

УДК 531.36:62-50

© 2000 г. Г.А. Леонов

### ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ УГЛОВОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ

Рассматривается двумерная динамическая система с угловой координатой, описывающая работу двухпозиционного авторулевого, плоские вращения космического аппарата, управляемого системой угловой ориентации, и систему фазовой автоподстройки частоты с пропорционально-интегрирующим фильтром. Получен аналог теоремы Барбашина – Красовского для дифференциальных включений с угловыми координатами. На ее основе доказана глобальная устойчивость двумерных систем угловой ориентации при отсутствии внешнего силового момента. Показано, что при наличии постоянного внешнего силового момента в фазовом пространстве существует область начальных условий, которая соответствует круговым движениям космического аппарата.

Классическим примером двумерной системы управления угловой ориентацией является двухпозиционный авторулевой [1]. В традиционно принятой идеализации уравнения такой системы имеют вид

$$I\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} = M(\sigma) + M_0, \quad \sigma = \theta + b\dot{\theta} \quad (1)$$

Здесь  $\theta$  – отклонение судна от заданного курса,  $I$  – момент инерции судна,  $\alpha$  – коэффициент вязкого трения,  $M(\sigma)$  – момент сил, создаваемый рулем,  $M_0$  – момент внешних сил, который предполагается здесь постоянным,  $\sigma$  – сигнал управления, подаваемый на рулевую машинку.

В двухпозиционном авторулевом  $M(\sigma)$  –  $2\pi$ -периодическая функция, график которой изображен на фиг. 1.

Здесь  $M(-0) = -M(+0)$  и в точках разрыва  $\sigma = k\pi$  значениями функции  $M(\sigma)$  являются промежутки  $[M(2k\pi + 0), M(2k\pi - 0)]$  или  $[M((2k + 1)\pi - 0), M((2k + 1)\pi + 0)]$ . В этом случае решение системы (1) определяется как решение дифференциального включения [2]

$$I\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} \in M(\sigma) + M_0, \quad \sigma = \theta + b\dot{\theta}$$

