x_0]$$

$$x^* = x_{ok} + \frac{x_0}{\omega} \left\{ \mathbf{K}(k) - \left\{ \pm \left[F \left(\arcsin \frac{y_{ok}\omega(1-k^2)}{2kx_0}, k \right) + \mathbf{K}(k) \right] \right\} \right\}$$

Условия для постоянных интегрирования k , ω и формулу для податливости, опять содержащие целочисленный параметр m , не приводим ввиду их громоздкости (см. работы, цитированные в сноске). При $y_0 = y_{ok}$ (линия, соединяющая концы неконтактной части ОЭ, параллельна оси Ox) для четных m либо при $y_0 = -y_{ok}$ для нечетных m выкладки несколько упрощаются и дают для постоянных k , ω систему уравнений

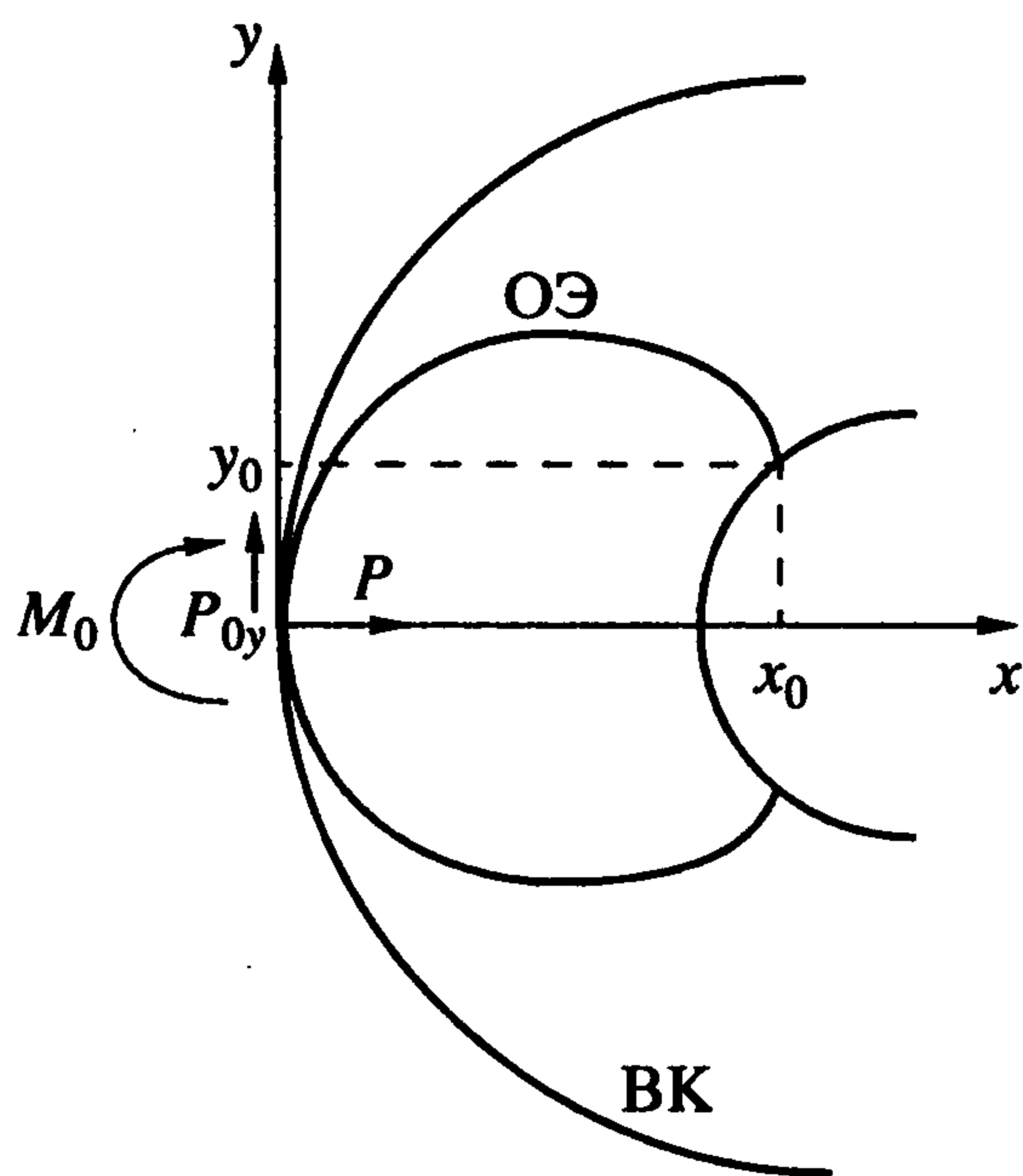
$$\omega = 2m \frac{x_0}{x_0 - x_{ok}} \mathbf{K}(k), \quad \frac{E(k)}{\mathbf{K}(k)} = \frac{1-k^2}{2} \left[1 + \frac{l - R\varphi_0}{x_0 - x_{ok}} \right]$$

