

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. А.Г. Куликовский, А.П. Чугайнова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИПОПЕРЕЧНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

В линейном приближении исследуется устойчивость слабых квазипоперечных ударных волн в слабоанизотропной упругой среде по отношению к произвольно ориентированным возмущениям. Показано, что быстрые квазипоперечные ударные волны устойчивы.

Вопрос об устойчивости квазипоперечных ударных волн (УВ) представляет специальный интерес в связи с неединственностью решений однородных автомодельных задач для слабоанизотропных упругих сред [1, 2]. Было показано, что неединственность связана с существованием "метастабильных" УВ, которым законы сохранения не препятствуют распасться на систему волн, распространяющихся с различными скоростями. Устойчивость квазипоперечных УВ по отношению к нелинейным возмущениям той же ориентации, что и УВ после введения в уравнения вязкости (модель Фойхта), исследовалась с помощью численных экспериментов [3, 4] и было продемонстрировано, что "метастабильные" УВ обладают устойчивостью вплоть до возмущений сравнимых по амплитуде с самой УВ.

В данной работе при рассмотрении устойчивости УВ в анизотропных упругих средах по отношению к произвольно ориентированным возмущениям будет существенно использоваться малость их амплитуды, позволяющая написать и исследовать упрощенные уравнения для возмущений.

1. Упрощенные уравнения для описания волн, имеющих близкие ориентации. Рассмотрим сначала одномерные квазипоперечные волны малой амплитуды, распространяющиеся по однородному фону с нормальными, направленными в положительном направлении оси x декартовой системы координат, т.е. решения, зависящие от x и t . Такие решения могут быть описаны с помощью уравнений [5]

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial u_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$R(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(f - g)u_1^2 + \frac{1}{2}(f + g)u_2^2 - \frac{1}{4}\kappa(u_1^2 + u_2^2)^2, \quad u_\alpha = \frac{\partial w_\alpha}{\partial x}$$

Здесь x – лагранжева координата, w_α – компоненты вектора перемещений в направлении осей x_1 и x_2 , ортогональных оси x и ортогональных между собой, f , g , κ – коэффициенты, характеризующие упругую среду (g и κ – коэффициенты, характеризующие соответственно анизотропию и нелинейность среды). Величина f представляет скорость распространения возмущений при отсутствии нелинейности и анизотропии. Эта величина изменяется при преобразовании Галилея.

Соотношения на разрывах решений уравнений (1.1) следуют из условий сохранения потока поперечных компонент импульса

$$[\partial R(u_1, u_2) / \partial u_\alpha] = W[u_\alpha] \quad (1.2)$$

Квадратными скобками обозначены скачки заключенных в них величин: $[u_\alpha] = u_\alpha^+ - u_\alpha^-$, где u_α^- – значение перед фронтом УВ, а u_α^+ – значение за фронтом.

Быстрыми УВ называются эволюционные УВ, для которых выполнены неравенства

$$W \geq C_2^-, \quad C_1^+ \leq W \leq C_2^+ \quad (1.3)$$

где C_1 и C_2 – медленная и быстрая скорости характеристик системы (1.1). В дальнейшем во многих (очевидных) случаях индекс плюс будет опускаться.

Получим упрощенную систему уравнений для двумерных движений упругой среды, когда все изменяющиеся величины зависят от времени t , координаты x и слабо зависят от лагранжевой координаты $y = x_2$.

Имея в виду, что при малых амплитудах эффективно взаимодействуют волны только с близкими волновыми числами, рассмотрим поведение волн с нормальными близкими к положительному направлению оси x . Уравнения, описывающие такие волны, будем получать методом, который использовался ранее для получения уравнений Кадомцева–Петвиашвили [6] и Хохлова–Заболотской [7]. Основное предположение состоит в том, что в силу малости нелинейности и анизотропии, а также малости отклонения волны от одномерной, зависящей только от x и t , члены, описывающие влияние перечисленных эффектов, должны входить в окончательные уравнения независимо. Поэтому можно дополнить уравнения (1.1) членами, учитывающими малую неоднородность, которые получены в предположении отсутствия нелинейности и анизотропии.