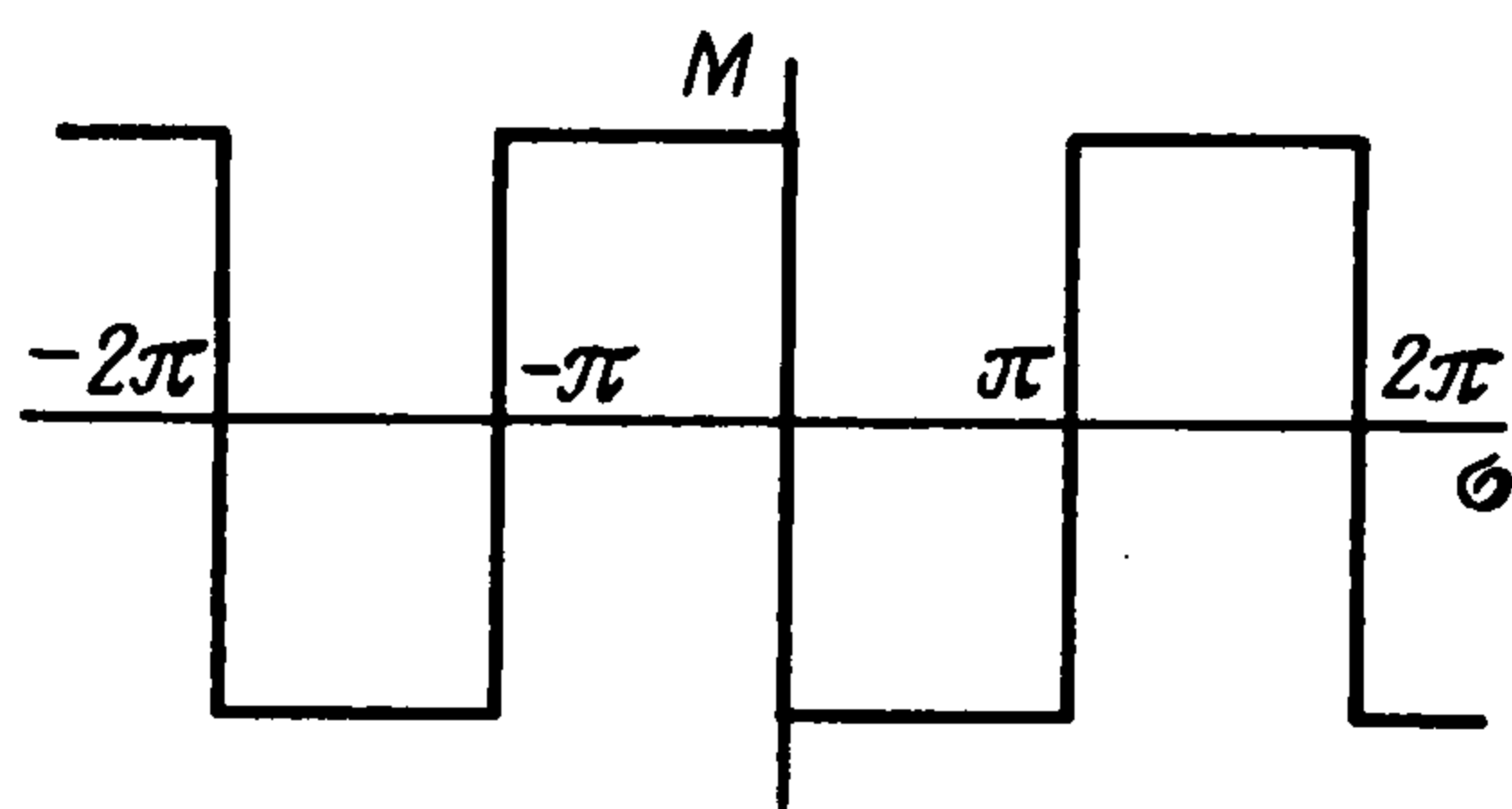
либо по А.Ф. Филиппову [3, 4]. Оба этих определения для системы (1) дают одинаковые решения, которые совпадают с фазовыми портретами, рассмотренными ранее [1].

Уравнениями (1) описываются также плоские вращения космического аппарата, управляемого системой угловой ориентации [5]. Поскольку движение происходит в космическом пространстве,  $\alpha = 0$ , а относительно управляющего момента  $M(\sigma)$ , который создается реактивными двигателями, предполагается, что имеется зона нечувствительности  $[-\Delta, \Delta]$ . График  $M(\sigma)$  в этом случае представлен на фиг. 2 и отличается наличием зон нечувствительности.