В этом случае на отрезке $x \in [x_{ok}, x_0]$ укладывается целое четное (либо нечетное) количество полуволен для соответствующей части решений и аналогично результатам разд. 3 при $y_0 = 0$, будет $\omega_m = m\omega_1$, $k_m = k_1$. Однако здесь номер m ограничен неравенством

$$|y_{0m}| = |y_0| \leq |y_{\max}| = 2kx_0 / [m\omega_1(1-k^2)]$$

Причина в том, что и тут решение колеблется по-прежнему относительно оси x , а не относительно прямой $y_0 = y_{ok}$. Поскольку с ростом m амплитуда решения уменьшается и решение все плотнее прижимается к оси x , то, начиная с некоторого m , оказывается невозможным удовлетворить условиям на краях с наперед заданными конечными $y_{ok} = |y_0|$. Искомая податливость вычисляется по формуле $\Pi_m = \Pi_{ok} + \Pi_{nk}/m^2$, где Π_{nk} – податливость неконтактной части ОЭ.

Отметим, что решение задачи о максимизации податливости в явном виде удастся получить, вообще говоря, только для направления смещения, совпадающего с направлением суммарной внешней силы, действующей на ОЭ. В противном случае соот-



Фиг. 5

ветствующее уравнение Эйлера проинтегрировать в явном виде не удастся (это возможно лишь в пределе, когда длина ОЭ близка к длине отрезка, соединяющего его концы).

5. Максимизация податливости симметричного замкнутого ОЭ (фиг. 5). Для удобства силу, приложенную к ОЭ, обозначим через $2P$, тогда $\Pi = u/(2P)$.

Выбирая в качестве основной системы верхнюю половину ОЭ (на нее приходится половина величины приложенной силы, т.е. сила P), заменяя нижнюю половину двумя реакциями – силой P_{0y} и моментом M_0 , пропорциональными силе P с неизвестными коэффициентами λ_1 и λ_2 : $P_{0y} = \lambda_1 P$, $M_0 = \lambda_2 P$ (по симметрии соответствующая компонента P_{0x} вдоль оси Ox отсутствует) и пользуясь

формулой (1.4), получим задачу оптимизации функционала

$$2E\Pi = \int_0^{x_0} (y - \lambda_1 x - \lambda_2)^2 \sqrt{1 + y'^2} dx \rightarrow \max \quad (5.1)$$

при условиях (1.5), а также условиях отсутствия смещения по оси Oy и поворота

$$\int_0^{x_0} x(y - \lambda_1 x - \lambda_2) \sqrt{1 + y'^2} dx = 0, \quad \int_0^{x_0} (y - \lambda_1 x - \lambda_2) \sqrt{1 + y'^2} dx = 0 \quad (5.2)$$

Вводя в функционал (5.1) с помощью множителей Лагранжа условия (5.2), можно убедиться, что из требования обращения в нуль производных искомой экстремали по λ_1 , λ_2 следует равенство этих множителей Лагранжа нулю. Поэтому, вводя прежний множитель μ , соответствующий третьему из условий (1.5), получим задачу поиска безусловного экстремума функционала

$$\int_0^{x_0} \{(y - \lambda_1 x - \lambda_2)^2 + \mu\} \sqrt{1 + y'^2} dx \rightarrow \max$$

при условиях (1.5), (5.2).

Замена переменных посредством ортогонального преобразования

$$x_1 = \frac{x + \lambda_1 y}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}, \quad y_1 = \frac{y - \lambda_1 x - \lambda_2}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \quad ((0,0) \rightarrow (x_{1c}, y_{1c}), x_{1c} = 0)$$