В линейном изотропном случае обе компоненты поперечных возмущений удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению [8]. Считая, что поперечные возмущения зависят от x , y и t как $\exp(i(kx + ly - \Omega t))$ получим

$$\Omega^2 = f^2(k^2 + l^2) \quad (1.4)$$

где a – скорость распространения поперечных возмущений.

Считая что $l^2 \leq k^2$, оставляя главный по l^2/k^2 член и переходя в систему координат, движущуюся вдоль оси x со скоростью W , такой, что $b = f - W \ll f$, получим

$$k\omega = bk^2 + fl^2/2, \quad \omega = \Omega - kU \quad (1.5)$$

Сравнивая соотношения (1.5) и (1.1), аналогично [6,7] заключаем, что уравнения, описывающие слабонеоднородные квазипоперечные волны в слабоанизотропной упругой среде, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha} \right] = -\frac{f}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.6)$$

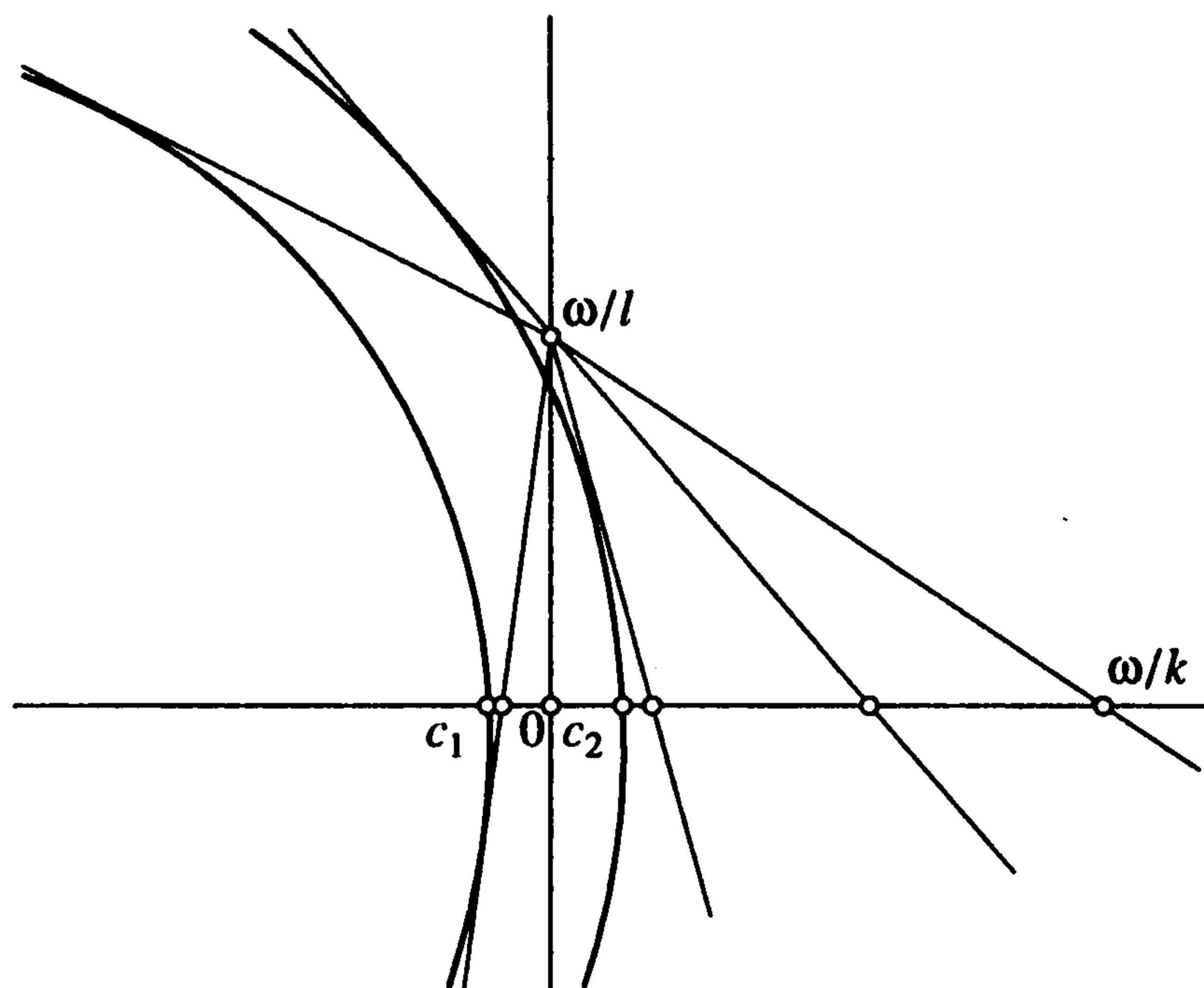
Если среда вязкоупругая, причем в изучаемых решениях влияние вязкости, как и нелинейности и других упомянутых выше факторов, мало, то вязкие члены могут быть записаны в одномерном изотропном приближении, так что уравнения для квазипоперечных волн примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha} - \nu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} \right] = -\frac{f}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости.

