

УДК 539.3

© 2000 г. А.С. Братусь, В.П. Посвянский

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ИЗГИБАЕМОЙ БАЛКИ

Рассматривается задача о минимизации статического изгиба упругой балки переменного сечения и фиксированного объема в случае свободно-опертых и жестко закрепленных концов. В первом случае доказано, что полученные ранее на основании необходимых условий экстремума решения, удовлетворяют достаточным условиям. В наиболее интересном с точки зрения приложений случае закрепленных концов доказано, что оптимальные решения должны обязательно иметь точки внутри интервала решения, в которых распределение толщин балки вырождается в нуль ("внутренние шарниры"). Проведен качественный, аналитический и численный анализ этого явления. В частности, в случае закрепленных концов для одного класса сосредоточенных нагрузок найдены аналитические решения, при которых балка распадается на две консоли.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о статическом изгибе упругой балки переменного сечения:

$$Au(x) = (EI(x)u''(x))'' = g(x), \quad x \in (-l, l), \quad l > 0$$

Здесь $u(x)$ – прогиб, $I(x)$ – момент инерции, E – модуль Юнга, $g(x)$ – распределение величин поперечной силы, приложенной к балке. Изучаются два случая закрепления концов: свободное опирание и жесткое закрепление. Не умаляя общности, можно полагать, что $l = 1$ и

$$EI(x) = h^p(x)$$

где h – площадь поперечного сечения, а p – вещественный параметр, принимающий значения 1, 2 или 3 [1, 2]. Отметим, что с более общих позиций правомерно изучение этой задачи и при любых других вещественных значениях $p \neq 0$.

В итоге приходим к краевым задачам (1.1), (1.2) или (1.1), (1.3):

$$A(h)u(x) = (h^p(x)u''(x))'' = f(x) \tag{1.1}$$

$$u(1) = u(-1) = 0, \quad (h^p(x)u'')_{x=1} = (h^p(x)u'')_{x=-1} = 0 \tag{1.2}$$

$$u(1) = u(-1) = 0, \quad u'(1) = u'(-1) = 0 \tag{1.3}$$

Через Q обозначим множество ограниченных измеримых функций $h(x)$, удовлетворяющих условиям

$$h(x) \geq 0, \quad \int_{-1}^1 h(x)dx = 1, \quad \int_{-1}^1 h^{-p}(x)dx < +\infty \tag{1.4}$$

Известно [3], что последнее условие является достаточным для положительной определенности оператора $A(h)$.

На концах отрезка порядок вырождения может не превосходить единицы [3]. Из этого условия следует, что при $p > 0$ порядок вырождения функций в нуль внутри

отрезка должен не превосходить величины $1/p$, т.е., если при некотором x_0 выполняется равенство $h(x_0) = 0$, то

$$|h(x)| \leq K |x - x_0|^\gamma, \quad K = \text{const}, \quad \text{при } x \rightarrow x_0; \quad \gamma < 1/p$$

Для любой функции $h \in Q$ и $p \in \mathbb{R}$ рассмотрим пространство $W_{h,p}^2$ функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$, с нормой

$$\|u\|_{W_{h,p}^2} = \left(\int_{-1}^1 (u''(x))^2 h^p(x) dx \right)^{1/2}$$

При сделанных предположениях оператор $A(h)$ будет положительно определен на любых функциях $h(x) \in Q$ [3], причем имеет место вложение пространства $W_{h,p}^2$ в пространство непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$, т.е. существует такая постоянная $\delta > 0$, что [4]

$$\|u\|_{W_{h,p}^2} \geq \delta \max_{x \in [-1,1]} |u(x)|, \quad \forall u \in W_{h,p}^2$$

Через W' обозначим пространство двойственное к пространству $W_{h,p}^2$. Далее полагаем, что $f \in W'$. Это, в частности, означает, что функция $f(x)$ может быть дельта-функцией Дирака (сосредоточенная сила).

Решение каждой из краевых задач (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3) понимается в слабом смысле: т.е. $u(x)$ – решение, если для любой функции $w \in W_{h,p}^2$ выполняется следующее интегральное тождество:

$$(A(h)u, w) = (f, w)$$

Здесь и далее $(\cdot)$ – скалярное произведение в пространстве L_2 .

Рассмотрим функционал $\Phi(h): Q \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$\Phi(h) = (A(h)u, u) = (f, u) \tag{1.5}$$

где $u(x)$ – решение задач (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3). Функционал $\Phi(h)$ выражает потенциальную энергию деформации балки под действием распределенной нагрузки $f(x)$. Используя краевые условия (1.2) или (1.3), можно показать, что

$$\|u\|_{W_{h,p}^2}^2 = \Phi(h)$$

С другой стороны, из неравенства вложения следует, что при любых p и $h \in Q$ абсолютная величина прогиба балки ограничена сверху значением $\delta^{-1}\Phi(h)$.

Если же $f(x)$ – дельта-функция (сосредоточенная сила), то функционал $\Phi(h)$ в точности равен прогибу балки в точке ее приложения. Следовательно, функционал (1.5) можно рассматривать как достаточно адекватную меру прогиба балки.

Естественно рассмотреть следующую экстремальную задачу. Для заданного значения параметра p и заданного распределения поперечных сил $f(x)$ найти функцию $h(x) \in Q$, такую, чтобы функционал (1.5) достигал своего минимального значения. Иначе говоря, ищется такое значение распределения площадей поперечных сечений балки заданного объема, при котором мера прогиба балки (в указанном выше смысле) под действием заданной поперечной нагрузки, была бы минимальна.

Ранее на основании необходимых условий экстремума были получены решения этой задачи [5–7] при $p = 1, 2, 3$ и различных видах краевых условий. Цель настоящей работы – исследовать выполнение необходимых условий экстремума второго порядка (близких к достаточным) на найденных ранее решениях.

2. Вспомогательная задача на собственное значение. Для дальнейшего оказывается полезным привлечь к изучению следующую задачу на собственное значение:

$$A(h) u(x) = -\lambda u''(x), \quad x \in (-1, 1) \quad (2.1)$$

с краевыми условиями (1.2) или (1.3).

Полагая $y = h^p(x)u''(x)$, запишем задачу (2.1) в виде

$$y''(x) + \lambda u''(x) = 0$$

Интегрируя это равенство при учете условий (1.2) или (1.3) приходим к уравнению

$$y''(x) + \lambda h^{-p}(x) y(x) = 0 \quad (2.2)$$

с краевыми условиями (2.3) или (2.4)

$$y(-1) = y(1) = 0 \quad (2.3)$$

$$y(1) = y(-1) + 2y'(-1), \quad y'(1) = y'(-1) \quad (2.4)$$

которые соответствуют условиям (1.2) и (1.3).

