

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. В.А. Ромащенко

АНОМАЛЬНОЕ ОТРАЖЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ВОЛН ОТ СВЕРХТОНКИХ ПРЕПЯТСТВИЙ

На примере гидроупругой одномерной линейной гиперболической смешанной краевой задачи третьего типа аналитически исследуется отражение волн с сильными разрывами от сверхтонких пленок. Волновое решение представлено в виде суммы ожидаемой и аномальной составляющих, получена удобная рекуррентная формула для расчета волновых картин после любого числа отражений от пленки.

При рассмотрении контактных волновых задач гидроупругости либо теории упругости с тонкими препятствиями (слоями) обычно пренебрегают волновыми явлениями по толщине преграды (оболочки) и описывают процесс на основе упрощенной гиперболической смешанной краевой задачи третьего типа [1–3]. В случае решений с сильными разрывами такие задачи могут проявлять свойства, не характерные для классических решений или решений со слабыми разрывами. Одна такая особенность далее будет рассмотрена более подробно. При изложении материала используется традиционная терминология [4]: под классическими волновыми решениями понимаются решения, принадлежащие классу C_2 . Решения с сильными разрывами непрерывны, но имеют разрывы первых производных. Решения со слабыми разрывами принадлежат классу C_1 , но имеют разрывы вторых производных.

Рассмотрим линейную одномерную краевую задачу гидроупругости. Имеется бесконечный плоский слой упругой идеальной жидкости толщины L , ось x направим по нормали к поверхности слоя таким образом, чтобы плоскости $x = 0$ и $x = L$ соответствовали поверхностям слоя. На поверхность $x = 0$ падает заданный импульс давления $f(t)$, причем под f понимаем возмущение давления, т.е. разность между полным и атмосферным давлением на этой границе. Поверхность $x = L$ контактирует без отрыва и протекания с тонкой бесконечной пластиной (пленкой) толщины h и плотности ρ_p . В начальный момент времени $t = 0$ жидкость неподвижна и находится под действием атмосферного давления P_0 . Силой тяжести пренебрегаем.

Используя потенциал скорости жидкости ψ , сформулируем, следуя известным подходам [1, 3], соответствующую волновую краевую смешанную задачу третьего типа в одномерной линейной постановке

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= a^{-2} \psi_{tt}, & 0 < x < L, & \quad 0 < t \\ \psi &= -\rho_0^{-1} \int_0^t f(t') dt', & x = 0, & \quad 0 \leq t \\ \psi_x + b\psi &= 0, & x = L, & \quad 0 \leq t, \quad b = \rho_0 / \rho_p h \\ \psi &= \psi_t = 0, & 0 \leq x \leq L, & \quad t = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ_0 – плотность жидкости, a – скорость звука в ней.

Таким образом, $b = 0$ соответствует абсолютно жесткой неподвижной стенке $x = L$, $b = \infty$ – свободной поверхности.

Скорость жидкости и возмущение давления в ней соответственно равны

$$v = \psi_x, \quad P = -\rho_0 \psi_t \quad (2)$$

К краевой задаче типа (1) можно привести задачу о поршне, а также некоторые одномерные волновые задачи теории упругости.

Полагаем, что импульс возмущения внешнего давления $f(t)$ удовлетворяет следующим требованиям.

1°. Он имеет конечную длительность $\tau < L/a$ и тождественно равен нулю при $t > \tau$ или $t < 0$.

2°. В интервале $[0, \tau]$ он может иметь конечное число разрывов первого рода.

3°. Интервал $[0, \tau]$ можно разбить на конечное число интервалов, внутри которых функция $f(t) \in C_1$ и имеет ограниченную производную $|df/dt| < M$.

При таких ограничениях задачу можно рассмотреть на основе теории волновых решений с сильными разрывами [4, 5]. Краевую задачу (1) решаем методом Даламбера [2, 6]

$$\psi(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \quad (3)$$

Можно показать, что

$$\rho_0 a \theta_1(y) = \int_0^y f\left(-\frac{y'}{a}\right) dy', \quad -2L \leq y \leq L \quad (4)$$

$$\rho_0 a \theta_2(y) = \int_0^{y-2L} f\left(\frac{y'}{a}\right) dy' - 2e^{-b(y-2L)} \int_0^{y-2L} f\left(\frac{y'}{a}\right) e^{by'} dy', \quad 0 \leq y \leq 3L$$

Формулы (4) позволяют определить решение (3) в прямоугольнике $(0 \leq x \leq L, 0 \leq at \leq 2L)$. Для продолжения решения на более широкий временной интервал необходимо продолжить θ_1 в сторону отрицательных и θ_2 в сторону положительных аргументов. Этого можно добиться при помощи рекуррентной процедуры [6], учитывающей граничные условия задачи (1).