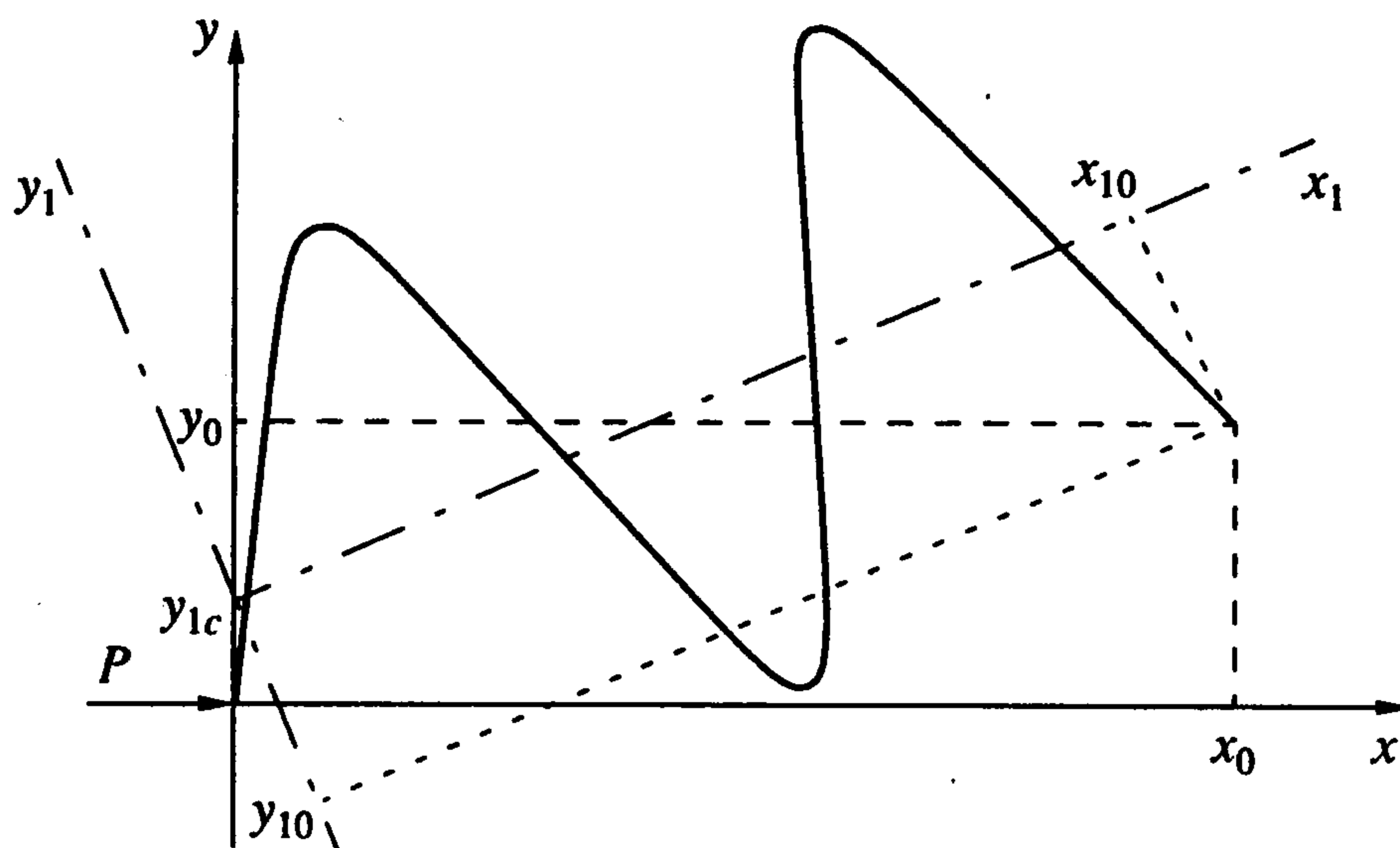
позволяет привести максимизируемый интеграл к виду, аналогичному (3.2), и получить решение соответствующей оптимизационной задачи в виде (фиг. 6)

$$y_1(x_1) = \pm \frac{2k(x_{10} - x_{1c})}{\omega(1 - k^2)} \operatorname{sn} \left(\omega \frac{x_1 - x_{1c}^*}{x_{10} - x_{1c}}, k \right), \quad x_1 \in [x_{1c}, x_{10}]$$

$$x_{1c}^* = x_{1c} + \frac{x_{10} - x_{1c}}{\omega} \left\{ \mathbf{K}(k) \mp \left[F \left(\arcsin \frac{y_{1c} \omega (1 - k^2)}{2k(x_{10} - x_{1c})}, k \right) + \mathbf{K}(k) \right] \right\}$$

Условия для определения постоянных k , ω , λ_1 , λ_2 , а также формулы для податливости не приводим ввиду их громоздкости (см. работы, цитированные в сноске). Нижняя часть ОЭ симметрична верхней относительно оси Ox .

Аналогично изложенному полные интегралы уравнения Эйлера могут быть полу-



Фиг. 6

чены при шарнирном креплении концов ОЭ, а также для ряда других модельных конструкций замкнутого ОЭ.