Если $\lambda \neq 0$, то имеется взаимно однозначное соответствие между решениями задач (2.1), (1.2) или (2.1), (1.3) и решениями задач (2.2), (2.3) или (2.2), (2.4) соответственно. Легко проверяется, что задача (2.2), (2.3) не имеет нулевых собственных значений, что нельзя сказать о задаче (2.2), (2.4), имеющей кратное нулевое собственное значение $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 0$ и две соответствующие собственные функции $y_0^1(x) = c_1$ и $y_0^2(x) = c_2 + c_3x$, где $c_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$).

Известно [3], что системы собственных функций $\{y_i(x)\}$ задачи (2.2), (2.3) или (2.2), (2.4) полны в пространстве функций $L_{h,p}^2$ с нормой

$$\|y\|_{L_{h,p}^2} = \left(\int_{-1}^1 h^{-p}(x) y^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

а соответствующие собственные значения удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

В случае задачи (2.2), (2.3) все собственные значения простые, а в случае задачи (2.2), (2.4) могут возникать двукратные. Собственные функции могут быть выбраны так, чтобы выполнялись следующие условия нормировки:

$$\int_{-1}^1 h^{-p}(x) y_i(x) y_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (2.6)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Для того чтобы эти условия были выполнены и для функций $y_0^1 = c_1$, $y_0^2 = c_2 + c_3x$, отвечающих двукратному нулевому собственному значению (задача (2.2), (2.4)) необходимо выбрать постоянные c_i ($i = 1, 2, 3$) так, чтобы

$$c_1 = m_1^{-1/2}, \quad c_2 = -m_1^{-1/2} m_2 r^{-1}, \quad c_3 = m_1^{1/2} r^{-1}$$

$$m_i = \int_{-1}^1 x^{i-1} h^{-p}(x) dx, \quad i = 1, 2, 3$$

$$r = m_1 m_3 - m_2^2$$

При удовлетворении этим условиям имеют место равенства

$$\int_{-1}^1 y_0^i(x) y_0^j(x) dx = \delta_{ij}, \quad \int_{-1}^1 y_0^i(x) y_k(x) dx = 0$$

$$i, j = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Отметим, что $r \neq 0$, так как $m_2^2 < m_1 m_3$, если $h_{(x)}^{-p} \neq \beta x$, $\beta = \text{const}$.

3. Вариационный анализ задачи. Положим $h_\epsilon(x) = h(x) + \epsilon \delta h(x)$, где $|\epsilon| < \epsilon_0$, ϵ_0 — достаточно малое число, а $h_\epsilon(x)$ и принадлежат множеству Q . Из условий (1.4) следует, что

$$\int_{-1}^1 \delta h(x) dx = 0 \quad (3.1)$$

Кроме того, порядок вырождения функции $\delta h(x)$ в точках $x_0 \in (-1, 1)$ вырождения функции $h(x)$ ($h(x_0) = 0$) не должен превосходить величины $1/p$.

Используем метод возмущения симметричных краевых задач [8]. Функция $u_\epsilon(x)$, являющаяся решением возмущенных краевых задач (1.1), (1.2) или (1.1), (1.3) с $h_\epsilon = h(x) + \epsilon \delta h(x)$, может быть представлена в виде ряда по целым степеням малого параметра

$$u_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon v_1(x) + \epsilon^2 v_2(x) + \epsilon^3 \psi_\epsilon(x) \quad (3.2)$$

где $v_1(x)$ и $v_2(x)$ — некоторые функции из пространства $W_{h,p}^2$, а $\psi_\epsilon(x)$ — ограниченная в этом пространстве функций при $\epsilon \rightarrow 0$. Подставляя выражение (3.2) в уравнение (1.1) и группируя члены при одинаковых степенях ϵ , имеем

$$\begin{aligned} A(h)u(x) &= f(x), \quad A(h)v_1(x) = -A^1(h, \delta h)u(x) \\ A(h)v_2(x) &= -A^1(h, \delta h)v_1(x) - A^2(h, \delta h)u(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$A^i(h, \delta h) = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i}{d\epsilon^i} A(h + \epsilon \delta h) \right) \Big|_{\epsilon=0}, \quad i = 1, 2$$

В силу однородности краевых условий (1.2) и (1.3) функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ также удовлетворяют этим краевым условиям.

Если обе части второго равенства (3.3) умножить скалярно в L_2 на функцию $u(x)$, являющуюся решением первого уравнения (3.3), и использовать симметричность оператора $A(h)$, то получим, что

$$(v_1, f) = (v_1 A(h)u) = (A(h)v_1, u) = -(A^1(h, \delta h)u, u)$$

С другой стороны, из определения функционала $\Phi(h)$ в (1.4) и разложения (3.1) следует, что

$$\Phi(h_\epsilon) = (u, f) + \epsilon(v_1, f) + \epsilon^2(v_2, f) + O(\epsilon^2) \quad (3.4)$$

Так как

$$A^1 u(x) = p(\psi(x), u''(x))'' \quad (3.5)$$

$$\psi(x) = h^{p-1}(x)u''(x)\delta h(x)$$

то выражение для первой вариации функционала $\Phi(h)$ примет вид

$$\delta \Phi(h) = -p(h^{p-1}(u'')^2, \delta h)$$

Оно определяет первую производную по направлению (производную Гато) от функционала $\Phi(h)$. При учете изопериметрического условия (3.1) необходимые условия экстремума запишутся в виде

$$ph^{p-1}(x)(u''(x))^2 = l_0^2, \quad l_0 = \text{const} \quad (3.6)$$

Отметим, что условие (3.6), вообще говоря, не налагает дополнительных ограничений на порядок вырождения функции $h(x)$, поскольку в точках, где $h(x) = 0$

функция $u''(x)$ может иметь полюс соответствующего порядка, который обеспечит выполнение равенства (3.6). При этом величина момента $h^p(x)u''(x)$ в указанной точке обращается в нуль.

Умножая обе части равенства (3.6) скалярно в L_2 на функцию $h(x)$ и учитывая второе равенство в (1.4), получим что $l_0^2 = \Phi(h)$. Умножим обе части скалярно третьего уравнения в (3.3) на функцию $u(x)$. Из соотношения (3.4) следует, что

$$(A(h)v_2, u) = (v_2, A(h)u) = (v_2, f)$$

Поэтому

$$\delta^2\Phi(h) = (v_2, f) = -(A^1(h, \delta h)v_1, u) - (A^2(h, \delta h)u, u)$$

С другой стороны из первого уравнения (3.3) имеем

$$(A(h)v_1, v_1) = -(A^1(h, \delta h)u, v_1) = -(u, A^1(h, \delta h)v_1)$$

Окончательно получим два равенства, каждое из которых определяет вторую производную Гато от функционала $\Phi(h)$:

$$\delta^2\Phi(h) = \chi^p(h, u, \delta h) - p(h^{p-1}u''v_1''\delta h) \quad (3.7)$$

$$\delta^2\Phi(h) = \chi^p(h, u, \delta h) + (h^p v_1'', v_1'') \quad (3.8)$$

где

$$\chi^p(h, u, \delta h) = -p(p-1)(h^{p-2}(u'')^2, \delta h^2)/2$$

При сделанных выше предположениях относительно порядка вырождения функций $h(x) \in Q$ формулы (3.7) и (3.8) имеют смысл для любых допустимых функций $\delta h(x)$.

