

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. И.О. Осипов

**ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ
ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД**

Предлагается новый подход к построению функционально-инвариантных решений для динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред. Получены и исследованы решения уравнений движения в смещениях и потенциалах, выражающие плоские волны и волны от точечного источника, а также комплексные решения общего типа. Для сопоставления с более ранними результатами [1] решена задача отражения плоских волн от границы полупространства. Полученные решения согласуются с физическим смыслом задач и с решениями для изотропных сред.

Ранее [1, 2] методом В.И. Смирнова и С.Л. Соболева были получены решения уравнений движения соответственно в смещениях и потенциалах для анизотропных сред с четырьмя и тремя упругими постоянными при определенном ограничении упругих постоянных. Так как в этих работах допущена методологическая неточность при построении решений, полученные решения имеют некоторую несогласованность с физическим смыслом задачи. В данной статье продолжается изучение этих задач тем же методом для анизотропных сред с четырьмя упругими постоянными без каких-либо ограничений на упругие постоянные.

Метод функционально-инвариантных решений В.И. Смирнова и С.Л. Соболева [3–5], основанный на идее приложения теории функций комплексного переменного к решению волновых уравнений, нашел широкое применение для решения ряда важных задач, связанных с распространением нестационарных упругих волн в изотропных средах. Было отмечено [6], что после основополагающих результатов в динамике упругих сред Стокса, Релея, Лэмба и Лява наиболее серьезные исследования принадлежат В.И. Смирнову и С.Л. Соболеву, создавшим новый логически безупречный и математически строгий метод.

Волновые процессы в анизотропных средах сложны и многообразны, принципиально зависят от соотношений упругих постоянных и направлений распространения волн [7–14]. В отличие от изотропных сред уравнения движения анизотропных сред к волновым уравнениям не приводятся, при их интегрировании широкое применение нашли хорошо известные методы из динамики изотропных сред [6], эффективность применения которых зависит от типа задач и класса анизотропных сред.

1. Решения волновых уравнений для изотропной среды. Функционально-инвариантные решения волновых уравнений в случае плоских волн могут быть представлены выражениями [4]

$$\begin{aligned}u_1 &= \theta w_1(\Omega_1), \quad v_1 = \xi_1 w_1(\Omega_1) \\u_2 &= \xi_2 w_2(\Omega_2), \quad v_2 = -\theta w_2(\Omega_2) \\ \Omega_k &= t + \theta x + \xi_k y, \quad k = 1, 2 \\ \xi_1 &= (1/a_0 - \theta^2)^{1/2}, \quad \xi_2 = (1/d_0 - \theta^2)^{1/2}\end{aligned}\tag{1.1}$$

где a_0 и d_0 – квадраты фазовых скоростей продольных ($k = 1$) и поперечных ($k = 2$) волн.

Функции (1.1) на участках

$$0 \leq \theta \leq a_0^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq d_0^{-1/2} \quad (1.2)$$

описывают вещественные продольные и поперечные плоские волны, распространяющиеся в направлениях, определяемых неравенствами

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2 \quad (1.3)$$

где α_1 и α_2 – углы, образованные нормальными к фронтам с осью y . На границах участков (1.2) решения (1.1) имеют значения:

при $\theta = 0$

$$u_1 = 0, \quad v_1 = a_0^{-1/2} w_1(t + a_0^{-1/2} y) \quad (1.4)$$

$$u_2 = d_0^{-1/2} w_2(t + d_0^{-1/2} y), \quad v_2 = 0$$

при $\theta = a_0^{-1/2}$ и $\theta = d_0^{-1/2}$

$$u_1 = a_0^{-1/2} w_1(t + a_0^{-1/2} x), \quad v_1 = 0 \quad (1.5)$$

$$u_2 = 0, \quad v_2 = -d_0^{-1/2} w_2(t + d_0^{-1/2} x)$$

Таким образом, решения (1.1), определенные на участках (1.2), описывают распространение продольных и поперечных плоских волн в направлениях, характеризующихся непрерывно возрастающими углами α_1 и α_2 в интервалах (1.3).

2. Решение уравнений движения для анизотропной среды. Уравнения движения для анизотропных сред с четырьмя упругими постоянными имеют вид [1]

$$\begin{aligned} au_{xx} + du_{yy} + cv_{xy} &= u_{tt} \\ dv_{xx} + bv_{yy} + cu_{xy} &= v_{tt} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отношения упругих постоянных к плотности среды

$$a = c_{11}/\rho, \quad b = c_{22}/\rho, \quad d = c_{66}/\rho, \quad c = (c_{66} + c_{12})/\rho \quad (2.2)$$

удовлетворяют необходимым и достаточным условиям положительной определенности формы упругой энергии

$$a > d, \quad b > d, \quad d > 0, \quad ab - (c - d)^2 > 0 \quad (2.3)$$

которые выполняются для всех реальных сред рассматриваемого класса анизотропии и являются необходимыми и достаточными условиями распространения упругих волн в любых направлениях.

Решение системы уравнений (2.1) выражаем функциями

$$u = U(\Omega), \quad v = V(\Omega) \quad (2.4)$$

где функция Ω определяется в неявном виде уравнением

$$\delta \equiv l(\Omega)t + m(\Omega)x + n(\Omega)y + K(\Omega) = 0 \quad (2.5)$$

Считаем, что U и V – непрерывные дважды дифференцируемые функции, если в них все коэффициенты при переменных величинах вещественные. Если некоторые из них в какой-либо области – комплексные величины, то U и V – аналитические функции в этой области.

Определяя производные функции (2.4) по известным формулам дифференцирования сложных и неявных функций [4] и подставляя их значения в систему уравнений (2.1), получим условия

$$\begin{aligned}(am^2 + dn^2 - l^2)U'(\Omega) + cmnV'(\Omega) &= 0 \\ cmnU'(\Omega) + (dm^2 + bn^2 - l^2)V'(\Omega) &= 0\end{aligned}\quad (2.6)$$

устанавливающие зависимость между функциями (2.4).

Принимаем определитель системы уравнений (2.6) равным нулю

$$\Delta = (am^2 + dn^2 - l^2)(dm^2 + bn^2 - l^2) - c^2 m^2 n^2 = 0 \quad (2.7)$$

Функции (2.4) выражают решение системы уравнений движения (2.1), если аргумент Ω определен уравнением (2.5) с коэффициентами, подчиненными уравнению (2.7), а сами функции удовлетворяют условиям (2.6).

Приняв в выражениях (2.5)–(2.7) значения $l(\Omega) = 1$, $m(\Omega) = \theta$, $n(\Omega) = \lambda$ и $K(\Omega) = -\Omega$, получим простейшие решения системы уравнений (2.1), представляющие собой плоские волны

$$\begin{aligned}u_k &= U_k(\Omega_k), \quad v_k = V_k(\Omega_k) \\ \Omega_k &= t + \theta x + \lambda_k y, \quad k = 1, 2\end{aligned}\quad (2.8)$$

где λ_k – корни уравнения (2.7), представляющие собой функции переменной θ

$$\lambda_k = \{H + (-1)^k [H^2 - (a/b)(1/a - \theta^2)(1/d - \theta^2)]^{1/2}\}^{1/2} \quad (2.9)$$

$$H = [(b+d) - (ab + d^2 - c^2)\theta^2] / (2bd)$$

Функции $U_k(\Omega_k)$ и $V_k(\Omega_k)$ соответствуют корням λ_k и согласно выражениям (2.6) удовлетворяют условиям

$$p_k U'_k(\Omega_k) + c\theta\lambda_k V'_k(\Omega_k) = 0, \quad c\theta\lambda_k U'_k(\Omega_k) + r_k V'_k(\Omega_k) = 0 \quad (2.10)$$

$$p_k = a\theta^2 + d\lambda_k^2 - 1, \quad r_k = d\theta^2 + b\lambda_k^2 - 1,$$

$$p_k r_k = c^2 \theta^2 \lambda_k^2$$

Возникает вопрос, какое из условий (2.10) необходимо выбрать для построения решения. Ранее [1] было выбрано первое условие.