В уравнениях (1.6) и (1.7) $R(u_1, u_2)$ – выражение, приведенное в (1.1). Однако в дальнейшем предполагается использовать эти уравнения в системе координат, связанной с УВ, движущейся со скоростью W , близкой к f . Соответствующее преобразование Галилея приводит к замене f на $b = f - W$ в выражении для $R(u_1, u_2)$.

2. Малые возмущения. Для исследования устойчивости УВ необходимо иметь в распоряжении решения линеаризованных уравнений за и перед УВ. Линеаризуем



уравнения (1.6) около однородного состояния $u_\alpha = u_\alpha^0$ и запишем их в виде

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + R_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial u_\beta}{\partial x} = -\frac{1}{2} f \frac{\partial v_\alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \quad (2.1)$$

$$R_{\alpha\beta}^0 = \left(\frac{\partial^2 R(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \right)_{u_\gamma = u_\gamma^0}, \quad v_\alpha = \frac{\partial w_\alpha}{\partial y}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2$$

Уравнения (2.1) получены из уравнений (1.6), которые были проинтегрированы по x с учетом предположения об обращении в нуль производных величин u_α при удалении в бесконечность. При подстановке в (2.1) выражений вида

$$u_\alpha = \hat{u}_\alpha \exp(i(kx + ly - \omega t)) \quad v_\alpha = \hat{v}_\alpha \exp(i(kx + ly - \omega t)) \quad (2.2)$$

из последней пары уравнений (2.1) получим

$$\hat{v}_\alpha = \hat{u}_\alpha l / k \quad (2.3)$$

а из первой пары при учете соотношения (2.3) получим

$$(R_{11} - c)\hat{u}_1 + R_{12}\hat{u}_2 = 0, \quad R_{12}\hat{u}_1 + (R_{22} - c)\hat{u}_2 = 0 \quad (2.4)$$

Здесь введено обозначение

$$c = \frac{\omega}{k} - \frac{f}{2} \frac{l^2}{k^2} \quad (2.5)$$

в результате чего уравнения (2.4) совпадают с уравнениями, описывающими распространение одномерных возмущений. При этом $c = c_{1,2} = c_{1,2} - W$ представляют собой скорости характеристик одномерной системы (1.1), которые находятся из квадратного уравнения, получающегося приравниванием нулю определителя системы (2.4). Эти значения действительны, поскольку матрица $R_{\alpha\beta}$ — симметрическая. Нумерация выбрана так, что $c_1 < c_2$.