Следует отметить, что в отличие от классических задач вариационного исчисления в этом случае первая и вторая производные Гато (слабые производные) не являются сильными (производными Фреше), если на функцию $h(x)$ не налагать никаких дополнительных условий гладкости. Поэтому формулы (3.7) и (3.8) пригодны либо для проверки необходимых условий экстремума второго порядка, либо для доказательства того, что в стационарных точках не достигается локальный экстремум. Исключение составляет случай, когда $\delta^2\Phi(h) > 0$ (< 0) для любых $h(x) \in Q$ и любых функций $\delta h(x)$. В этом случае можно утверждать, что функционал $\Phi(h)$ строго выпуклый (вогнутый), и следовательно, любой локальный экстремум будет глобальным на всем множестве Q . В частности, справедлив следующий результат, не зависящий от вида краевых условий.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in W^1$. Тогда при $0 < p < 1$ функционал $\Phi(h)$ является сильно выпуклым.

Доказательство. Рассмотрим выражение (3.8) для $\delta^2\Phi(h)$. Так как второй член неотрицателен, имеет место неравенство

$$\delta^2\Phi(h) \geq \chi^p(h, u, \delta h)$$

Последнее выражение строго положительно при $0 < p < 1$ для любых $\delta h \neq 0$.

4. Случай свободно опертой балки ($p \geq 1$ и $p < 0$).

Теорема 2. Пусть $f(x) \in W'$ и при некотором $h \in Q$ выполняются необходимые условия экстремума (3.6). Тогда при $p \geq 1$ и $p < -1$ функционал $\Phi(h)$ может достигать лишь локального минимума, а при $-1 < p < 0$ лишь локального максимума.

Доказательство. Рассмотрим функцию $v_1(x)$, являющуюся решением второго уравнения (3.3). Так как $v_1 \in W_{h,p}^2$, то функция $v_1''h^p \in L_{h,p}^2$ где $L_{h,p}^2$ — пространство функций с нормой, определенной равенством (2.5). Следовательно, функция $v_1''h^p$

может быть представлена в виде линейной комбинации функций $\{y_i(x)\}$ краевой задачи (2.2), (2.3), которые образуют полную систему функций в пространстве $L_{h,p}^2$ (всюду далее суммирование ведется по i от $i = 1$ до $i = \infty$)

$$v_1'' h^p(x) = \sum c_i y_i(x), \quad c_i = \text{const} \quad (4.1)$$

Подставляя это разложение во второе равенство (3.3) и последовательно умножая обе его части скалярно в L_2 на функцию $y_1(x), y_2(x), \dots$, получим

$$\sum c_i (y_i, y_j'') = -p(h^{p-1} u'', y_j' \delta h)$$

Из уравнения (2.2) и условий нормировки (2.6) вытекает, что

$$(y_i, y_j'') = -\lambda_i \delta_{ij}$$

Поэтому

$$p(h^{p-1} u'', y_j'') = -\lambda_j (h^{-1} u'', y_j \delta h)$$

Следовательно,

$$c_j = -p(h^{-1} u'', y_j \delta h)$$

Из соотношения (4.1) с помощью последнего равенства имеем

$$v_1''(x) h^p(x) = -p \sum (h^{-1} u'', y_i \delta h) y_i(x)$$

Подставив это выражение в первую формулу (3.7), получим

$$\delta^2 \Phi(h) = \chi^p(h, u, \delta h) + p^2 \sum (h^{-1} u'', y_i \delta h)^2 \quad (4.2)$$

Для функции $\psi(x)$, определенной вторым равенством (3.5), справедливо включение $\psi(x) \in L_{h,p}^2$.

Действительно, используя необходимые условия экстремума (3.6) получим

$$\|\psi\|_{L_{h,p}^2}^2 = \int_{-1}^1 h^{-p}(x) |\psi(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 h^{p-1}(x) (u''(x))^2 h^{-1}(x) \delta h^2(x) dx = l_0^2 \int_{-1}^1 \frac{\delta h^2(x)}{h(x)} dx$$

В силу сделанных предположений о порядке вырождения функций $h(x)$ и $\delta h(x)$ последний интеграл сходится.

Подставив функцию $\psi(x)$ в равенство (4.2), в итоге имеем

$$\delta^2 \Phi(h) = -\frac{p(p-1)}{2} \|\psi\|_{L_{h,p}^2}^2 + p^2 \sum (\psi(x), y_i(x) h^{-p}(x))^2 \quad (4.3)$$

С другой стороны, $(\psi(x), y_i h^{-p}) = d_i$ — коэффициенты Фурье в разложении функции $\psi(x)$ по собственным функциям $\{y_i(x)\}$ задачи (2.2), (2.3) в пространстве $L_{h,p}^2$. Отсюда следует, что

$$\|\psi\|_{L_{h,p}^2}^2 = \sum d_i^2 = \sum (\psi(x), y_i h^{-p})^2$$

Теперь равенства (4.3) принимают следующий вид:

$$\delta^2 \Phi(h) = \left(p^2 - \frac{p(p-1)}{2} \right) \|\psi\|_{L_{h,p}^2}^2 = \frac{p(p+1)}{2} \|\psi\|_{L_{h,p}^2}^2 = \frac{p(p+1)}{2} l_0^2 \int_{-1}^1 \frac{\delta h^2(x)}{h(x)} dx \quad (4.4)$$

Следовательно, $\delta^2 \Phi(h)$ не может быть отрицательно определенной величиной для

любых допустимых δh при $p > 0$ и $p < -1$ и положительно определенной при $-1 < p < 0$. Учитывая результат предыдущей теоремы, получим требуемое утверждение.

5. Случай жестко закрепленных концов балки. Может показаться, что доказательство предыдущей теоремы может быть легко распространено на случай краевых условий (1.3). В действительности, как будет показано ниже, случай краевых условий (1.3) является особым в том смысле, что при $p > 1$ оптимальные распределения толщин обязательно имеют нулевые значения внутри интервала решения. Интересно отметить, что именно этот случай является особым в известной задаче Лагранжа о максимизации устойчивости упругой колонны [9].

Теорема 3. Пусть $f(x) \in W'$ и при некотором $h(x) \in Q$ выполняется необходимое условие экстремума (3.6). Тогда при $p > 1$ функционал $\Phi(h)$ может достигать локального минимума лишь на функциях $h(x)$, которые имеют нули внутри интервала решения.