Первое условие (2.10) приводит к решению уравнений движения вида

$$u_k = +c\theta\lambda_k w_k(\Omega_k), \quad v_k = -p_k w_k(\Omega_k) \quad (2.11)$$

второе условие (2.10) – к решению вида

$$u_k = r_k w_k(\Omega_k), \quad v_k = -c\theta\lambda_k w_k(\Omega_k) \quad (2.12)$$

Решения (2.11) имеют значения:

при $\theta = 0$

$$u_1 = 0, \quad v_1 = \frac{b-d}{b} w_1(t + b^{-1/2} y); \quad u_2 = 0, \quad v_2 = 0 \quad (2.13)$$

при $\theta = a^{-1/2}$ ($k=1$) и $\theta = d^{-1/2}$ ($k=2$)

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad v_2 = -\frac{a-d}{d} w_2(t + d^{-1/2} x) \quad (2.14)$$

Решения (2.12) дают значения:
при $\theta = 0$

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad u_2 = \frac{b-d}{d} w_2(t + d^{-1/2}y), \quad v_2 = 0 \quad (2.15)$$

при $\theta = a^{-1/2}(k=1)$ и $\theta = d^{-1/2}(k=2)$

$$u_1 = -\frac{a-d}{a} w_1(t + a^{-1/2}x), \quad v_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad v_2 = 0 \quad (2.16)$$

Из (2.13) – (2.16) следует, что решения (2.11) и (2.12) на границах участков $(0, a^{-1/2})$ и $(0, d^{-1/2})$ имеют разные значения и не согласуются с выражениями (1.4), (1.5) аналогичных решений (1.1) для изотропной среды. При этом каждое из решений (2.11) и (2.12), полученных по одному из двух условий (2.10), определяет в направлениях осей упругой симметрии среды распространение одного типа волн – квазипродольных или квазипоперечных, что не согласуется с физическим смыслом задачи. Это объясняется тем, что отношения компонент векторов смещений $u_k/v_k = -(c\theta\lambda_k)/p_k$ квазипоперечных и квазипродольных волн решений (2.11) при $\theta = 0$ и $\theta = a^{-1/2}$ отношений $u_k/v_k = -r_k/(c\theta\lambda_k)$ квазипродольных и квазипоперечных волн решений (2.12) при $\theta = 0$ и $\theta = d^{-1/2}$ имеют неопределенности вида $0/0$.

Из выражений (2.13)–(2.16) следует, что, суммируя решения (2.11) и (2.12), получим решения системы уравнений (2.1), определяющие распространение квазипродольных и квазипоперечных волн при значениях $\theta = 0$, $\theta = a^{-1/2}(k=1)$ и $\theta = d^{-1/2}(k=2)$. Такие решения можно получить непосредственно с помощью обобщенного условия, устанавливающего зависимость между функциями (2.8).

Просуммировав левые части выражений (2.10), получим обобщенное условие вида

$$(p_k + c\theta\lambda_k)U'_k(\Omega_k) + (r_k + c\theta\lambda_k)V'_k(\Omega_k) = 0 \quad (2.17)$$

Согласно (2.17), решения уравнений движения (2.1), описывающие плоские волны, имеют вид

$$u_k = (r_k + c\theta\lambda_k)w_k(\Omega_k), \quad v_k = -(p_k + c\theta\lambda_k)w_k(\Omega_k) \quad (2.18)$$

$$\Omega_k = t + \theta x + \lambda_k y, \quad k = 1, 2$$

где w_k – произвольные непрерывные дважды дифференцируемые функции, если коэффициенты при переменных величинах вещественные. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области пространства x, y, t – комплексные величины, то w_k – аналитические функции в этой области. Полученные решения удовлетворяют условию (2.17), каждому из условий (2.10) и системе уравнений (2.1), в этом легко убедиться непосредственной подстановкой.

Решения (2.18) при значениях θ , соответствующих распространению волн в направлениях осей y и x , имеют значения:

при $\theta = 0$

$$u_1 = 0, \quad v_1 = \frac{b-d}{b} w_1(t + b^{-1/2}y)$$

$$u_2 = \frac{b-d}{d} w_2(t + d^{-1/2}y), \quad v_2 = 0 \quad (2.19)$$

при $\theta = a^{-1/2} (k=1)$ и $\theta = d^{-1/2} (k=2)$

$$u_1 = -\frac{a-d}{a} w_1(t + a^{-1/2}x), \quad v_1 = 0$$

$$u_2 = 0, \quad v_2 = -\frac{a-d}{d} w_2(t + d^{-1/2}x) \quad (2.20)$$

аналогичные значениям (1.4) и (1.5) для изотропной среды.

При значениях упругих постоянных $b = a, c = a - d$, соответствующих изотропной среде, функции (2.18) переходят с точностью постоянных множителей A и B в решения (1.14) волновых уравнений

$$u_1 = A\theta w_1(\Omega_1), \quad v_1 = A\xi_1 w_1(\Omega_1) \quad (2.21)$$

$$u_2 = B\xi_2 w_2(\Omega_2), \quad v_2 = -B\theta w_2(\Omega_2)$$

$$\Omega_k = t + \theta x + \xi_k y, \quad k = 1, 2$$

Функции λ_1 и λ_2 , представленные выражениями (2.9), – ветви алгебраической функции λ , однозначно определенной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных.

При условии [13]

$$(a-d)b - c^2 > 0 \quad (2.22)$$

точками разветвления для внешних радикалов (2.9) являются точки $\theta_1 = \pm a^{-1/2}$ при $k = 1$ и точки $\theta_2 = \pm d^{-1/2}$ при $k = 2$, для внутренних радикалов – точки θ_i° , которые в зависимости от соотношений упругих постоянных могут быть комплексными, мнимыми и вещественными. Риманова поверхность состоит из плоскостей θ_1 и θ_2 с разрезами $A = (-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $D = (-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$, склеенных крест-накрест вдоль разрезов, соединяющих точки разветвления θ_i° . На фиг. 1 изображена риманова поверхность для случая, когда точки разветвления θ_i° – комплексные попарно сопряженные.

На берегах разрезов A плоскости θ_1 и D плоскости θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения, функции (2.18) выражают вещественные плоские волны: квазипродольные при $k = 1$; квазипоперечные при $k = 2$, распространяющиеся с нормальными скоростями и направлениями движения, определяемыми формулами [12]

$$b_k = (\theta^2 + \lambda_k^2)^{-1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_k = \theta / \lambda_k \quad (2.23)$$

где α_k – углы, образованные нормальными к фронтам волн с осью y . Зафиксировав функции λ_1 и λ_2 на плоскостях θ_1 и θ_2 римановой поверхности так, чтобы они были положительными при $\theta = i\beta$, где β – достаточно малая положительная величина, вещественные решения (2.18) достаточно изучить на верхних берегах разрезов A плоскости θ_1 и D плоскости θ_2 при положительных значениях θ , так как анизотропная среда симметрична относительно осей x и y .