Для каждого значения $c = c_{1,2}$ величины $\hat{u}_\alpha$ определяются из (2.4). Эти величины обозначим $u_\alpha^{(1)}$ и $u_\alpha^{(2)}$. Если считать известными l и ω , то два значения k можно найти из квадратного относительно k уравнения (2.5). При этом будем считать, что величины $k_1 \leq k_2$ соответствуют c_1 , а величины $k_3 \leq k_4$ соответствуют c_2 . Величины $\hat{v}_\alpha$

находятся из уравнений (2.3). Таким образом, при заданных l и ω имеем четыре решения вида (2.2). Система уравнений (2.3) и (2.4) определяет 4 собственных вектора $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$, соответствующих значениям k_1, k_2, k_3, k_4 . Компоненты этих собственных векторов u_1, u_2, v_1, v_2 таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_1^{(1)}l/k_i, u_2^{(1)}l/k_i), \quad i = 1, 2 \\ \mathbf{r}_j &= (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_1^{(2)}l/k_j, u_2^{(2)}l/k_j), \quad j = 3, 4 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выясним, какие из этих решений являются приходящими к УВ, а какие уходящими от нее.

Рассмотрим диаграмму скоростей, связав ее со скоростью невозмущенной УВ (фигура). По горизонтальной оси отложены x -компоненты скоростей (нормальные к УВ), а по вертикальной – y -компоненты (касательные к УВ). На вертикальной оси отложено значение ω/l (l и ω считаются здесь действительными). Кроме того, на фигуре изображена диаграмма групповых скоростей малых возмущений (представляющая при $t = 1$ положение фронтов малых возмущений, развившихся из точечного возмущения, расположенного при $t = 0$ в точке O). Эти кривые близки к окружностям с радиусами, близкими к a , и совпадающими с центрами, лежащими в точке $(-U, 0)$.

Для нахождения значений ω/k достаточно провести из точки $(0, \omega/l)$ касательные к диаграммам групповых скоростей. Эти касательные пересекаются с горизонтальной осью в точке $(\omega/k, 0)$. Если рассматриваются волны в области $x < 0$ (за УВ), то приходящими к УВ возмущениями будут те, которые соответствуют точкам (а при заданном значении ω/l – упомянутым выше точкам касания), лежащими правее вертикальной оси на фигуре. Если рассматривается область $x > 0$ (перед УВ), то – наоборот.

На фигуре изображена ситуация за быстрой УВ, когда величина ω/l достаточно велика. В этом случае имеются четыре точки касания, которым соответствуют четыре действительных значения k . Очевидно, что в этой ситуации имеется единственная приходящая волна, которая соответствует s_2 и меньшему значению ω/k , то есть $k = k_4$ (большему из значений k_3, k_4). Таким образом, в рассматриваемом случае уходящие волны соответствуют $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$. Поскольку быстрая ударная волна распространяется по состоянию впереди со скоростью большей обоих значений s , то перед УВ нет уходящих возмущений.

При уменьшении ω/l (эта величина по-прежнему считается действительной) две точки касания, соответствующие s_2 , могут исчезнуть. При этом исчезают 2 действительных значения k (после совпадения этих точек). Это означает (поскольку рассматриваются аналитические зависимости), что появляются два комплексно-сопряженных значения k . Одно из них можно считать соответствующим приходящему возмущению, а другое – уходящему. Уходящее возмущение стремится к нулю на бесконечности, т.е. в случае $x < 0$ для уходящих возмущений имеем $\text{Im } k < 0$. Будем обозначать это значение k_3 . При этом, как и в случае действительных k уходящим от УВ возмущениям будут соответствовать векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Отметим, что разделение на приходящие и уходящие возмущения проводилось при действительных ω , что допустимо вследствие устойчивости однородных решений уравнений (1.6).