При наложенных ограничениях на $f(t)$ функции (4), а значит, и решение (3) будут непрерывными всюду при любом значении аргументов. Производные ψ_x и ψ_t при этом могут иметь разрывы первого рода, расположенные на характеристиках $x \pm at = \text{const}$, т.е. имеем случай гиперболических решений с сильными разрывами. В любом конечном прямоугольнике $(0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T)$ будет конечное число разрывных характеристик.

Докажем консервативность краевой задачи (1). Чтобы исключить атмосферное давление P_0 из разряда внешних нагрузок и не учитывать его работу на перемещениях границ, а также не учитывать начальную упругую потенциальную энергию жидкости от поджатия атмосферным давлением P_0 , примем за недеформированное состояние жидкости ее состояние при нормальных условиях, т.е. поджатое атмосферным давлением. Правомерность такого подхода можно строго обосновать.

Можно показать, что интеграл полной энергии с точностью до постоянного множителя для задачи (1) равен

$$E(t) = b\psi^2(L, t) + \int_0^L (a^{-2}\psi_t^2 + \psi_x^2) dx \quad (5)$$

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Если функция $f(t)$ удовлетворяет указанным выше требованиям 1° – 3°, то $E(t) \in C$.

Утверждение 2. На всякой разрывной характеристике выполнено условие совместности во всех точках, где нет встречи двух (левой и правой) разрывных характеристик,

а именно величина $\psi, \pm a\psi_x$ будет изменяться непрерывно при переходе через соответствующую характеристику разрыва $x \mp at = \text{const}$.

Утверждение 3. При любом $t > \tau$, при котором нет ни одной встречи разрывных левой и правой характеристик, будет $dE/dt = 0$.

При доказательстве последнего утверждения необходимо учитывать разрывность подынтегральной функции и разбивать интеграл (5) на части с переменными пределами, движущимися со скоростью $\pm a$ вдоль оси x .

Кроме того, выше упоминалось, что во всяком конечном прямоугольнике ($0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T$) будет конечное число точек встречи правых и левых разрывных характеристик.

Таким образом, при $\tau < t < T$ имеем $E(t) \in C$ всюду и $dE/dt = 0$ всюду, за исключением, быть может, конечного числа изолированных точек. Отсюда следует, что $E(t) = \text{const}$ при $t > \tau$, т.е. доказана следующая теорема.

Теорема 1. Задача (1) консервативна, если внешний импульс $f(t)$ удовлетворяет требованиям 1° – 3°.

Рассмотрим далее предельные случаи $b \rightarrow 0$ и $b \rightarrow \infty$. Случай $b \rightarrow 0$ соответствует неограниченному увеличению жесткости стенки $x = L$ и $b = 0$ соответствует неподвижной границе. Можно показать, что при $b \rightarrow 0$ решение вместе со своими первыми производными равномерно по x и t стремится к соответствующим предельным значениям, которые полностью совпадают с получаемыми при $b = 0$. Этот случай довольно прост и далее рассматриваться не будет.

Иная ситуация получается при рассмотрении больших b (сверхтонких пленок). Собственно решение и в этом случае будет равномерно по обеим переменным стремиться к решению при $b = \infty$ (свободная поверхность). А первые производные функции (3) будут иметь аномалии, которые далее рассмотрим более подробно.

Рассмотрим момент времени t , удовлетворяющий условию $\tau + L/a < t < 2L/a$.