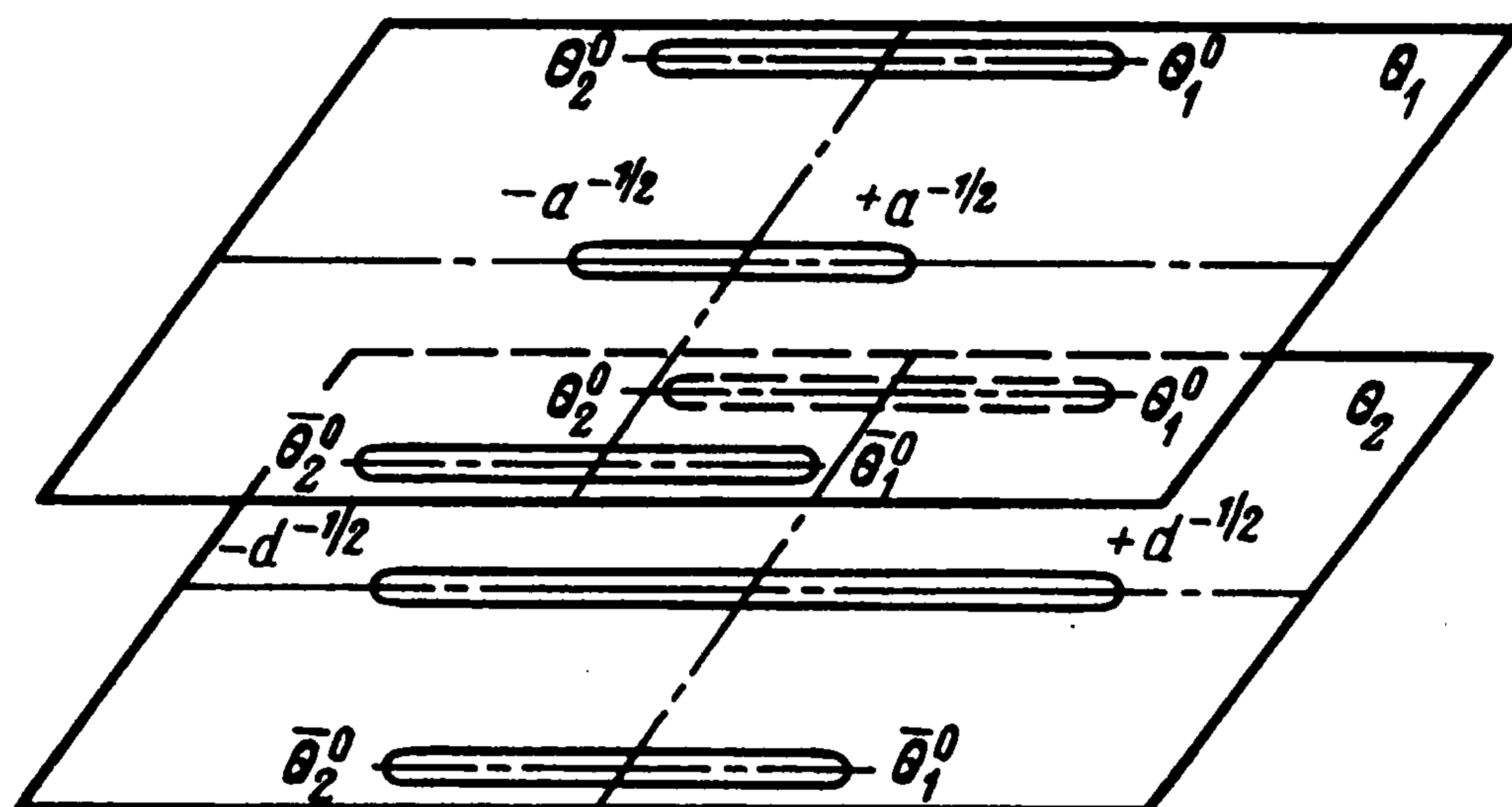
На участках

$$0 \leq \theta \leq a^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq d^{-1/2} \quad (2.24)$$

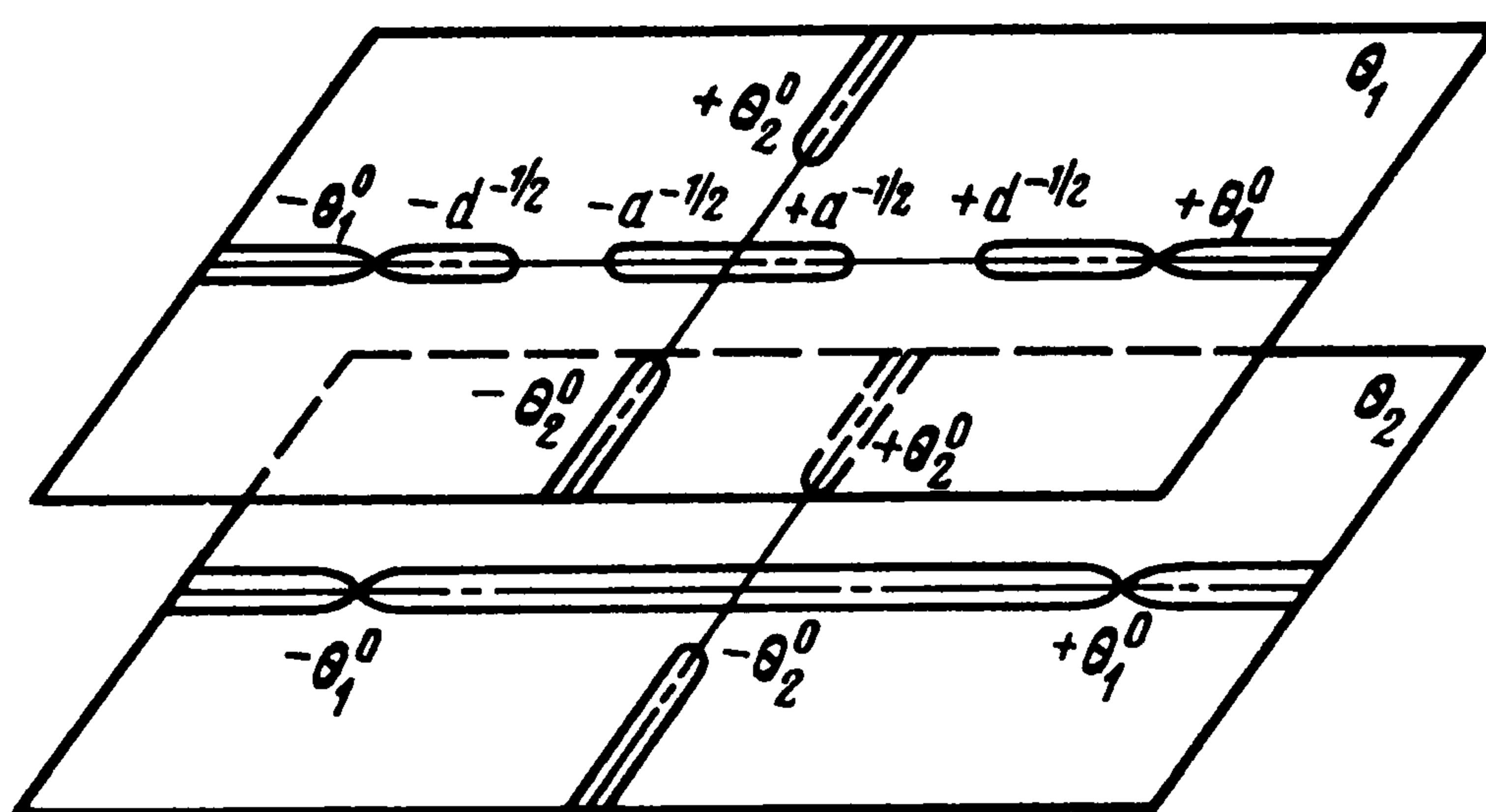
верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 в соответствии с формулами (2.23) функции (2.18) выражают квазипродольные ($k = 1$) и квазипоперечные ($k = 2$) волны, распространяющиеся с непрерывно возрастающими углами α_1 и α_2 в интервалах