3. Граничные условия для возмущений за быстрой ударной волной. Будем считать невозмущенным положением УВ $x = 0$. Пусть возмущенное положение дается уравнением

$$x = \xi(y, t) = \hat{\xi} \exp(i ly - \omega t)$$

где $\hat{\xi}$ – малая величина. В линейном приближении вектор нормали $\mathbf{n}$ и касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ имеют соответственно компоненты $\{1, -i l \hat{\xi}\}$, $\{i l \hat{\xi}, 1\}$. На УВ перемещения w_α

остаются непрерывными, что можно записать в виде равенства нулю производной от скачка перемещения по касательной

$$(i\hat{\xi}[u_\alpha] + [v_\alpha])_{x=\xi} = 0 \quad (3.1)$$

Введем обозначение для скачка производной от w_α по нормали

$$([u_\alpha] - i\hat{\xi}[v_\alpha])_{x=\xi} = a_\alpha \quad (3.2)$$

При записи левых частей равенств (3.1) и (3.2) использовались выражения для компонент векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{\tau}$, а также то, что u_α и v_α — производные от w_α по пространственным координатам.

Из равенства (3.1) видно, что второе слагаемое в левой части равенства (3.2) пропорционально $\hat{\xi}^2$, и поэтому в линейном приближении им можно пренебречь. Поскольку величина $\xi[\partial u_\alpha/\partial x]$ также второго порядка малости, то условие (3.2) может быть записано при $x = 0$ в виде

$$[u_\alpha]_{x=0} = a_\alpha \quad (3.3)$$

По тем же соображениям равенство (3.1) можно считать выполненным при $x = 0$.

Величины a_α могут отличаться от своих невозмущенных значений a_α^0 из-за изменения направления УВ, определяемого величиной $\partial\xi/\partial y = i\hat{\xi}$ и из-за изменения ее скорости $\delta W = \partial\xi/\partial t = -i\omega\hat{\xi}$.

Для получения зависимости a_α от $\partial\xi/\partial y$ рассмотрим решения уравнений (1.7), учитывающих вязкость, в виде наклонной бегущей волны в форме размазанной ступеньки вида $u_\alpha = u_\alpha(\zeta)$, $\zeta = x - \lambda y - Wt$. Величины a_α представляются при этом как разность значений u_α при $\zeta = -\infty$ и $\zeta = \infty$. Из (1.7) получим

$$-Wu_\alpha'' + (\partial R/\partial u_\alpha)'' - \mu u_\alpha''' = -f\lambda^2 u_\alpha''/2 \quad (3.4)$$

Видно, что если ввести новую скорость УВ по формуле $W_1 = W - f\lambda^2/2$, то это уравнение примет вид уравнения для УВ, нормальной оси x , движущейся со скоростью W_1 . Поскольку представляющие интерес значения $\lambda = \partial\xi/\partial y$ бесконечно малы, разницей между W и W_1 можно пренебречь и считать, что малый наклон УВ не приводит в линейном приближении к изменениям величин $[u_\alpha]$. Таким образом, в принятом приближении изменение правой части равенства (3.3) может происходить только за счет изменения скорости W УВ. Если предположить, что перед ударной волной (при $x > 0$) возмущения отсутствуют, то для возмущений величин u_α, v_α при $x = -0$ из равенств (3.3) и (3.1) получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\alpha &= -a'_\alpha i\omega\hat{\xi}, \quad \tilde{v}_\alpha = -a_\alpha^0 i\hat{\xi} \\ a'_\alpha &= \partial a_\alpha / \partial W = \partial u_\alpha / \partial W, \quad a_\alpha^0 = [u_\alpha] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Величины a'_α представляют компоненты вектора, касательного к ударной адиабате, a_α^0 — компоненты вектора, идущего из начальной точки ударной адиабаты в точку, характеризующую состояние за УВ.