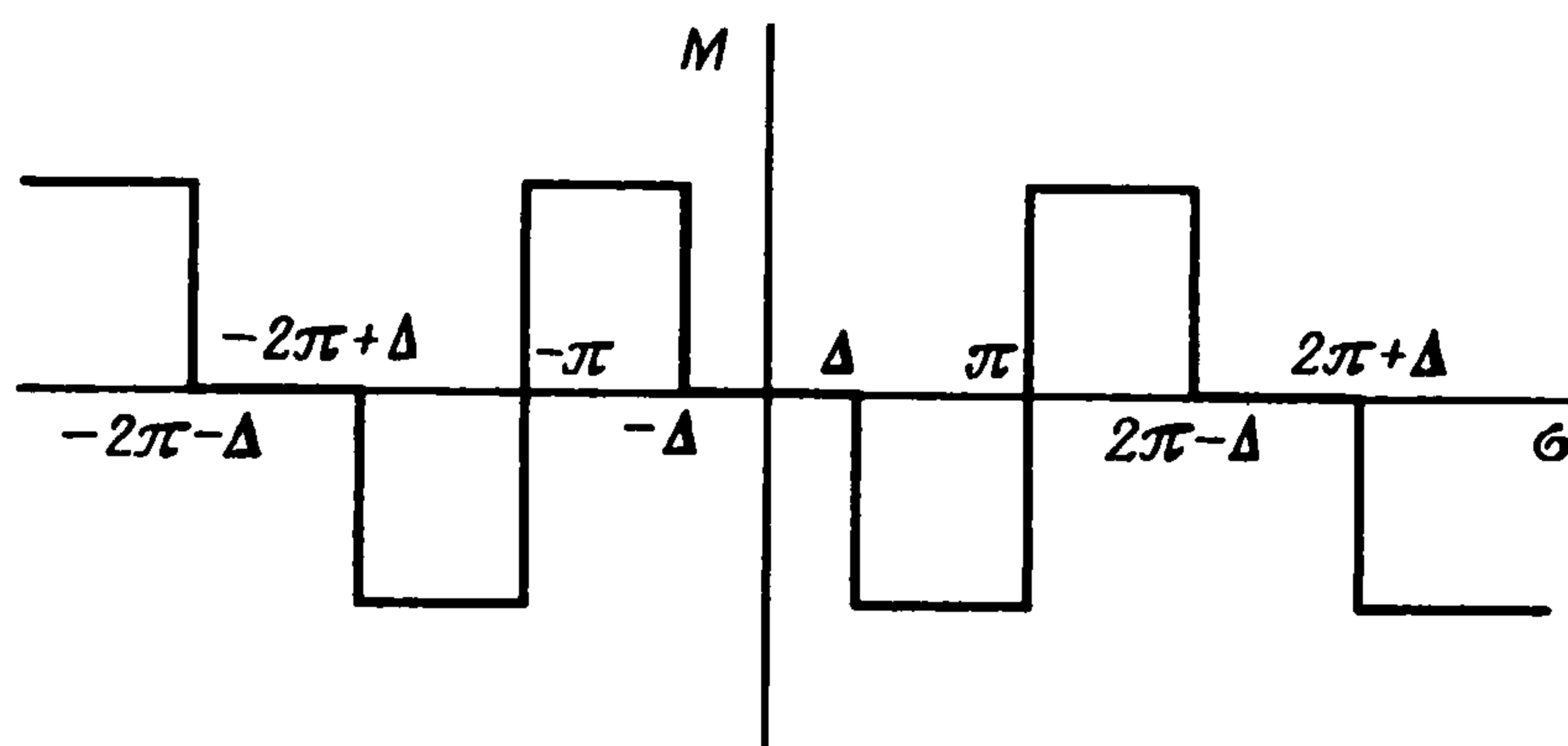
Сделав замену  $\eta = \dot{\theta}$ , приведем систему (1) к виду

$$\dot{\eta} = -a\eta - f(\sigma), \quad \dot{\sigma} = \beta\eta - bf(\sigma) \quad (2)$$

$$a = \frac{\alpha}{I}, \quad \beta = 1 - ab, \quad f(\sigma) = \varphi(\sigma) - \gamma, \quad \varphi(\sigma) = -\frac{M(\sigma)}{I}, \quad \gamma = \frac{M_0}{I}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Таким образом, параметры системы (2) удовлетворяют условиям  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $\beta = 1 - ab$ ,  $\gamma \geq 0$ . Будем также полагать, что  $\beta \neq 0$ .

Заметим, что при  $a > 0$  и  $\Delta = 0$  система (2) описывает также динамику систем фазовой синхронизации с пропорционально-интегрирующим фильтром и релейной характеристикой фазового детектора [6–8]. Детальное исследование такой системы показало [9], что существует некоторая положительная функция  $\Psi(a, b)$ , обладающая следующим свойством: при  $\gamma < \Psi(a, b)$  любое решение системы (2) стремится к некоторому состоянию равновесия; при  $\gamma > \Psi(a, b)$  и  $\gamma < 1$  существуют как решения, стремящиеся к состояниям равновесия, так и решения, соответствующие круговым движениям (для авторулевого – это бесконечное вращение судна вокруг центра тяжести, в таком случае система управления не может сдмпфировать внешний силовой момент). С помощью компьютерных вычислений были приближенно вычислены значения  $\Psi(a, b)$  [9].