За это время импульс успеет полностью отразиться от границы $x = L$ и отраженная волна еще не успеет достигнуть границы $x = 0$. Согласно соотношениям (2) – (4), волновая картина распределения давления поперек жидкого слоя будет иметь вид

$$P(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2L - at \\ f\left(\frac{z}{a}\right) - 2be^{-bz} \int_0^z f\left(\frac{z'}{a}\right) e^{bz'} dz', & 2L - at \leq x \leq L \end{cases} \quad (6)$$

$$z = x + at - 2L \geq 0$$

Пусть τ_i ($i = 1, 2, \dots, I$) – временные координаты точек разрыва импульса $f(t)$. Рассмотрим ситуацию за i -м разрывом в формуле (6). Нижняя (ненулевая) часть равенства (6) при $b \gg 1$ дает

$$P_{a1}(u) = f\left(\tau_i + \frac{u}{a}\right) - 2e^{-bu} \left[f(\tau_i - 0) + b \int_0^u f\left(\tau_i + \frac{u'}{a}\right) e^{bu'} du' \right] \quad (7)$$

$$u = z - a\tau_i = x + at - 2L - a\tau_i \geq 0$$

Производя над равенством (7) некоторые тождественные преобразования и используя свойства 1° – 3° заданного импульса нагрузки, можно доказать следующие утверждения.

Лемма 1. При $b \rightarrow \infty$, любом $\varepsilon > 0$ и

$$\varepsilon < u \leq a(\tau_{i+1} - \tau_i) \quad (8)$$

справедливо следующее:

1) $P_{a1}(u) \rightarrow -f(\tau_i + u/a)$ равномерно по u ;

2) величина $|dP_{a1}/du|$ ограничена одним и тем же числом, не зависящим от ε .

Лемма 2. Величина $|P_{a1}|$ всюду ограничена.

Таким образом, после первого отражения от правой границы будет справедлива асимптотика (7). Далее волна (7) дойдет до левой, уже свободной (свойство 1° импульса) поверхности и отразится от нее обычным образом, т.е. величину и направление движения изменит на противоположные. Хвост за волной (7) и скорость правой границы при $t > \tau + L/a$ будут бесконечно малыми и поэтому дадут бесконечно малый вклад в силу известного свойства корректности гиперболической задачи [2, 4].

Для рассмотрения волновой картины после второго отражения от правой границы в асимптотике $b \rightarrow \infty$ можно в выражении (7) заменить $f(\tau_i + u/a)$ на $[-P_{a1}(u)]$, а $f(\tau_i - 0)$ в силу первого утверждения леммы 1 можно не менять. Таким образом, получаем $P_{a2}(u)$ для

$$\tau + 3L/a < t < 4L/a, \quad u = x + at - a\tau_i - 4L \geq 0.$$

Для $P_{a2}(u)$ можно также доказать леммы 1 и 2. При этом существенно используется тот факт, что для $P_{a1}(u)$ эти леммы уже доказаны. Продолжая подобным образом решение задачи дальше, строим следующую рекуррентную процедуру:

$$P_{a0}(u) = -f(\tau_i + u/a)$$

$$\tau + (2n-1)L/a < t < 2nL/a$$

$$u = x + at - a\tau_i - 2nL \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$P_{an}(u) = -P_{a,n-1}(u) - 2e^{-bu} \left[f(\tau_i - 0) - b \int_0^u P_{a,n-1}(u') e^{bu'} du' \right] \quad (9)$$

Для нее, согласно сказанному выше, справедливы следующие лемма и теоремы.

Лемма 3. При $b \rightarrow \infty$, любом $\varepsilon \rightarrow 0$ и выполнении неравенства (8) величина $|dP_{an}/du|$ ограничена одним и тем же числом, не зависящим от ε , для любого фиксированного n .

Теорема 2. При $b \rightarrow \infty$, любом $\varepsilon > 0$ и выполнении неравенства (8) $P_{an} \rightarrow -f(\tau_i + u/a)$ равномерно по u для любого фиксированного n .

Теорема 3. Величина $|P_{an}|$ всюду ограничена для любого фиксированного n .

Теорема 4. Если $f(\tau_i - 0) = f(\tau_i + 0)$, то для любого фиксированного n при $b \rightarrow \infty$ будет $P_{an}(u) \rightarrow -f(\tau_i + u/a)$ равномерно по u в любой закрытой окрестности $u = 0$, не содержащей соседних точек разрыва.

Рассмотрим более подробно зону аномалий. Согласно доказанным теоремам, она при $b \rightarrow \infty$ будет всегда локализована в малой правосторонней ε -окрестности за разрывным фронтом отраженной волны для любого фиксированного отражения n от правой границы.