Доказательство. Пусть $p > 1$. Положим в формуле (3.7) $\delta h = u''(x)$. Используя граничные условия (1.3) легко показать, что такая вариация удовлетворяет изопериметрическому условию (3.1). Из условия (3.6) следует, что

$$|u''(x)| = l_0 h(x)^{(1-p)/2} \quad (5.1)$$

т.е., если при $p > 1$ функция $h(x)$ не обращается в нуль, то вариация $\delta h(x) = u''(x)$ является ограниченной функцией, и следовательно, допустимой. Более того, можно показать, что функция принадлежит пространству $W_{h,p}^2$. Действительно, при учете равенства (5.1) и второго условия (1.4) имеем

$$\int_{-1}^1 (u''(x))^2 h^p(x) dx = l_0^2 \int_{-1}^1 h(x) dx = l_0^2$$

С другой стороны, так как выполняется условие (3.6), то второе слагаемое в правой части равенства (3.7) равно нулю, поскольку функция $v_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (1.3). Имеем

$$(h^{p-1}u'', v_1'', \delta h) = (h^{p-1}(u'')^2, v_1'') = l_0^2 \int_{-1}^1 v_1''(x) dx = (v_1'(1) - v_1'(-1))l_0^2 = 0 \quad (5.2)$$

При помощи этого соотношения и условия (3.6) выражение (3.7) для второй вариации функционала запишем в виде

$$\delta^2 \Phi(h) = \chi^p(h, u, \delta h)$$

Это выражение отрицательно при любых δh и $p > 1$.

Замечание. Все предыдущие рассуждения полностью сохраняются и для случая $p < 0$. Действительно, в силу равенства (5.1) вариация будет допустимой для любых $h \in Q$.

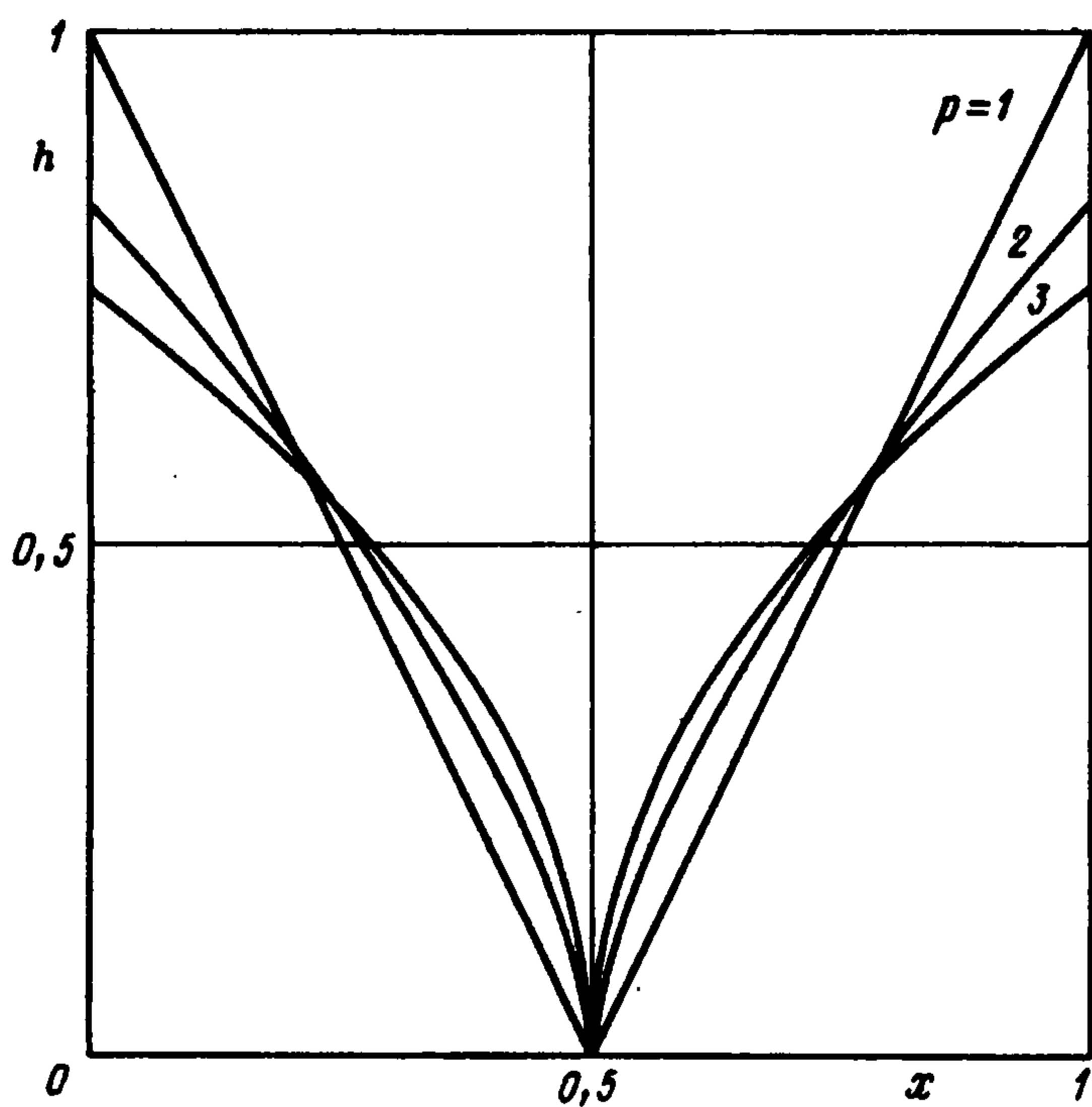
6. Об аналитических и численных решениях в случае колонны с закрепленными концами. Было получено (7) аналитическое решение задачи (1.1), (1.3) при $p = 3$ и $f(x) = \delta(x)$. Оптимальное распределение толщин колонны в этом случае имеет вид