Ниже будет показано, что совершенно другая ситуация возникает при  $a = 0$ . Здесь при  $\gamma = 0$  все решения стремятся к стационарному множеству. Однако при любом  $\gamma > 0$  существуют решения, соответствующие круговым движениям космического аппарата.

Рассмотрим систему (2) с  $\Delta \geq 0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\gamma = 0$ . Тогда любое решение системы (2) стремится к некоторому состоянию равновесия.

**Теорема 2.** Пусть  $\gamma > 0$  и  $a = 0$ . Тогда существуют положительное число  $\varepsilon$  и решение  $\eta(t)$ ,  $\sigma(t)$  системы (2) такие, что

$$\eta(t) \geq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

Напомним, что из неравенства (3) следует, что  $\dot{\theta}(t) \geq \varepsilon > 0$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Для доказательства теоремы 1 потребуется формулировка леммы ляпуновского типа для дифференциальных включений

$$\dot{x} \in f(x), \quad x \in R^n \quad (4)$$

где  $f(x)$  – полунепрерывная вектор-функция, отображающая каждую точку  $x \in R^n$  в ограниченное замкнутое выпуклое множество  $f(x)$ .

Напомним определения используемых здесь терминов [2].

**Определение 1.** Будем говорить, что множество  $U_\varepsilon(\Omega)$  является  $\varepsilon$ -окрестностью множества  $\Omega$ , если

$$U_\varepsilon(\Omega) = \left\{ x \mid \inf_{y \in \Omega} |x - y| < \varepsilon \right\}$$

Здесь  $|\cdot|$  – евклидова норма в  $R^n$ .

**Определение 2.** Функция  $f(x)$  называется полунепрерывной в точке  $x$ , если по любому  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta(x, \varepsilon) > 0$ , что

$$f(y) \subset U_\varepsilon(f(x)), \quad \forall y \in U_\delta(x)$$

**Определение 3.** Вектор-функция  $x(t)$  называется решением дифференциального включения (4), если она абсолютно непрерывна и для значений  $t$ , для которых существует производная  $\dot{x}$ , выполняется включение

$$\dot{x} \in f(x(t))$$

Для дифференциальных включений (4) в сделанных здесь предположениях справедлива локальная теорема существования решения задачи Коши и следующая теорема о продолжимости решений: если при  $t \geq 0$  для решений  $x(t)$  интервал  $[0, T)$  является максимальным интервалом определения  $x(t)$ , то существует последовательность  $t_k \in [0, T)$ ,  $t_k \rightarrow T$  при  $k \rightarrow \infty$  такая, что  $x(t_k) \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Эти теоремы доказаны ранее [2].

Предположим теперь, что для линейно независимых векторов  $d_1, \dots, d_m$  выполнены равенства

$$f(x + d_j) = f(x), \quad \forall x \in R^n \quad (5)$$

Ясно, что из условий (5) вытекает очевидное свойство.

**Предложение 1.** Если  $x(t)$  – решение включения (4), то для любого целого  $k$  сумма  $x(t) + kd_j$  – также решение включения (4).

Введем в рассмотрение дискретную группу

$$\Gamma = \left\{ x = \sum_{j=1}^m k_j d_j \mid k_j \in Z, \quad j = 1, \dots, m \right\}$$

Здесь  $Z$  – множество целых чисел.

Рассмотрим фактор-группу  $R^n/\Gamma$ , элементы которой – классы вычетов  $[x] \in R^n/\Gamma$ . Они определяются следующим образом:  $[x] = \{x + u \mid u \in \Gamma\}$ . Введем так называемую плоскую метрику

$$\rho([x], [y]) = \inf_{z \in [x], v \in [y]} |z - v| \quad (6)$$

Из предложения 1 следует, что введенное таким образом метрическое пространство  $R^n/\Gamma$  является фазовым пространством для включения (4), т.е. оно разбивается на непересекающиеся траектории включения (4).