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2 \quad (2.25)$$

и с непрерывно изменяющимися нормальными скоростями со значениями на границах



Фиг. 1



Фиг. 2

участков

$$b_1(0) = b^{1/2}, \quad b_1(a^{-1/2}) = a^{-1/2}, \quad b_2(0) = b_2(d^{-1/2}) = d^{1/2} \quad (2.26)$$

В случае выполнения условия

$$(a-d)b - c^2 < 0 \quad (2.27)$$

не рассмотренного в работе [1], риманова поверхность имеет иной вид (фиг. 2). Внешний радикал функции λ_1 имеет четыре точки разветвления: $\theta_1 = \pm a^{-1/2}$ и $\theta_2 = \pm d^{-1/2}$, внешний радикал функции λ_2 не имеет точек разветвления [12]. Из четырех точек разветвления для внутреннего радикала функций λ_1 и λ_2 имеем: две вещественные $\pm\theta_1^0$, две мнимые $\pm\theta_2^0$, причем $\theta_1^0 > d^{-1/2}$. Функция λ_1 однозначна на плоскости θ_1 с разрезами A , $(\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^0)$ и $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ вдоль вещественной оси и с разрезами $(\pm\theta_2^0, \pm i\infty)$ вдоль мнимой оси. Функция λ_2 однозначна на плоскости θ_2 с разрезами $C = (-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ и $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ вдоль вещественной оси и с разрезами $(\pm\theta_2^0, \pm i\infty)$ вдоль мнимой оси. Риманова поверхность состоит из плоскостей θ_1 и θ_2 , склеенных крест-накрест вдоль берегов разрезов $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ и $(\pm\theta_2^0, \pm i\infty)$.

На берегах разрезов A и $(\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^0)$ плоскости θ_1 и C плоскости θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения, функции (2.18) выражают вещественные волны.

На участках

$$0 \leq \theta \leq a^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1^\circ \quad (2.28)$$

верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 функции (2.18) в соответствии с формулами (2.23) выражают квазипродольные ($k = 1$) и квазипоперечные ($k = 2$) волны, распространяющиеся с непрерывно возрастающими углами α_1 и α_2 в интервалах

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^\circ \quad (\alpha_2^\circ < \pi/2) \quad (2.29)$$

и с непрерывно изменяющимися нормальными скоростями со значениями на границах участков [12]

$$b_1(0) = b^{1/2}, \quad b_1(a^{-1/2}) = a^{1/2}, \quad b_2(0) = d^{1/2}, \quad b_2(\theta_1^\circ) < d^{1/2} \quad (2.30)$$

На участке $(+a^{-1/2}, +d^{-1/2})$ плоскости θ_1 функция λ_1 принимает мнимые значения $\lambda_1 = -i\lambda_1^*$, функции (2.18) при $k = 1$ описывают комплексные квазипродольные волны.

$$u_1 = (r_1 - c\theta \cdot i\lambda_1^*)w_1(\Omega_1^*), \quad v_1 = -(p_1 - c\theta \cdot i\lambda_1^*)w_1(\Omega_1^*)$$

$$\Omega_1^* = t + \theta x - i\lambda_1^* y$$

На верхнем берегу разреза $B = (+d^{-1/2}, +\theta_2^\circ)$ плоскости θ_1 функция λ_1 принимает вещественные значения $-\lambda_1$. На участках B верхних берегов разрезов B плоскости θ_1 и C плоскости θ_2 функции (2.18) имеют вид

$$u_1 = (r_1 - c\theta\lambda_1)w_1(\Omega_1^-), \quad v_1 = -(p_1 - c\theta\lambda_1)w_1(\Omega_1^-) \quad (2.31)$$

$$u_2 = (r_2 + c\theta\lambda_2)w_2(\Omega_2^+), \quad v_2 = -(p_2 + c\theta\lambda_2)w_2(\Omega_2^+)$$

$$\Omega_k^\pm = t + \theta x \pm \lambda_k y$$

и описывают вещественные волны.

При обходе по ходу часовой стрелки точки разветвления θ_1° с верхних берегов разрезов C плоскости θ_2 и B плоскости θ_1 на нижние берега разрезов B плоскости θ_1 и C плоскости θ_2 функции λ_2 и λ_1 принимают соответственно значения λ_1 и λ_2 . На нижних берегах разрезов B и C функции (2.31) принимают выражения

$$u_1 = (r_1 + c\theta\lambda_1)w_1(\Omega_1^+), \quad v_1 = -(p_1 + c\theta\lambda_1)w_1(\Omega_1^+) \quad (2.32)$$

$$u_2 = (r_2 - c\theta\lambda_2)w_2(\Omega_2^-), \quad v_2 = -(p_2 - c\theta\lambda_2)w_2(\Omega_2^-)$$

Функции u_2 и v_2 в выражениях (2.31), представляющие квазипоперечные волны, и функции u_1 и v_1 в выражениях (2.32) в точке разветвления θ_1° имеют одинаковые значения. Следовательно, функции (2.18) на участках B верхних и нижних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 римановой поверхности (фиг. 2) описывают только квазипоперечные волны. Эта особенность имеет прямую связь с существованием остроугольных кромок на фронтах квазипоперечных волн от точечного источника [13] при выполнении условия (2.27).

На участке

$$+d^{-1/2} \leq \theta \leq \theta_1^\circ \quad (2.33)$$

нижнего берега разреза плоскости θ_1 функции (2.32) при $k = 1$ описывают квази-

поперечные волны, распространяющиеся в соответствии с формулами (2.23) с непрерывно убывающими углами α_1 и нормальными скоростями b_1 в интервалах

$$\pi/2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_1(\theta_1^\circ) = \alpha_2(\theta_1^\circ), \quad d^{1/2} \geq b_1 \geq b_1(\theta_1^\circ) = b_2(\theta_1^\circ) \quad (2.34)$$

На берегах разрезов $(+\theta_1^\circ, +\infty)$ плоскостей θ_1 и θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют комплексные значения, функции (2.18) описывают комплексные волны.

Таким образом, решения (2.18) уравнений движения (2.1), описывающие плоские волны, в зависимости от условий (2.22) и (2.27) для упругих постоянных однозначно определены на вещественных осях плоскостей θ_1 и θ_2 римановых поверхностей, изображенных на фиг. 1 и фиг. 2, и описывают однозначно распространение волн в любых направлениях.

Комплексные решения общего типа уравнений движения (2.1) получим, приняв в уравнениях (2.5)–(2.7) значения $l(\Omega) = 1$, $n(\Omega) = \lambda$, а за новую переменную – величину $\theta = m(\Omega)$. В этом случае $K(\Omega)$ будет функцией переменной θ , а корни λ_1 и λ_2 уравнения (2.7), определяемые выражениями (2.9) и представляющие собой ветви алгебраической функции λ , однозначно определяются на римановой поверхности (фиг. 1, 2).