$$h(x) = \frac{3}{4} |2|x|-1|^{1/2} \quad (6.1)$$

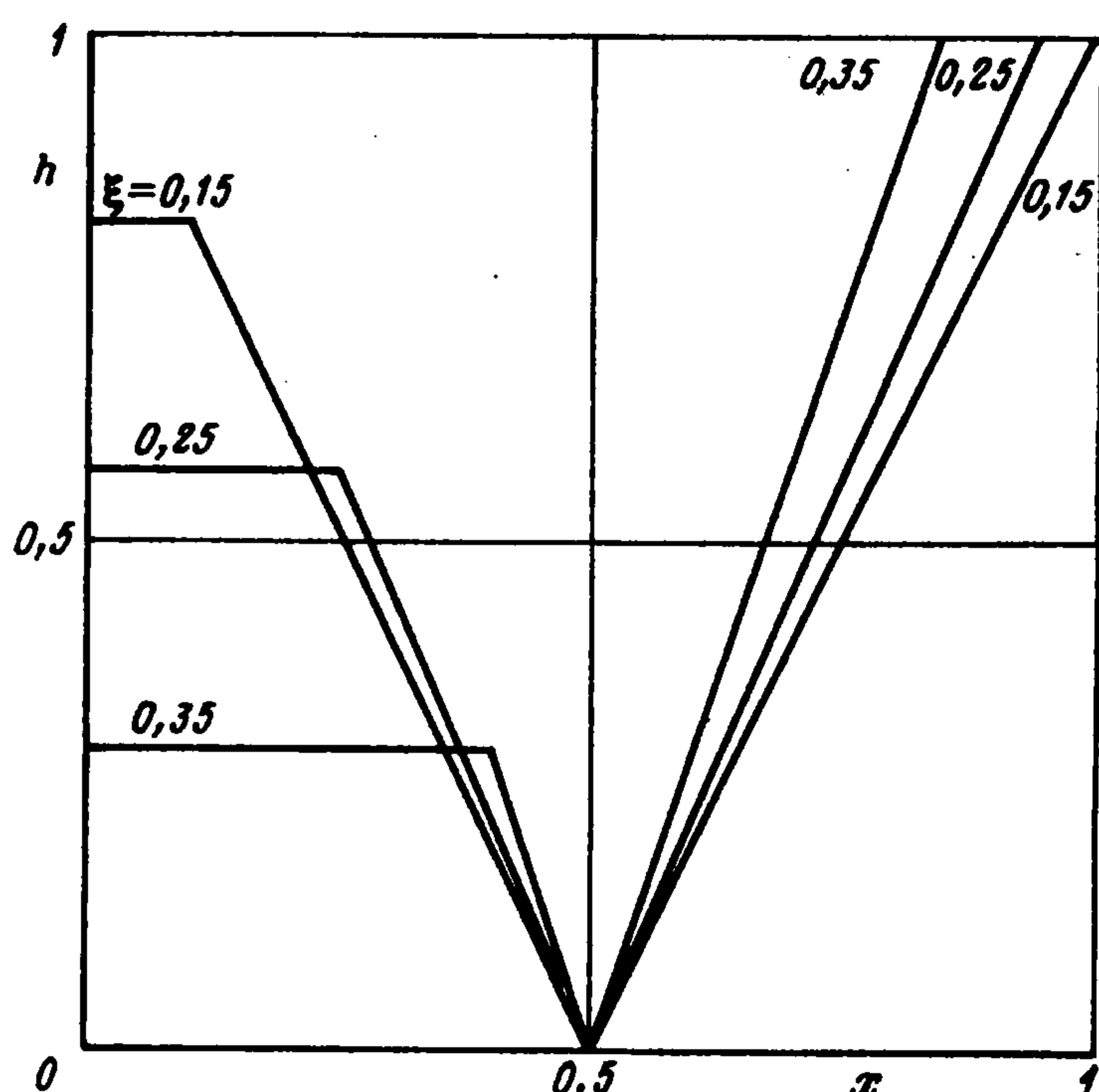
Соответствующее решение краевой задачи (1.1), (1.3) определяется формулой

$$u''(x) = \frac{16}{27} |2|x|-1|^{-1/2} \text{sign}(2|x|-1) \quad (6.2)$$

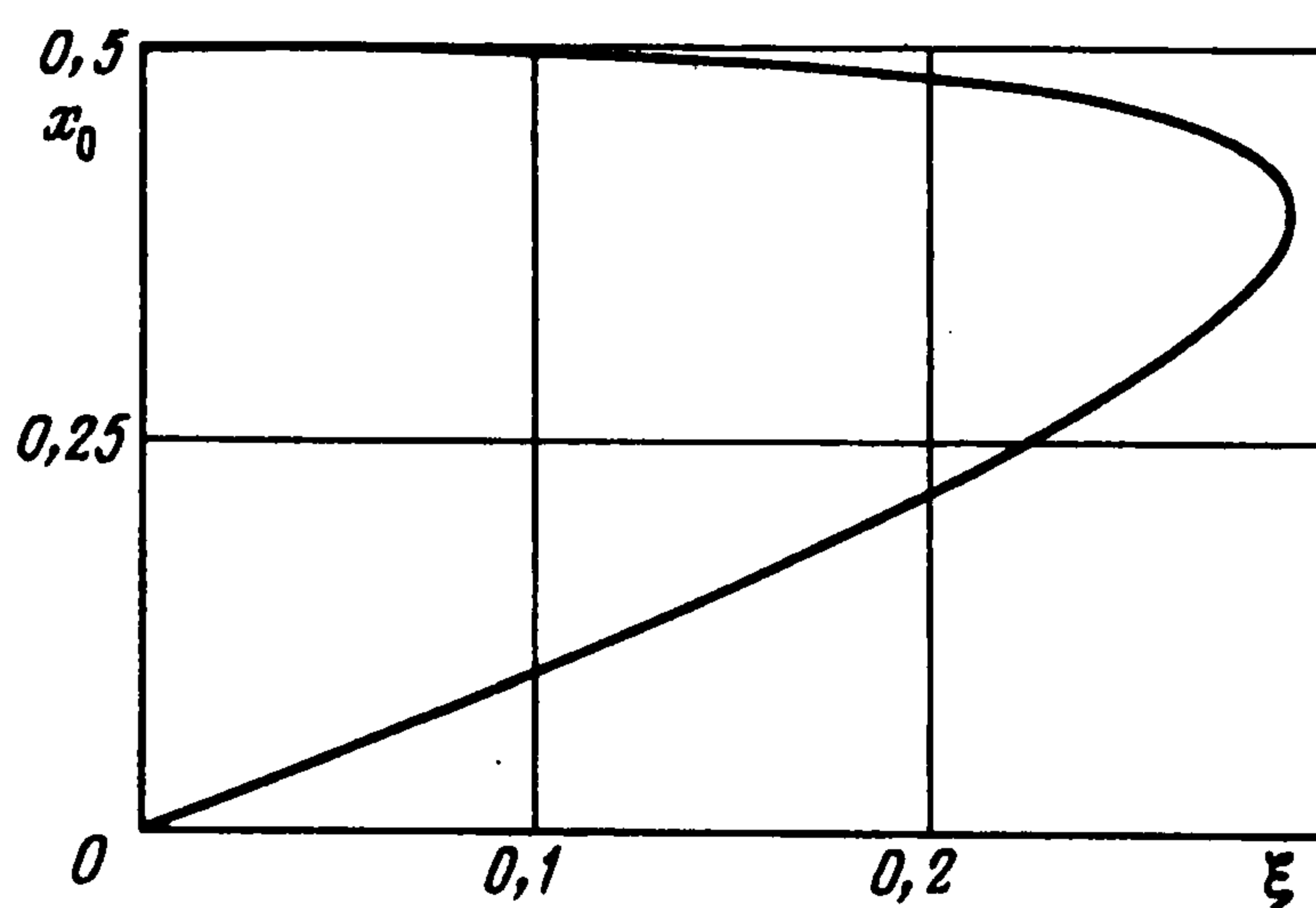
Функция $h(x)$ вырождается в точках $x = \pm 1/2$. Непосредственной проверкой можно убе-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

даться, что вторая вариация функционала на решении (6.1), (6.2) положительна, т.е. достаточные условия экстремума в этом случае выполняются.