6. О требованиях гладкости и вписываемости искомых форм в заданную область. Попытка прямого использования полученных в работе оптимальных форм в конструкциях искусственного хрусталика встречает ряд проблем. Первая – негладкость этих форм в точке встречи с капсулой естественного хрусталика: приведенные решения дают для ОЭ формы, вообще говоря, либо (разд. 2, 3, 5) упирающиеся в капсулу в точке O (для незамкнутого ОЭ это его свободный конец, для замкнутого – его середина), либо (разд. 4) имеющие излом на границе области контакта ОЭ с капсулой.

По-видимому, для малых $l \sim x_0$ решений в классе гладких в указанном смысле функций, вообще говоря, не существует. Однако в реально используемых моделях искусственного хрусталика для получения достаточной податливости длина ОЭ l должна быть (и действительно выбирается) достаточно большой ($l \sim (x_0 + R)$). Это приводит к необходимости выполнения другого естественного для ОЭ искусственного хрусталика дополнительного условия: требования "вписываемости" искомой формы ОЭ в некоторую область (в предположении малости перемещений – грубо говоря, в кольцевую область между круговой капсулой и круговой же линзой искусственного хрусталика). Вместе с этим открывается несколько неожиданная возможность исправления указанного дефекта негладкости как раз в практически наиболее важном диапазоне больших длин l .

Картина эволюции решения с ростом l качественно будет следующей. При малых $l \sim x_0$ соответствующая экстремаль полностью уместается внутри заданной области и решение не выходит на ее внешнюю границу за исключением точки O . С ростом l амплитуда решения возрастает вплоть до момента касания экстремалью окружности капсулы, после чего при дальнейшем росте l из точки касания образуется и начинает расти область налегания, пока при некотором $l \sim (x_0 + R)$ вся "прикапсульная" часть решения не ляжет на капсулу. С этого момента исчезают и все изломы и "негладкости" решения.

Можно трактовать получение подобного гладкого решения как результат учета требования вписываемости при достаточно больших l , что приводит к задаче на экстремум с ограничениями на искомые формы в виде неравенств. Как известно ([12], с. 352, 353), при решении таких задач в классе гладких функций экстремум может достигаться лишь на кривых, состоящих из дуг экстремалей (удовлетворяющих уравнению Эйлера) и частей границы допустимой области ("капсула плюс поверхность линзы искусственного хрусталика"). При этом в точках перехода экстремалей на границу они имеют общую касательную и положение этих точек определяется из условий гладкости.

Но можно смотреть на получение такого решения как на результат исправления дефектов негладкости исходного решения, для чего в исходную постановку надо ввести дополнительное условие: требование касания стержня (ОЭ) с капсулой в точках их встречи. Однако простое добавление такого условия приведет к тому, что задача, вообще говоря, не будет иметь решения как краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Эйлера) с тремя краевыми условиями (первые два условия фиксируют положение концов стержня). Для получения корректной постановки нужно одновременно с введением дополнительного условия ввести и дополнительный свободный параметр, значение которого определится автоматически в ходе решения задачи. В качестве такого параметра можно взять, например, длину ОЭ l . "Освободив" длину l и увеличивая ее, получим ровно ту же картину эволюции решения, что и выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дашевский И.Н., Шкловер В.Э. Интракапсулярный искусственный хрусталик и обратная задача теории гибких стержней. // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 158–165.
2. Баничук Н.В. Определение оптимальных форм упругих криволинейных стержней // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 6. С. 124–133.
3. Некоторые вопросы механики интракапсулярного искусственного хрусталика / И.М. Ананьевский, Р.В. Гольдштейн, И.Н. Дашевский и др. // Медицинская биомеханика. Т. 1. Тез. докл. Междунар. конф. "Достижения биомеханики в медицине". Рига, 1986, Рига: М-во здравоохранения ЛатвССР, 1986. С. 28–33.
4. Моделирование биомеханического поведения капсулы хрусталика глаза при имплантации интраокулярных линз / Ю.А. Саакян, А.К. Цатурян, П.А. Семенов и др. // Медицинская биомеханика. Т. 1. Тез. докл. Междунар. конф. "Достижения биомеханики в медицине". Рига, 1986, Рига: М-во здравоохранения ЛатвССР, 1986. С. 337–341.
5. Ананьевский И.М., Черноусько Ф.Л. Исследование механики опорных элементов искусственного хрусталика // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 175–180.
6. Timoshenko S.P., Gere J.M. Mechanics of Materials. N.Y.: Van Nostrand Reinhold Company, 1972. = Тимошенко С.П., Gere Дж. Механика материалов. М.: Мир, 1976. 669 с.
7. Ржаницын А.Р. Строительная механика. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.
8. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
9. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.
10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 424 с.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
12. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1968. = Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.