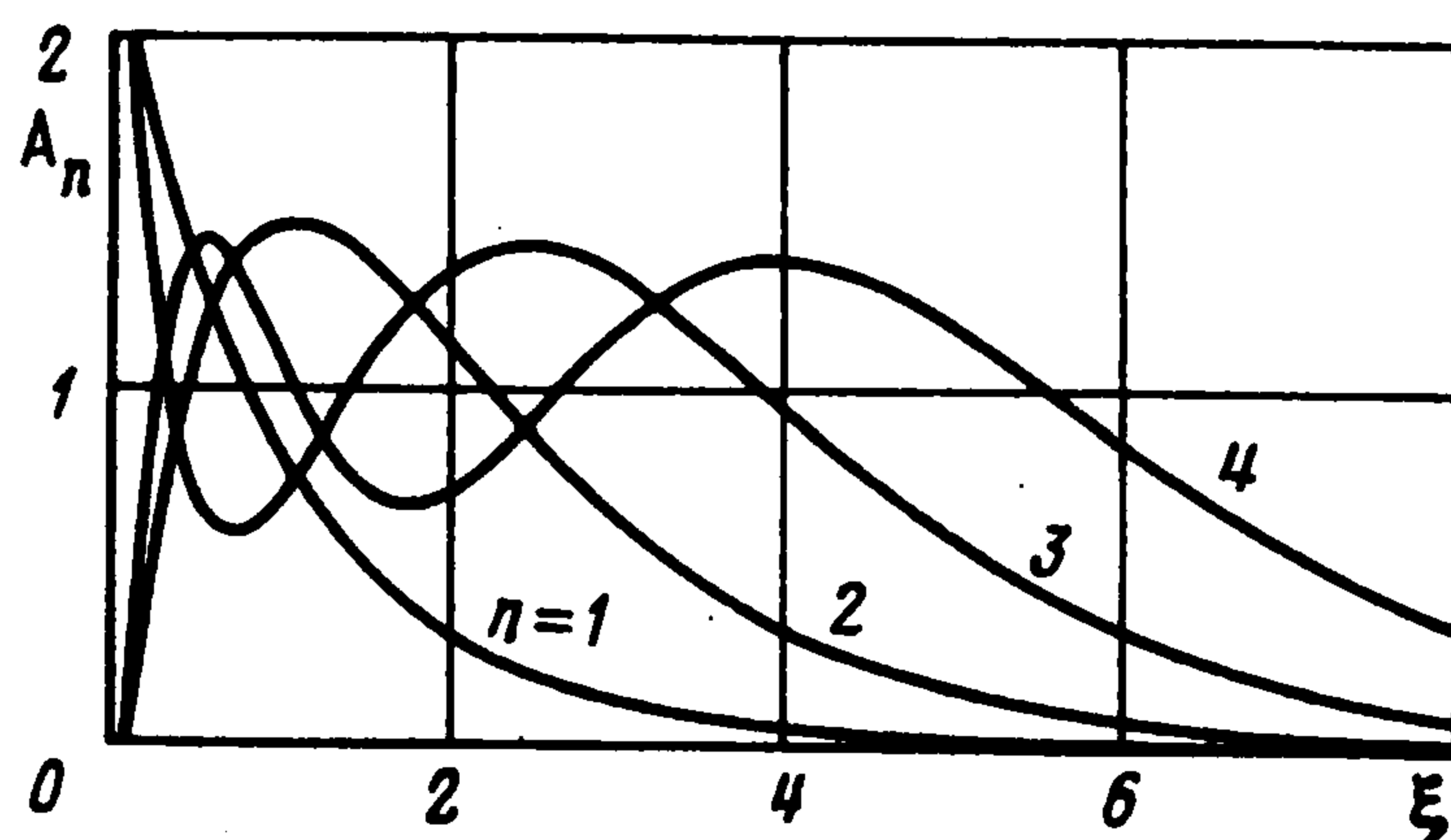
После введения обозначений

$$\xi = bu, \quad P_n(\xi) = P_{an}(\xi/b)$$

(ξ – безразмерная величина) вид рекуррентной процедуры (9) несколько упрощается. Она стала бы существенно проще, если на первом шаге полагать просто $\tilde{P}_0(\xi) = -f(\tau_i + 0) = \text{const}$. В связи с этим доказывается еще одна теорема.