Рассмотрим общий случай произвольного $p \neq 0$ и $f(x) = \delta(x)$.

Из уравнения (1.1) следует, что

$$u''(x)h^p(x) = |x|/2 + c_1x + c_2$$

В силу симметрии задачи $c_1 = 0$ и $u'(0) = 0$. Так как $u'(1) = 0$, то существует точка x_0 , $x_0 \in (0, 1)$, такая, что $u''(x_0) = 0$. Отсюда

$$u''(x)h^p(x) = (|x| - x_0)/2$$

Тогда из необходимых условий экстремума (3.6) следует

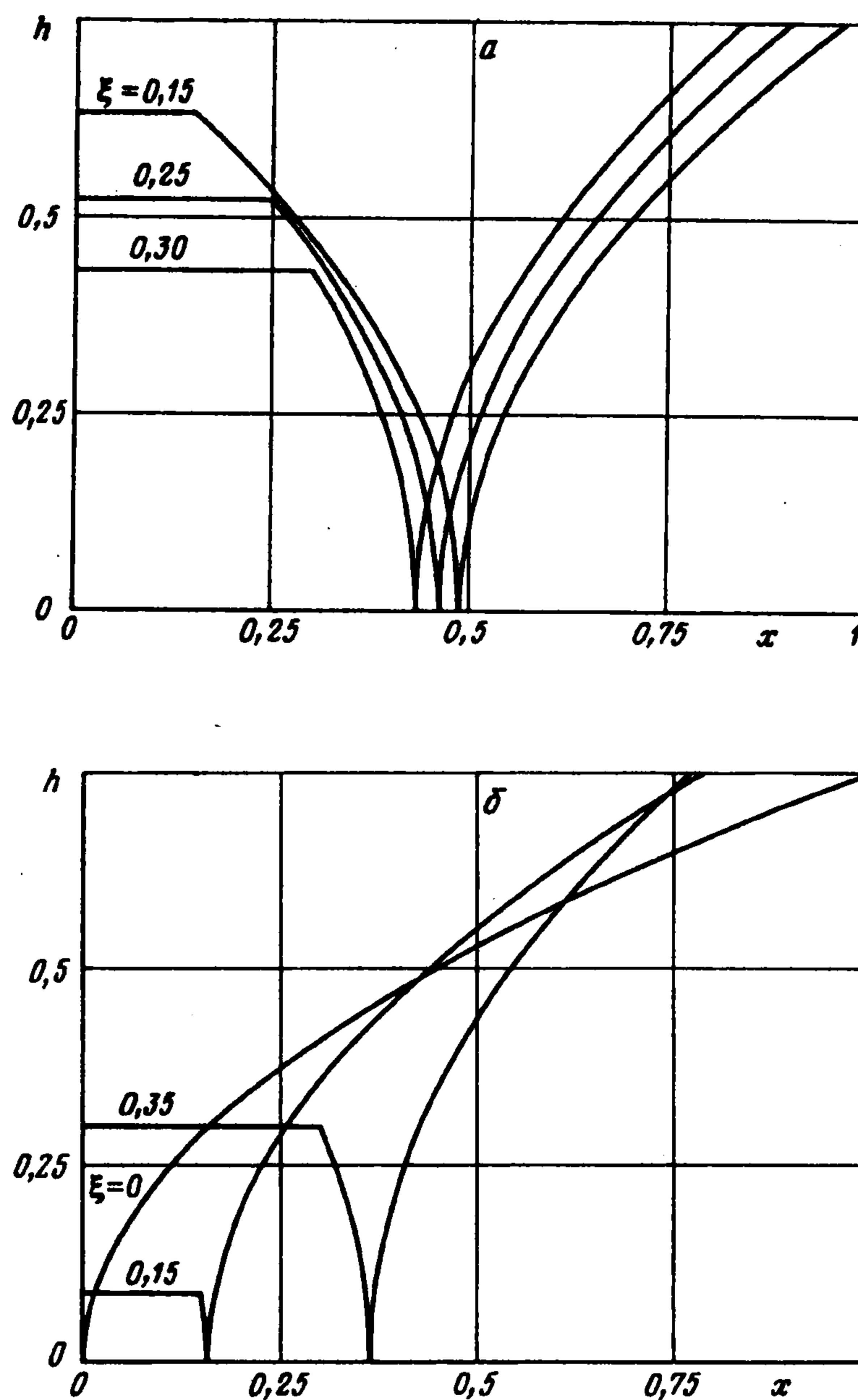
$$ph^{-(1+p)}(x) = (|x| - x_0)^2 / 4 = l_0^2$$

Отсюда

$$h(x) = c_p (|x| - x_0)^{1+q}, \quad c_p = (p/l_0^2)^{(1+q)/2}$$

Здесь введено обозначение

$$q = (1 - p)/(1 + p)$$



Фиг. 4

Найдем точку x_0 . Так как $u'(0) = u'(1) = 0$, то

$$\int_0^1 u''(x) dx = 0$$

Поэтому имеет место равенство

$$-\int_0^{x_0} (x_0 - x)^q dx + \int_{x_0}^1 (x - x_0)^q dx = 0$$

решением которого является $x_0 = 1/2$.

Постоянная c_p находится из изопериметрического условия (1.4).

Окончательно получим, что решение исходной задачи имеет вид

$$h(x) = \frac{2+q}{2} |2|x|-1|^{1+q} \quad (6.3)$$

Оно представлено на фиг. 1 при разных значениях $p = 1, 2, 3$.

Здесь и далее в силу симметрии представлены графики функции $h(x)$ лишь при $x \in [0, 1]$.

Отметим, что решение (6.3) имеет смысл лишь при $p > -1$, так как в противном случае функция $h(x)$ будет иметь полюса в точках $x = \pm 1/2$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что на решении (6.3) вторая вариация функционала положительна, т.е. достаточные условия экстремума в этом случае выполняются.