4. Условия существования собственной функции. Было показано [9], что неустойчивость разрывов может проявляться только в виде экспоненциально растущих со временем возмущений. Поскольку здесь изучается устойчивость быстрых УВ, уходящие возмущения имеются только за УВ ($x < 0$). Если рассматриваются возмущения вида $\exp(i(\lambda y - \omega t))$, то эти возмущения должны представляться при $x = 0$ линейной

комбинацией собственных векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, представленных формулами (2.6). Эта линейная комбинация должна удовлетворять граничным условиям (3.5). Последнее условие можно сформулировать также, как возможность разложения вектора, представленного равенствами (3.5), по векторам $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ или, иначе, как условие ортогональности вектора (3.5) вектору, ортогональному векторам $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, который обозначим $\mathbf{r}_*$. Воспользовавшись ортогональностью двумерных векторов $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$ и $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}$ (следующей из симметрии матрицы $\|R_{\alpha\beta}\|$), найдем

$$\mathbf{r}_* = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, -u_1^{(2)}k_3/l, -u_2^{(2)}k_3/l) \quad (4.1)$$

Упомянутое выше условие ортогональности векторов (3.5) и (4.1) можно записать в векторном виде

$$(\mathbf{a}^0 - \mathbf{a}'\omega/k_3), \mathbf{u}^{(2)} = 0$$

$$\mathbf{a}^0 = (a_1^0, a_2^0), \quad \mathbf{a}' = (a_1', a_2'), \quad \mathbf{u}^{(2)} = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}) \quad (4.2)$$

(точкой обозначено скалярное произведение). Из этого уравнения определим ω/k_3 , что позволит ниже найти ω , используя соотношение (2.5).

Связь между a_α' и a_α^0 можно получить, продифференцировав соотношения на разрыве (1.2) по W , считая u_α^- постоянными и учитывая, что $W = 0$ для невозмущенной волны. Имеем

$$R_{\alpha\beta}^0 a_\beta' = a_\alpha^0 \quad (4.3)$$

Для упрощения уравнения (4.2) ведем в точке u_1^0, u_2^0 , представляющей состояние из невозмущенной УВ, новую систему координат q_1, q_2 с осями, направленными по собственным векторам матрицы $\|R_{\alpha\beta}^0\|$, соответствующим c_1 и c_2 . Во введенной таким образом системе координат матрица $\|R_{\alpha\beta}^0\|$ будет диагональной со значениями c_1 и c_2 на главной диагонали, вектор $\mathbf{u}^{(2)}$ будет иметь компоненты (0,1), а для компонент A_2' и A_2^0 векторов $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{a}^0$ по оси q_2 из соотношения (4.3) получим

$$c_2 A_2' = A_2^0 \quad (4.4)$$

Уравнение (4.2) дает

$$A_2^0 - A_2'\omega/k_3 = 0$$

Отсюда и из соотношения (4.4) имеем

$$\omega/k_3 = c_2$$

Из равенства (2.5) при этом следует

$$l^2/k_3^2 = 0$$

Это означает, что при $l \neq 0$ невозможно создать собственную функцию представляющую линейную комбинацию уходящих волн. Случай $l = 0$ (одномерный случай) должен рассматриваться отдельно, поскольку ранее предполагалось $l \neq 0$. Одномерные взаимодействия достаточно полно изучены в [3], откуда можно сделать вывод об устойчивости УВ по отношению к линейным возмущениям той же ориентации всюду, за исключением точки Жуге, где $W = C_1$.

Таким образом, быстрые УВ при $W \neq C_1$ оказываются устойчивыми по отношению к произвольным линейным возмущениям.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01150).

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284–291.
2. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. Моск. лицей, 1998. 412 с.
3. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Об условиях распада нелинейной волны в вязкоупругой среде // Журнал выч. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38. № 2. С. 315–323.
4. Чугайнова А.П. О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве // ПММ. 1998. Т. 52. Вып. 4. С. 692–697.
5. Куликовский А.Г. Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597–604.
6. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. 1970. № 4. Т. 192. С. 753–756.
7. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. ж. 1969. Т. 15. № 1. С. 40–47.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М. Наука. 1994. Т. 1. 526 с. Т. 2. 560 с.
9. Егорушкин С.А., Куликовский А.Г. Об устойчивости решений некоторых краевых задач для гиперболических уравнений // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 40–51.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.2000