Теорема 5. При любых N и $\varepsilon > 0$ найдутся B_0 и $\delta > 0$, такие, что при $0 \leq \xi \leq b\delta$ будет $|\tilde{P}_n - P_n| < \varepsilon$ и при $b\delta < \xi \leq ab(\tau_{i+1} - \tau_i)$ будет $|P_n(\xi) + f[\tau_i + \xi/(ab)]| < \varepsilon$, если только $n \leq N$, $b \geq B_0$ и заданный импульс $f(t)$ удовлетворяет требованиям 1° – 3°.

Здесь волной сверху обозначены величины, соответствующие упрощенной рекуррентной процедуре. Доказательство теоремы 5 громоздко, хотя и не представляет особых трудностей, и поэтому здесь не приводится. Таким образом, зону аномалий при $b \rightarrow \infty$ можно с любой точностью описывать упрощенной рекуррентной фор-



Фиг. 1

мулой. Вне этой аномальной зоны волна давления будет бесконечно мало отличаться от исходного импульса с обратным знаком.

Методом индукции упрощенную рекуррентную процедуру можно привести к такой простой форме:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_n(\xi) &= -f^+ + (f^+ - f^-)A_n(\xi) \\ A_n(\xi) &= 2e^{-\xi}q_n(\xi), \quad f^\pm = f(\tau_i \pm 0) \\ q_1(\xi) &= 1, \quad q_n(\xi) = 1 - q_{n-1}(\xi) + 2 \int_0^\xi q_{n-1}(\xi') d\xi'\end{aligned}\tag{10}$$

Видно, что $q_n(\xi)$ – полиномы степени $n - 1$. Следует отметить, что формулы (10) теряют смысл при $n \rightarrow \infty$; тем не менее они справедливы для любого фиксированного n .

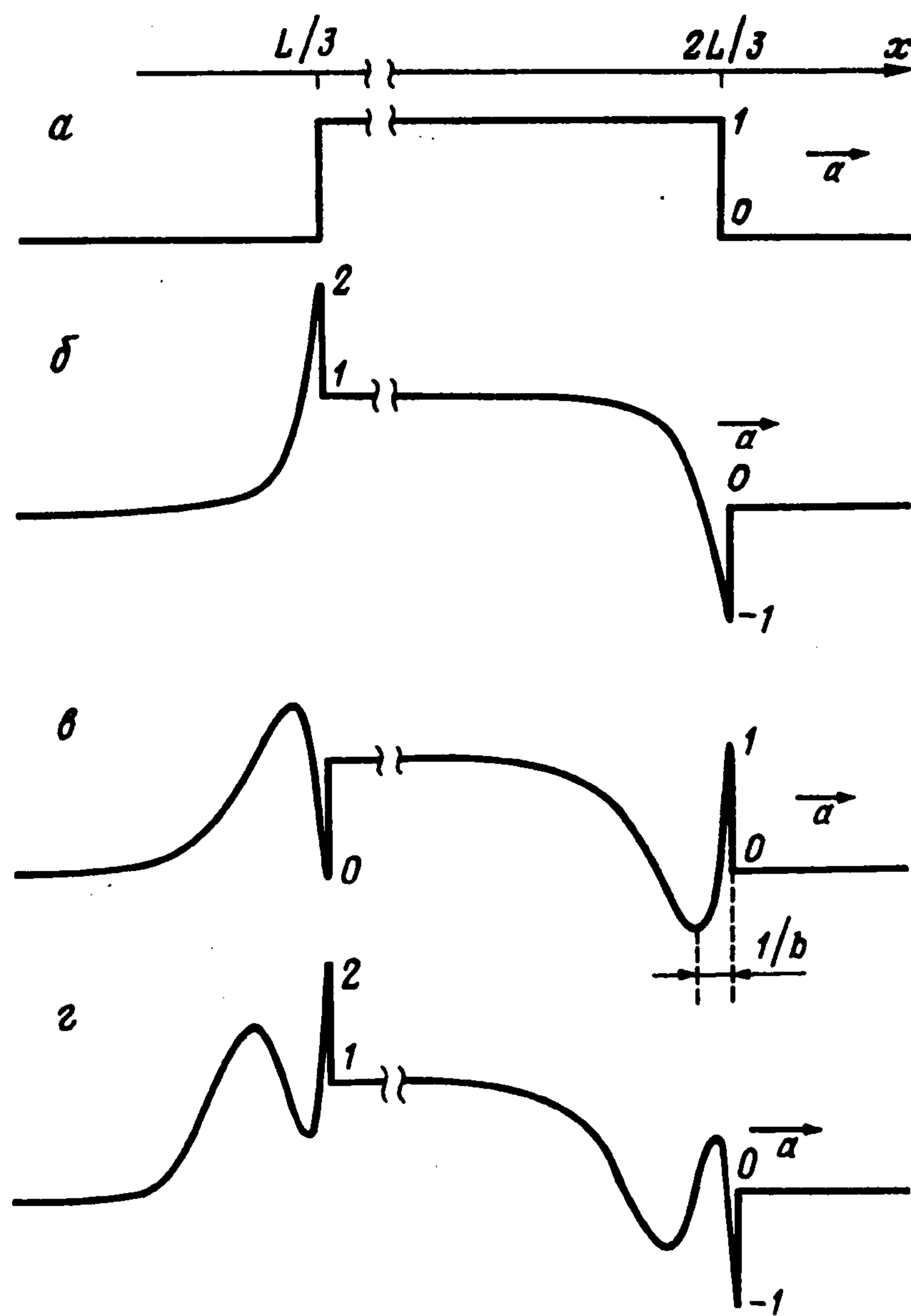
В решениях для $b = \infty$ (свободная поверхность) нужно все A_n полагать тождественными нулями. В то же время при больших b (сверхтонкие покрытия) решения будут иметь вид (10), т.е. состоять из нормальной ($-f^+$) и аномальной составляющих, причем аномальная составляющая будет существенным образом изменяться в зависимости от номера отражения n .