Рассмотрим случай, когда в уравнении (1.1) поперечная сила имеет вид двух сосредоточенных нагрузок, приложенных симметрично относительно центра балки

$$f(x) = (\delta(x - \xi) + \delta(x + \xi))/2, \quad 0 < \xi < 1$$

Имеем

$$u''(x)h^p(x) = (|x - \xi| + |x + \xi| + c_1x + c_2) \quad (6.4)$$

В силу симметрии задачи $c_1 = 0$. Правая часть равенства (6.4) может менять знак в точке x_0 при $c_2 = 2x_0$, $\xi < x_0 < 1$. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получим

$$h(x) = c_p (|x - \xi| + |x + \xi| - 2x_0) / 4^{1+q} \quad (6.5)$$

$$u''(x) = c_p^{-p} (|x - \xi| + |x + \xi| - 2x_0) / 4^q z \quad (6.6)$$

$$z = \text{sign}(|x - \xi| + |x + \xi| - 2x_0)$$

Для определения точки x_0 имеем уравнение

$$-\int_0^\xi (x_0 - \xi)^q dx - \int_\xi^{x_0} (x - x_0)^q dx + \int_{x_0}^1 (x - x_0)^q dx = 0 \quad (6.7)$$

Это уравнение имеет решение не для всех ξ ($0 < \xi < 1$).

Действительно, пусть $p = 1$, тогда $x_0 = 1/2$. Но решение уравнения (6.7) существует лишь при $\xi < x_0$. Это означает, что при $\xi \geq 1/2$ решение вариационной задачи не существует.

На фиг. 2 показано поведение функции $h(x)$ при разных значениях ξ .

Поясним смысл этого явления на примере случая $p = 3$, который допускает ясную механическую интерпретацию. В этом случае уравнение (6.7) принимает вид

$$8x_0^2 - 4(2\xi + 1) + \xi^2 + 4\xi = 0 \quad (6.8)$$

и его действительные решения возможны лишь при $0 < \xi < 1 + \sqrt{2}/2$.

На фиг. 3 показан график зависимости x_0 от величины ξ .

Из уравнения (6.8) видно, что каждому допустимому значению соответствует два значения x_0 .

Графики, представляющие оптимальные решения для первой ветви при $x_0 \in [(3 - \sqrt{2})/4, 1/2]$ даны на фиг. 4, а при $p = 3$ и разных значениях ξ . Решения для второй ветви $x_0 \in [0, (3 - \sqrt{2})/4]$ представлены на фиг. 4, б.

Значения величины функционала $\Phi(h)$ на каждой из указанных ветвей равно $c_p^{2/(1+q)}$.

Вычислим величину постоянной c_p . Функция $h(x)$ определена выражением (6.5). Из условия постоянства объема получим

$$c_p (\xi(x_0 - \xi))^{1+q} + (2+q)^{-1} (x_0 - \xi)^{2+q} + (2+q)^{-1} (1 - x_0)^{2+q} = 2^q$$

Вычисления показывают, что значение функционала на первой ветви $((3 - \sqrt{2})/4 \leq x_0 \leq 1/2)$ будут меньше, чем на второй ветви $(0 < x_0 < (3 - \sqrt{2})/4)$ при $0 < \xi < 1 - \sqrt{2}/2$.

Если $\xi \geq 1 - \sqrt{2}/2$, то решения уравнения (6.8) не существует. Это означает, что $u''(x)$ не меняет своего знака при $|x| \leq 1$.

Для произвольного значения p решение задачи при $\xi \leq |x| \leq 1$ может быть определено следующим образом:

$$h^p(x)u''(x) = (|x - \xi| + |x + \xi| - 2\xi)/4$$

$$h(x) = c_p (|x| - \xi/2)^{1+q}, \quad c_p = [(2+q)/4][(1-\xi)/2]^{-2-q}$$

Механическим обоснованием представленного решения может служить следующее соображение: в этом случае точки приложения внешних сил находятся так близко к заземленным концам, что для минимизации прогиба оказывается более рациональной система из двух консолей. Поэтому, если доопределить функцию $h(x)$ нулем при $|x| < \xi$, то балка распадается на две независимые консоли, закрепленные в точках $x = \pm 1$.

Необходимое условие экстремума (3.6), так же как и исходное уравнение при $|x| < \xi$, формально перестает выполняться. В точках $x = \pm \xi$ имеют место равенства

$$(h^p u'')_{x=\pm \xi} = 0, \quad (h^p u'')'_{x=\pm \xi} = \pm 1/2 \quad (6.9)$$

Можно убедиться, что полученное оптимальное решение соответствует консоли, если непосредственно рассмотреть постановку исходной задачи для консольной балки. Имеем

$$(h^p(x)u'')'' = \delta(x - \xi)/2, \quad h^p u'' = |x - \xi|/4 + c_1 x + c_2$$

$$u(1) = u'(1) = 0, \quad (h^p u'')_{x=0} = (h^p u'')'_{x=0} = 0$$

Из краевых условий получим $c_1 = 1/4$, $c_2 = -\xi/4$. В итоге

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi \\ c_p [(x - \xi)/2]^{1+q}, & x \geq \xi \end{cases}$$

Из изопериметрического условия (1.4) следует

$$c_p = [(2+q)(1-\xi)^{-2-q}]/4$$

т.е. рассматриваемое решение совпадает с решением, полученным ранее в случае закрепленных концов для $\xi \geq 1 - \sqrt{2}/2$.

Для выяснения математической сущности полученных выше решений рассмотрим модельную задачу об отыскании решений следующей краевой задачи:

$$(x^2 y'(x))' = 0, \quad -1 < x < 1$$

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$$

Условие положительной определенности для оператора, стоящего в левой части уравнения не выполняется, поскольку порядок вырождения в нуле равен двум, однако непосредственно проверяется, что оператор положителен.