Решения (2.8) уравнений (2.1) принимают выражения

$$u_k = U_k(\theta_k), \quad v_k = V_k(\theta_k) \quad (2.35)$$

а уравнение (3.5) принимает вид

$$\delta_k = t + \theta_k x + \lambda_k y + K_k(\theta_k) = 0 \quad (2.36)$$

где K_k – ветви некоторой аналитической функции K .

Обобщенное условие, устанавливающее зависимости между функциями (2.35), принимает вид

$$U'_k(\theta_k)/(r_k + c\theta\lambda_k) = -V'_k(\theta_k)/(p_k + c\theta\lambda_k) = w_k(\theta_k) \quad (2.37)$$

Согласно (2.37), общее вещественное решение уравнений (2.1) выражается функциями

$$u = \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \int_{\theta_k}^{\theta_k} (r_k + c\zeta\lambda_k) w_k(\zeta) d\zeta \quad (2.38)$$

$$v = -\sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \int_{\theta_k}^{\theta_k} (p_k + c\zeta\lambda_k) w_k(\zeta) d\zeta$$

$$\lambda_k = \{H + (-1)^k [H^2 - (a/b)(1/a - \zeta^2)(1/d - \zeta^2)]^{1/2}\}^{1/2}$$

$$H = [(b+d) - (ab + d^2 - c^2)\zeta^2]/(2bd)$$

$$p_k = a\zeta^2 + d\lambda_k^2 - 1, \quad r_k = d\zeta^2 + b\lambda_k^2 - 1$$

Решение (2.38) в зависимости от соотношений упругих постоянных (2.22) и (2.27) однозначно определяется на римановых поверхностях, изображенных на фиг. 1, 2. Соответствие между точками римановой поверхности и точками плоскости xu выражается уравнением (2.36). Функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения на берегах разрезов A плоскости θ_1 и D плоскости θ_2 (фиг. 1) при условии (2.22) и на берегах разрезов A и $(\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^\circ)$ плоскости θ_1 и C плоскости θ_2 (фиг. 2) при условии (2.27). Фронты квазипродольных и квазипоперечных волн (2.38) могут быть получены как

огибающие прямых (2.36) при вещественных значениях θ_k и λ_k . Функции w_1 и w_2 – ветви произвольной аналитической функции w , функции выбираются так, чтобы вещественные части функций w_1 и w_2 обращались в нуль на берегах разрезом плоскостей θ_1 и θ_2 имеющих вещественные значения функций λ_1 и λ_2 .

Однородные нулевого порядка измерения решения уравнений (2.1), выражающие распространение упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника типа мгновенного импульса в начале координат, могут быть получены как частный случай общих решений, если в уравнениях (2.36) положить $K_k(\theta_k) = 0$. В этом случае уравнение (2.36) примет вид

$$1 + \theta_k \zeta + \lambda_k \eta = 0 \quad (\zeta = x/t, \quad \eta = y/t) \quad (2.39)$$

Однородные решения выражаются функциями (2.38) и по виду отличаются от решений, полученных ранее [1].

3. Решение задачи отражения плоских волн на границе анизотропного полупространства. Была решена задача отражения плоских волн на границе анизотропного полупространства с четырьмя упругими постоянными [1] с использованием выражений для плоских волн (2.11), полученных на основе первого условия (2.10) для компонент векторов смещений.

Для сопоставления с этими решениями рассмотрим решение указанной задачи, выражая квазипродольные и квазипоперечные волны функциями (2.18), полученными на основе обобщенного условия (2.17).

Пусть из анизотропного полупространства $y > 0$ падает на свободную от напряжений границу $y = 0$ квазипродольная волна

$$u_1 = U_1(t - \theta x + \lambda_1 y), \quad v_1 = V_1(t - \theta x + \lambda_1 y) \quad (3.1)$$

Согласно соотношениям (2.18), падающую квазипродольную волну и отраженные квазипродольную и квазипоперечную волны выражаем функциями

$$\begin{aligned} u_1 &= \tilde{\phi}_1^\circ w_1(\Omega_1^+), \quad v_1 = -\tilde{\psi}_1^\circ w_1(\Omega_1^+) \\ u_{11} &= \phi_1^\circ A_1 w_1(\Omega_1^-), \quad v_{11} = -\psi_1^\circ A_1 w_1(\Omega_1^-) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$u_{21} = \phi_2^\circ B_1 w_1(\Omega_2^-), \quad v_{21} = -\psi_2^\circ B_1 w_1(\Omega_2^-)$$

$$\Omega_k^\pm = t - \theta x \pm \lambda_k y \quad (k = 1, 2)$$

$$\phi_k^\circ = r_k + c\theta\lambda_k, \quad \psi_k^\circ = p_k + c\theta\lambda_k$$

$$\tilde{\phi}_k^\circ = r_k - c\theta\lambda_k, \quad \tilde{\psi}_k^\circ = p_k - c\theta\lambda_k$$

Подставляя значения $U = u_1 + u_{11} + u_{21}$ и $V = v_1 + v_{11} + v_{21}$ в граничные условия [1]

$$(c - d) \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (y = 0) \quad (3.3)$$

получим систему уравнений

$$[b\lambda_1\psi_1^\circ - (c - d)\theta\phi_1^\circ]A_1 + [b\lambda_2\psi_2^\circ - (c - d)\theta\phi_2^\circ]B_1 = b\lambda_1\tilde{\psi}_1^\circ + (c - d)\theta\tilde{\phi}_1^\circ \quad (3.4)$$

$$[\theta\psi_1^\circ - \lambda_1\phi_1^\circ]A_1 + [\theta\psi_2^\circ - \lambda_2\phi_2^\circ]B_1 = -\theta\tilde{\psi}_1^\circ - \lambda_1\tilde{\phi}_1^\circ$$

Решая систему (3.4) способом определителей, получим

$$A_1 = -(\tilde{\psi}_1^\circ / \psi_1^\circ)A_{11}, \quad B_1 = -(p_2\tilde{\psi}_1^\circ / p_1\psi_2^\circ)A_{21} \quad (3.5)$$

где

$$A_{11} = R^+ / R^-, \quad A_{21} = S(\lambda_1) / Q^- \quad (3.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R^\pm &= (\lambda_1 \pm \lambda_2) \left\{ [ab - (c-d)^2] \theta^2 - b \right\} (1/d - \theta^2)^{1/2} \pm (ab)^{1/2} (1/a - \theta^2)^{1/2} \\ S(\lambda_k) &= 2\lambda_k \{ [ab - c(c-d)] \theta^2 + bd\lambda_k^2 - b \} [a\theta^2 - (c-d)\lambda_k^2 - 1] \\ Q^- &= c(a/b)^{1/2} (1/a - \theta^2)^{1/2} R^- \end{aligned} \quad (3.7)$$

В отличие от имеющихся результатов [1] в значения R^+ , $S(\lambda_1)$ и R^- включены множители $(\lambda_1 + \lambda_2)$, $2\lambda_1$ и $(\lambda_1 - \lambda_2)$.