Первые четыре аномалии изображены на фиг. 1. Каждая нечетная аномалия будет давать всплеск высотой в два разрыва точно в начале фронта отраженной волны. Каждая четная аномалия начинается с нуля. Все аномалии, начиная со второй, имеют промежуточные максимумы, причем весьма существенные – почти полтора разрыва. Все аномалии существенно различаются друг от друга и, естественно, имеют ось абсцисс своей горизонтальной асимптотой. В соответствии с теоремой 4 все эти аномалии для любого фиксированного n исчезнут в случае непрерывного импульса и достаточно тонкой пленки.

На фиг. 2 представлены волновые картины давления для единичного ступенчатого импульса длительности $L/(3a)$ в моменты времени $2L/(3a)$ (а), $8L/(3a)$ (б), $14L/(3a)$ (в), $20L/(3a)$ (г) соответственно. На всех волновых картинах, начиная со второй, явно видны описанные выше аномалии как за передним, так и за задним разрывными фронтами отраженных волн.

Математическая природа этих явлений заключается в своеобразном дефекте сходимости неклассических решений краевой задачи (1). Волны с сильными разрывами, строго говоря, принадлежат классу обобщенных решений уравнений математической физики, для которых сходимость намного хуже, чем для классических решений [4]. И в данном случае наблюдается неравномерная сходимость производных от равномерно сходящегося решения.

Физическая природа аномалий (10) состоит в том, что модель (1) позволяет скорости скачкообразно изменяться на свободной поверхности ($b = \infty$) и меняться только



Фиг. 2

непрерывно для любого конечного b (т.е. для любой сколь угодно тонкой и легкой пленки).

Отметим, что для несжимаемых препятствий, по которым возмущение распространяется с бесконечной скоростью, система (1) будет точной, а не приближенной, поскольку такие преграды можно рассматривать как присоединенные массы, что в свою очередь приведет к смешанному краевому условию в (1). Для таких пленок, действительно, будут иметь место аномалии (10). Если же материал пленки сжимаем, то в точной постановке необходимо учитывать также волновые процессы и по толщине пленки. Аномалии (10) при этом могут ослабевать по мере сближения акустических импедансов несущего слоя (в рассмотренном случае жидкости) и препятствия. Система (1) эти эффекты не описывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
2. Положий Г.М. Рівняння математичної фізики. Київ: Радянська шк., 1959. 478 с.
3. Галиев Ш.У. Динамика гидроупругопластических систем. Київ: Наук. думка, 1981. 276 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.
5. Жарий О.Ю., Улитко А.Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. Київ: Вища шк., 1988. 184 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 655 с.

Київ
e-mail: roma@ipp.adam.kiev.ua

Поступила в редакцию
12.V.1999