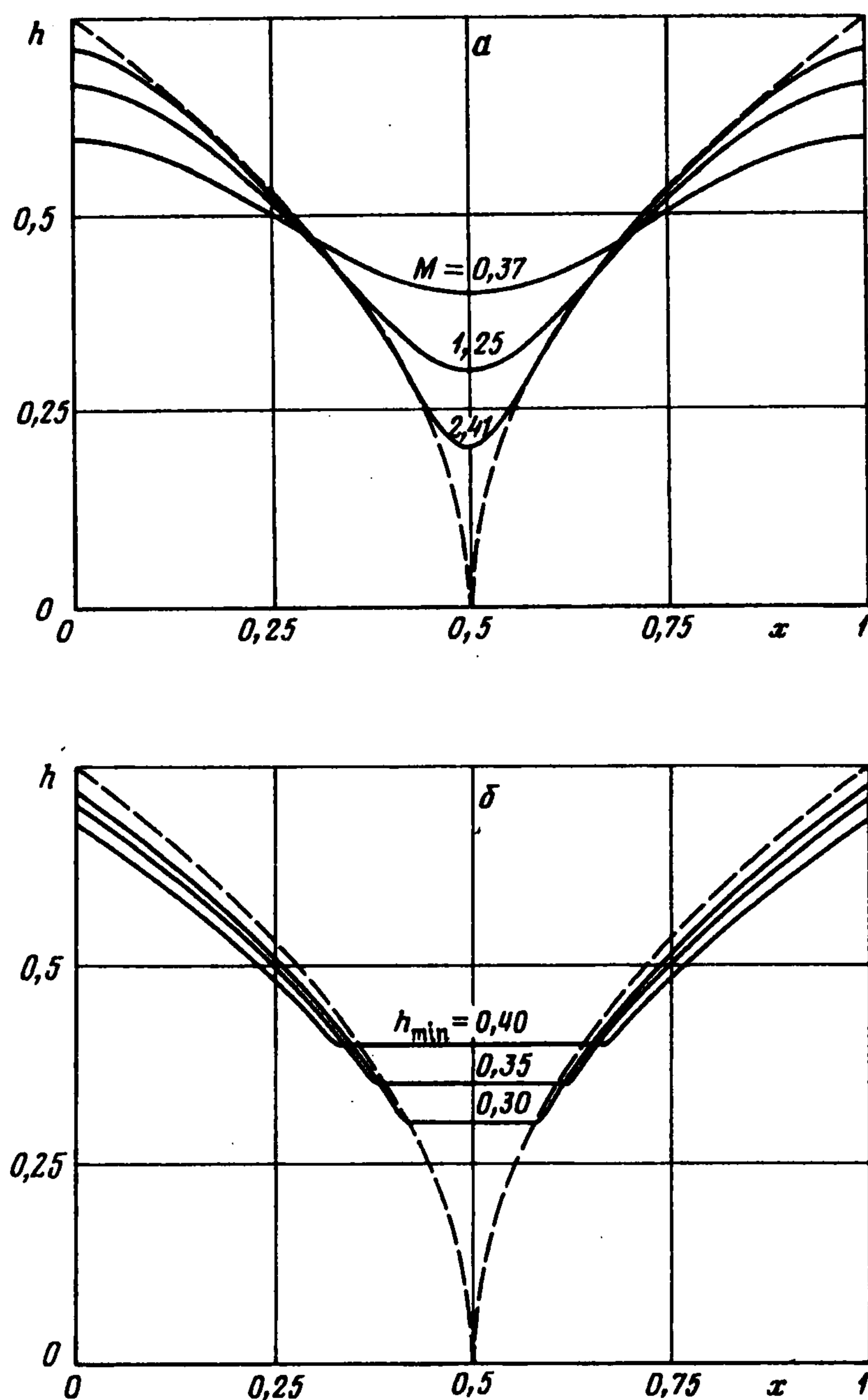
Интегрируя уравнение и используя краевые условия, получим

$$y(x) = -c_1/x + c_2, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Тем не менее, поставленная краевая задача имеет нетривиальное решение, если расширить область решений до множества обобщенных функций, а именно: $y = \delta(x)$.

Если выполнено условие

$$\int_{-1}^1 h^{-p}(x) dx < +\infty$$



Фиг. 5

то оператор $A(h)$ положительно определен, однако, как показывают полученные выше аналитические решения, в случае краевых условий (2.4) это условие нарушается. Следовательно, в этом случае однородная краевая задача (2.2), (2.4) может иметь нетривиальные решения, что делает постановку оптимизационной задачи неопределенной.

Все это показывает, что решение краевых задач (2.2)–(2.4) необходимо рассматривать с учетом порядка вырождения функции $h(x)$, что и было сделано в исходной постановке задачи в разд. 1. Это условие не ограничивает возможность поиска оптимальных решений в случае свободно опертых концов, но оно, как показывают найденные аналитические решения, существенно ограничивает возможность получения оптимальных решений в случае закрепленных концов. Последнее означает, что в этом случае от приведенного выше условия на порядок вырождения функции $h(x)$ следует отказаться.

Из общей теории краевых задач известно [10], что в этом случае для обеспечения единственности решения краевой задачи необходимо задать дополнительные краевые условия в точке интервала решения, где порядок вырождения больше чем $1/p$. Так, например, в случае рассмотренной краевой задачи таким условием служит $y(0) = 0$. Для полученных выше аналитических решений это условие переходит в первое из условий (6.9). Поэтому исходная постановка задачи для случая закрепленных концов должна содержать это условие, причем точка интервала, где оно должно выполняться, представляет неизвестный параметр задачи и определяется в процессе ее решения. Эта процедура была полностью реализована при отыскании приведенных выше аналитических решений.

С практической точки зрения представляется важным изучение задач (1.1), (1.2) и (1.1), (1.2) с функционалом (1.5) и с ограничениями на нижнее значение величины $h(x)$:

$$h(x) \geq h_{\min}, \quad h_{\min} > 0$$

В силу теоремы 3 такая задача не имеет оптимального решения, поэтому необходимо соответствующим образом модифицировать первоначальную постановку исходной задачи. Одним из путей такой модификации является введение дополнительного ограничения на среднюю интегральную величину от квадрата производной функции

$$\int_{-1}^1 (h'(x))^2 dx \leq M, \quad M = \text{const}$$

Отметим, что значение верхней границы функции $h(x)$ может быть получено из неравенства Пуанкаре [3].

Было показано [11], что в этом случае оптимальное решение будет существовать, если постоянная достаточно мала. Отметим, что это условие является лишь достаточным для существования оптимального решения.

На фиг. 5, а показан результат численного решения модифицированной задачи при $f(x) = \delta(x)$, $p = 3$ и разных значениях постоянной M . На фиг. 5, б представлены графики решения задачи с ограничениями на величину $h_{\min}$, но без интегрального ограничения на квадрат производной функции $h(x)$, при разных значениях $h_{\min}$.

Как и следовало ожидать, с увеличением величины M и уменьшением величины $h_{\min}$ решения модифицированной задачи стремятся к оптимальному решению (6.1), показанному штриховой линией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Keller J.B. The shape of the strongest column // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1960. V. 5. № 4. P. 275–285.
2. Keller J.B., Niorodson F.I. The tallest column. // J. Math. Mech. 1966. V. 16. № 5. P. 433–446.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
5. Prager W., Taylor J.E. Problems of optimal structural design // Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1968. V. 35. P. 102–106.
6. Taylor J.E. The strongest column: an energy approach // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1967. V. 34. P. 486–487.
7. Banichuk N.V., Karihalow B.L. On the solution of optimization problems with singularities // Intern. J. Solids and Structures. 1977. V. 13. № 8. P. 725–733.
8. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin et al.: Springer, 1966. = Kato T. Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
9. Братусь А.С. О свойствах решений одного класса изопериметрических задач оптимизации устойчивости // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 86–95.
10. Triebel H. Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators. Berlin: Deutsch. Verl. Wissensch., 1978. = Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.
11. Братусь А.С. Достаточные условия экстремума в задачах управления коэффициентами эллиптических операторов // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40. № 2. С. 171–172.