Подставляя значения (3.5) в выражения (3.2) и учитывая зависимости

$$\phi_k^\circ / \psi_k^\circ = c\theta\lambda_k / p_k, \quad \tilde{\psi}_k^\circ = -p_k \tilde{\phi}_k^\circ / c\theta\lambda_k$$

вытекающие из соотношений (3.2) и (2.10), получим решение задачи отражения квази-продольных волн в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \tilde{\phi}_1^\circ w_1(\Omega_1^+), \quad v_1 = -\tilde{\psi}_1^\circ w_1(\Omega_1^+) \\ u_{11} &= \tilde{\phi}_1^\circ A_{11} w_1(\Omega_1^-), \quad v_{11} = \tilde{\psi}_1^\circ A_{11} w_1(\Omega_1^-) \\ u_{21} &= \tilde{\phi}_1^\circ (\lambda_2 / \lambda_1) A_{21} w_1(\Omega_2^-), \quad v_{21} = \tilde{\psi}_1^\circ (p_2 / p_1) A_{21} w_1(\Omega_2^-) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Учитывая, что падающая квазипродольная волна удовлетворяет условию (2.17), решение (3.8) запишем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1(\Omega_1^+), \quad v_1 = V_1(\Omega_1^+) \\ u_{11} &= A_{11} U_1(\Omega_1^-), \quad v_{11} = -A_{11} V_1(\Omega_1^-) \\ u_{21} &= (\lambda_2 / \lambda_1) A_{21} U_1(\Omega_2^-), \quad v_{21} = -(p_2 / p_1) A_{21} V_1(\Omega_2^-) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Решение задачи отражения квазипоперечных волн строится аналогично и имеет вид

$$\begin{aligned} u_2 &= \tilde{\phi}_2^\circ w_2(\Omega_2^+), \quad v_2 = -\tilde{\psi}_2^\circ w_2(\Omega_2^+) \\ u_{12} &= -\tilde{\phi}_2^\circ (\lambda_1 / \lambda_2) A_{12} w_2(\Omega_1^-), \quad v_{12} = -\tilde{\psi}_2^\circ (p_1 / p_2) A_{12} w_2(\Omega_1^-) \\ u_{22} &= -\tilde{\phi}_2^\circ A_{22} w_2(\Omega_2^-), \quad v_{22} = -\tilde{\psi}_2^\circ A_{22} w_2(\Omega_2^-) \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$A_{12} = S(\lambda_2) / Q^-, \quad A_{22} = R^+ / R^- \quad (3.11)$$

а $S(\lambda_2)$, Q^- и $R^\pm$ определены формулами (3.7). В отличие от имеющихся результатов [1] множители $2\lambda_2$, $(\lambda_1 + \lambda_2)$ и $(\lambda_1 - \lambda_2)$ включены в значения постоянных $S(\lambda_2)$, R^+ и R^- .

Учитывая, что падающая квазипоперечная волна удовлетворяет условию (2.17),

решение (3.10) запишем в виде

$$\begin{aligned} u_2 &= U_2(\Omega_2^+), \quad v_2 = V_2(\Omega_2^+) \\ u_{12} &= -(\lambda_1 / \lambda_2) A_{12} U_2(\Omega_1^-), \quad v_{12} = (p_1 / p_2) A_{12} V_2(\Omega_1^-) \\ u_{22} &= -A_{22} U_2(\Omega_2^-), \quad v_{22} = A_{22} V_2(\Omega_2^-) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решения (3.8) – (3.10), (3.12) однозначно определены на римановых поверхностях, изображенных на фиг. 1 при условии (2.22) и фиг. 2 при условии (2.27) для упругих постоянных. Случай (2.27) ранее [1] не рассматривался.

Решения задач отражения квазипродольных и квазипоперечных волн вида (3.8) и (3.10) отличаются от аналогичных решений, полученных ранее [1], наличием множителей $\tilde{\varphi}_1^\circ$, $\tilde{\psi}_1^\circ$ и $\tilde{\varphi}_2^\circ$, $\tilde{\psi}_2^\circ$. Коэффициенты A_{11} , A_{21} и A_{12} , A_{22} имеют одинаковые значения, так как они определяются граничными условиями.

Квазипродольные и квазипоперечные волны при распространении в направлениях осей симметрии среды y (при $\theta = 0$) и x (при $\theta = a^{-1/2}$ и $\theta = -d^{-1/2}$) переходят в чисто продольные и чисто поперечные волны.

При движении падающих квазипродольных и квазипоперечных волн в направлениях, нормальных к границе среды, и вдоль границы решения (3.8) и (3.10) принимают значения:

решение (3.8) при $\theta = 0$

$$v_1 = (b-d)b^{-1}w_1(t+b^{-1/2}y), \quad v_{11} = (b-d)b^{-1}w_1(t-b^{-1/2}y) \quad (3.13)$$

$$u_1 = u_{11} = u_{21} = v_{21} = 0$$

при $\theta = a^{-1/2}$

$$u_1 = -(a-d)a^{-1}w_1(t-\theta x), \quad u_{11} = (a-d)a^{-1}w_1(t-\theta x) \quad (3.14)$$

$$v_1 = v_{11} = u_{21} = v_{21} = 0$$

решение (3.10) при $\theta = 0$

$$u_2 = (b-d)d^{-1}w_2(t+d^{-1/2}y), \quad u_{22} = (b-d)d^{-1}w_2(t-d^{-1/2}y) \quad (3.15)$$

$$v_2 = u_{12} = v_{12} = v_{22} = 0$$

при $\theta = d^{-1/2}$

$$v_2 = (a-d)d^{-1}w_2(t-d^{-1/2}x), \quad v_{22} = -(a-d)d^{-1}w_2(t-d^{-1/2}x) \quad (3.16)$$

$$u_2 = u_{22} = u_{12} = v_{12} = 0$$

Полученные значения (3.13)–(3.16) согласуются с соответствующими значениями в аналогичной задаче для изотропного полупространства [15].

При значениях упругих постоянных $b = a$, $c = a - d$ решения (3.8) и (3.10) переходят в решения аналогичной задачи для изотропного полупространства [4].

Сравним решения задач отражения квазипродольных и квазипоперечных волн в форме (3.9) и (3.12) с аналогичными решениями, полученными ранее [1]. Подставляя в решения (3.9) значения (3.6), получим решения (43) и (44) из [1]. Учитывая, что в работе [1] $A = -A_{11}$, $B = -A_{21}$, решение задачи отражения квазипродольных волн (43), (44) приводится к виду (3.9). Аналогично убеждаемся, что решение задачи от-

ражения квазипоперечных волн из [1] приводится к виду (3.12), коэффициенты интенсивности имеют одинаковые значения, так как они определяются граничными условиями.

Таким образом, решения (3.9) и (3.12) по внешнему виду совпадают с аналогичными решениями, полученными ранее [1], с тем лишь различием, что зависимость между функциями U_j и V_j в решениях (3.9) и (3.12) устанавливается обобщенным условием (2.17), а в решениях из [1] – первым условием (2.10).

Сопоставляя решения (3.9) и (3.8), а также (3.12) и (3.10), получим

$$U_j(\Omega_k^\pm) = \tilde{\phi}_j^\circ w_j(\Omega_k^\pm), \quad V_j(\Omega_k^\pm) = -\tilde{\psi}_j^\circ w_j(\Omega_k^\pm), \quad j = 1, 2 \quad (3.17)$$

Из (3.17) на основании результатов анализа решений (2.18) уравнений движения (2.1) следует, что решения (3.9) и (3.12) согласуются с решениями аналогичной задачи для изотропной среды.

В решениях, полученных ранее [1], функции U_j и V_j имеют следующие значения:

$$U_j(\Omega_k^\pm) = c\theta\lambda_j w_j(\Omega_k^\pm), \quad V_j(\Omega_k^\pm) = p_j w_j(\Omega_k^\pm), \quad j = 1, 2 \quad (3.18)$$

Согласно результатам анализа решений (2.11), полученных на основе первого условия (2.10), из (3.18) следует, что решения задачи отражения [1], выраженные через функции U_j и V_j , не согласуются с решениями аналогичной задачи для изотропной среды при рассмотрении падающих волн в направлениях осей упругой симметрии среды.

Отметим, что если в решениях [1] принять, что функции U_j и V_j удовлетворяют обобщенному условию (2.17), то функции U_j и V_j будут принимать значения (3.17), а сами решения будут совпадать с решениями (3.9) и (3.12), поскольку коэффициенты интенсивности в них имеют одинаковые значения. В этом можно убедиться, подставляя значения (3.17) в решения, полученные ранее [1]. В результате будем иметь решения (3.8) и (3.10), равносильные решениям (3.9) и (3.12).

4. Уравнения движения в потенциалах и их решение. Произвольное векторное поле может быть представлено в виде суммы безвихревого и соленоидального полей. Введя потенциалы безвихревого и соленоидального возмущений по формулам [2]

$$u = \phi_x + \psi_y, \quad v = \phi_y - \psi_x \quad (4.1)$$

получим уравнения движения (2.1) в потенциалах

$$\left[a\phi_{xx} + (d+c)\phi_{yy} - \phi_{tt} \right]_x + \left[(a-c)\psi_{xx} + d\psi_{yy} - \psi_{tt} \right]_y = 0 \quad (4.2)$$

$$\left[(d+c)\phi_{xx} + b\phi_{yy} - \phi_{tt} \right]_y - \left[d\psi_{xx} + (b-c)\psi_{yy} - \psi_{tt} \right]_x = 0$$

Выражаем решение системы уравнений (4.2) функциями

$$\phi = \Phi(\Omega), \quad \psi = \Psi(\Omega) \quad (4.3)$$

функция Ω определяется в неявном виде уравнением (2.5). Под Φ и Ψ понимаются непрерывные трижды дифференцируемые функции, если в них коэффициенты при переменных величинах вещественные. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области пространства x, y, t – комплексные величины, то Φ и Ψ в этой области – аналитические функции.

Выражая производные функции (4.3) по обычным правилам дифференцирования сложных и неявных функций [2] и подставляя их значения в уравнения (4.2), получим

условия

$$\begin{aligned} m[am^2 + (d+c)n^2 - l^2]\Phi' + n[(a-c)m^2 + dn^2 - l^2]\Psi' &= 0 \\ n[(d+c)m^2 + bn^2 - l^2]\Phi' - m[dm^2 + (b-c)n^2 - l^2]\Psi' &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

устанавливающие зависимость между функциями (4.3). Если функции (4.3) удовлетворяют условиям (4.4), то они удовлетворяют и системе уравнений (4.2).

Система линейных уравнений (4.4) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{aligned} m^2[am^2 + (d+c)n^2 - l^2][dm^2 + (b-c)n^2 - l^2] + \\ + n^2[(a-c)m^2 + dn^2 - l^2][(d+c)m^2 + bn^2 - l^2] = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) устанавливает зависимость между функциями $l(\Omega)$, $m(\Omega)$, $n(\Omega)$, а также между производными $\Phi'(\Omega)$ и $\Psi'(\Omega)$ согласно условиям (4.4).

Следовательно, функции (4.3) выражают решение уравнений движения в потенциалах (4.2), если аргумент Ω с коэффициентами l , m , n , подчиненными уравнению (4.5), определен уравнением (2.5), а сами функции (4.3) удовлетворяют условиям (4.4).

Приняв в уравнении (2.5) значения $l(\Omega) = 1$, $m(\Omega) = \theta$, $n(\Omega) = \lambda$ и $K(\Omega) = -\Omega$, получим простейшие решения уравнений движения (4.2). В этом случае корни λ_k уравнения (4.5) имеют значения (2.9).

Введя функции $\Phi_k(\Omega_k)$ и $\Psi_k(\Omega_k)$, соответствующие корням λ_k , заключаем, что решения уравнений (4.2), описывающие плоские волны, выражаются функциями

$$\varphi_k = \Phi_k(\Omega_k), \quad \psi_k = \Psi_k(\Omega_k) \quad \Omega_k = t + \theta x + \lambda_k y, \quad k = 1, 2 \quad (4.6)$$

Условия (4.4) принимают вид

$$\begin{aligned} -\theta(p_k + c\lambda_k^2)\Phi'_k(\Omega_k) + \lambda_k(p_k - c\theta^2)\Psi'_k(\Omega_k) &= 0 \\ \lambda_k(r_k + c\theta^2)\Phi'_k(\Omega_k) + \theta(r_k - c\lambda_k^2)\Psi'_k(\Omega_k) &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

и устанавливают зависимость между функциями (4.6).

Ранее [2] для построения решения в потенциалах использовалось первое условие (4.7). В этом случае зависимость между функциями (4.6) выражается условием

$$-\frac{\Phi_k(\Omega_k)}{\lambda_k(p_k - c\theta^2)} = \frac{\Psi_k(\Omega_k)}{\theta(p_k + c\lambda_k^2)} = f_k(\Omega_k) \quad (4.8)$$

Решение (4.6) принимает вид

$$\varphi_k = -\lambda_k(p_k - c\theta^2)f_k(\Omega_k), \quad \psi_k = \theta(p_k + c\lambda_k^2)f_k(\Omega_k) \quad (4.9)$$

Учитывая соотношения (4.1), получим решение уравнений (4.2) в смещениях

$$u_k = c\theta\lambda_k(\theta^2 + \lambda_k^2)f'_k(\Omega_k), \quad v_k = -p_k(\theta^2 + \lambda_k^2)f'_k(\Omega_k) \quad (4.10)$$

Аналогично второе условие (4.7) приводит к решению уравнений (4.2)

$$\varphi_k = \theta(r_k - c\lambda_k^2)f_k(\Omega_k), \quad \psi_k = \lambda_k(r_k + c\theta^2)f_k(\Omega_k) \quad (4.11)$$

Решение в смещениях имеет вид

$$u_k = r_k(\theta^2 + \lambda_k^2)f'_k(\Omega_k), \quad v_k = -c\theta\lambda_k(\theta^2 + \lambda_k^2)f'_k(\Omega_k) \quad (4.12)$$

Решения (4.10) и (4.12) с точностью до множителя $(\theta^2 + \lambda_k^2) \neq 0$ совпадают с решениями (2.11) и (2.12) уравнений движения (2.1), полученными по одному из двух условий (2.10). Следовательно, решения (4.9)–(4.12) уравнений движения в потенциалах (4.2), полученные по одному из двух условий (4.7), не согласуются с физическим смыслом задачи и с решениями (1.1) для изотропной среды. Из соотношений (4.10), (4.12) и (2.18) следует, что решения уравнений движения в потенциалах (4.2) могут быть получены как сумма решений (4.9) и (4.11).

Такие решения могут быть получены с помощью обобщенного условия, полученного суммированием условий (4.7),

$$\left[\lambda_k (r_k + c\theta^2) + \theta (p_k + c\lambda_k^2) \right] \Phi'_k(\Omega_k) + \left[\lambda_k (p_k - c\theta^2) - \theta (r_k - c\lambda_k^2) \right] \Psi'_k(\Omega_k) = 0 \quad (4.13)$$

Согласно условию (4.13), решения уравнений (4.2), описывающие плоские волны, принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi_k &= - \left[\lambda_k (p_k - c\theta^2) - \theta (r_k - c\lambda_k^2) \right] f_k(\Omega_k) \\ \psi_k &= \left[\theta (p_k + c\lambda_k^2) + \lambda_k (r_k + c\theta^2) \right] f_k(\Omega_k) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\Omega_k = t + \theta x + \lambda_k y, \quad k = 1, 2$$

где f_k – ветви произвольной непрерывной трижды дифференцируемой функции f , если коэффициенты при переменных величинах вещественные. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области x, y, t – комплексные величины, то f в этой области – аналитическая функция. Решения (4.14), как и решения (2.18), однозначно определяются на римановых поверхностях, вид которых изображен на фиг. 1 и 2.

Рассмотрим построение комплексных решений общего типа для уравнений движения в потенциалах (4.2), приняв в уравнении (2.5) значения $l(\Omega) = 1$, $n(\Omega) = \lambda$, а за новую переменную – величину θ , определенную выражением $m(\Omega) = \theta$. В этом случае λ и $K(\Omega)$ будут функциями переменной θ , а уравнение (2.7) будет иметь корни λ_1 и λ_2 , определяемые выражениями (2.9).

Решения (4.3) уравнений движения (4.2) выражаются функциями

$$\varphi_k = \Phi_k(\theta_k), \quad \psi_k = \Psi_k(\theta_k) \quad (4.15)$$

а уравнение (2.5) имеет вид

$$\delta_k = t + \theta_k x + \lambda_k y + K_k(\theta_k) = 0 \quad (4.16)$$

где K_k – ветви некоторой аналитической функции K .

Условия, устанавливающие зависимости между функциями (4.15), согласно соотношениям (4.4), выражаются уравнениями, суммируя которые, получим обобщенное условие, отличающееся от условия (4.13) заменой θ и Ω_k на θ_k .

Согласно этому обобщенному условию, общее вещественное решение уравнений (4.2) определяется выражениями

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) &= - \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\theta_k}^{\theta_k} \left[\lambda_k (p_k - c\varsigma^2) - \varsigma (r_k - c\lambda_k^2) \right] w_k(\varsigma) d\varsigma \right\} \\ \psi(x, y, t) &= \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\theta_k}^{\theta_k} \left[\lambda_k (r_k + c\varsigma^2) + \varsigma (p_k + c\lambda_k^2) \right] w_k(\varsigma) d\varsigma \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Соответствие между точками римановой поверхности (фиг. 1, 2) и точками плоскости xu выражается уравнением (4.16).

Однородные нулевого измерения решения уравнений движения (4.2), описывающие упругие колебания, индуцируемые точечным источником типа мгновенного импульса в начале координат, могут быть получены как частный случай найденных общих решений, если принять в уравнении (4.16) значение $K_k(\theta_k) = 0$. В этом случае уравнение (4.16), выражающее соответствие между точками римановой поверхности и плоскости xu , принимает вид

$$1 + \theta_k \xi + \lambda_k \eta = 0 \quad (\xi = x/t, \quad \eta = y/t) \quad (4.18)$$

Однородные решения уравнений движения (4.2) выражаются функциями (4.17).

Функции w_1 и w_2 представляют собой ветви произвольной аналитической функции w , однозначно определенной на римановой поверхности, изображенной на фиг. 1 при выполнении условия (2.22), на фиг. 2 – при условии (2.27). Чтобы решение (4.19) выражало упругие колебания, индуцируемые точечным источником в безграничной среде, необходимо функцию w выбирать так, чтобы вещественные части функций w_1 и w_2 обращались в нуль на следующих берегах разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 вещественного определения функций λ_1 и λ_2 : при условии (2.22) – на берегах разрезов $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ плоскости θ_1 и $(-a^{-1/2}, +d^{-1/2})$ плоскости θ_2 (фиг. 1); при условии (2.27) – на берегах разрезов $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $(\pm d^{-1/2}, \pm \theta_1^\circ)$ плоскости θ_1 и $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$ плоскости θ_2 (фиг. 2). Берегам этих разрезов отвечают на плоскости ξ, η фронты волн [12, 13], которые выражаются как огибающие прямых (4.18) при вещественных значениях θ_k и λ_k .

5. Заключение. Отметим, что при применении метода В.И. Смирнова и С.Л. Соболева для решения уравнений движения в смещениях (2.1) и потенциалах (4.2) приходим к условиям (2.6) и (4.4) для компонент векторов смещений и для скалярных и векторных потенциалов.

Для плоских волн условия (2.6) и (4.4) принимают вид (2.10) и (4.7). Установлено, что решения (2.11) и (2.12) уравнений движения в смещениях, полученные, как и ранее [1], на основе одного из двух условий (2.10), определяют в направлениях осей упругой симметрии среды распространение только одного типа волн – квазипродольных или квазипоперечных, что не согласуется с физическим смыслом задачи и с решениями волновых уравнений изотропных сред. Аналогичную картину имеем для решений (4.9) и (4.11) уравнений движения в потенциалах, полученных, как и ранее [2], на основе одного из двух условий (4.7).

Установлено, что решения уравнений движения в смещениях и потенциалах, полученные как суммы решений (2.11), (2.12) и (4.9), (4.11), согласуются с физическим смыслом задачи и с решениями волновых уравнений изотропных сред. Такие решения в смещениях и потенциалах можно получить непосредственно из обобщенных условий (2.17) и (4.13), которые следуют из условий (2.10) и (4.7).

Предлагается новый способ построения решений уравнений движения (2.1) и (4.2) с помощью обобщенных условий для компонент векторов смещений и для скалярных и векторных потенциалов, полученных из условий (2.6) и (4.4). Получены и исследованы решения уравнений движения в смещениях и потенциалах, выражающие плоские волны и волны от точечных источников, а также комплексные решения общего типа. Для сопоставления с результатами [1] решена задача отражения плоских волн от свободной границы анизотропного полупространства.

Несмотря на некоторую сложность решений, выражение их через обратные кажущиеся скорости в направлениях осей упругой симметрии и однозначное определение

на римановых поверхностях (фиг. 1, 2) позволяет применять их для решения ряда конкретных задач и производить аналитические исследования достаточно сложных волновых процессов в анизотропных средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свекло В.А. Упругие колебания анизотропного тела // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1949. Вып. 17. С. 28–71.
2. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 885–896.
3. Смирнов В.И., Соболев С.Л. // Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. 1932. № 20. 37 с.
4. Соболев С.Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний // Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.: ОНТИ, 1937. Ч. 2. С. 468–617.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. Л.; М.: Гостехиздат, 1953. 676 с.
6. Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Л.: Наука, 1982. 289 с.
7. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
8. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.
9. Осипов И.О. Отражение и преломление плоских волн на границе жидкости и аномальной анизотропной среды // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 210–221.
10. Осипов И.О. К распространению плоских волн в анизотропной среде, контактирующей с жидкостью // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 85–99.
11. Каштан Б.М., Ковтун А.А., Петрашень Г.И. Алгоритмы и методы вычисления полей объемных волн в произвольных анизотропных упругих средах // Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1984. С. 108–247.
12. Осипов И.О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 548–555.
13. Осипов И.О. О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 927–934.
14. Осипов И.О. Характер изменения скоростей распространения упругих волн в анизотропных средах // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 1. С. 3–10.
15. Саваренский Е.Ф., Кирнос Д.П. Элементы сейсмологии и сейсмометрии. М.: Гостехиздат, 1955. 544 с.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
22.II.1999