**Определение 4.** Точка  $[p] \in R^n/\Gamma$  называется  $\omega$ -предельной точкой траектории  $[x(t)]$ , если существует последовательность  $t_k \rightarrow +\infty$  такая, что

$$[p] = \lim [x(t_k)] \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

Сходимость здесь понимается в смысле метрики  $\rho([x], [y])$ .

**Лемма.** Пусть  $\omega$ -предельное множество  $\Omega$  траектории  $[x(t)]$  ограничено. Тогда через каждую  $\omega$ -предельную точку  $\Omega$  проходит хотя бы одна траектория  $[y(t)]$ , определенная при  $t \in R^1$  и целиком состоящая из  $\omega$ -предельных точек  $\Omega$ , т.е.

$$[y(t)] \in \Omega, \quad \forall t \in R^1$$

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство теоремы 2.2.5 [2] с заменой евклидовой метрики на метрику (6).

Следующая теорема является распространением известной теоремы Барбашина – Красовского [10] на дифференциальные включения, имеющие фазовое пространство  $R^n/\Gamma$ . Она обобщает аналогичные результаты, сформулированные ранее [11, 12].

**Теорема 3.** Пусть существует такая непрерывная функция  $V(x): R^n \rightarrow R^1$ , что выполнены следующие условия:

$$1) V(x+d) = V(x), \quad \forall x \in R^n, \forall d \in \Gamma;$$

$$2) V(x) + \sum_{j=1}^m (d_j^* x)^2 \rightarrow \infty \text{ при } |x| \rightarrow \infty;$$

3) для любого решения  $x(t)$  включения (4) функция  $V(x(t))$  – невозрастающая;

4) если  $V(x(t)) \equiv V(x(0))$ , то  $x(t)$  – состояние равновесия.

Тогда любое решение включения (4) стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к стационарному множеству этого включения.

Заметим, что стремление решения  $x(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  к стационарному множеству  $\Lambda$  означает, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{z \in \Lambda} |z - x(t)| = 0$$

**Доказательство.** Согласно условию 1 теоремы, можно определить функцию  $V([x]): R^n/\Gamma \rightarrow R^1$  следующим образом:  $V([x]) = V(x)$ .

Из условия 2 теоремы следует, что  $V([x]) \rightarrow +\infty$  при  $[x] \rightarrow \infty$ .

Используя это свойство, докажем, что любая траектория  $[x(t)]$  в пространстве  $R^n/\Gamma$  является ограниченной при  $t \geq 0$ . Предполагая противное, получим существование возрастающей последовательности  $t_k$  такой, что  $[x(t_k)] \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что  $V([x(t_k)]) \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Однако это противоречит условию 3 теоремы.

Таким образом, траектория  $[x(t)]$  ограничена при  $t \geq 0$  и, следовательно, определена на  $[0, +\infty)$ . Из ограниченности траектории  $[x(t)]$  следует, что ее  $\omega$ -предельное множество  $\Omega$  также ограничено. Пусть  $[p] \in \Omega$ . Тогда, используя лемму, получим существование траектории  $[y(t)]$  такой, что

$$[y(0)] = [p], \quad [y(t)] \in \Omega, \quad \forall t \in R^1$$

Поскольку, согласно условию 3 теоремы,  $V([x(t)])$  – невозрастающая функция, а из ограниченности  $[x(t)]$  и непрерывности  $V([x])$  следует ограниченность на  $[0, +\infty)$  функции  $V([x(t)])$ , имеем существование предела

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V([x(t)]) = V_0$$

Но тогда  $V([y(t)]) = V_0, \forall t \in R^1$ . Отсюда и из условия 4 теоремы следует, что  $y(t) = y(0), \forall t \in R^1$ .

Таким образом,  $\omega$ -предельное множество  $\Omega$  состоит из состояний равновесия включения (4). Отсюда и следует утверждение теоремы.

**Доказательство теоремы 1.** Рассмотрим функцию

$$V(\eta, \sigma) = \eta^2 + 2q \int_0^\sigma g(\sigma) d\sigma, \quad q = \frac{1+ab}{(1-ab)^2}$$

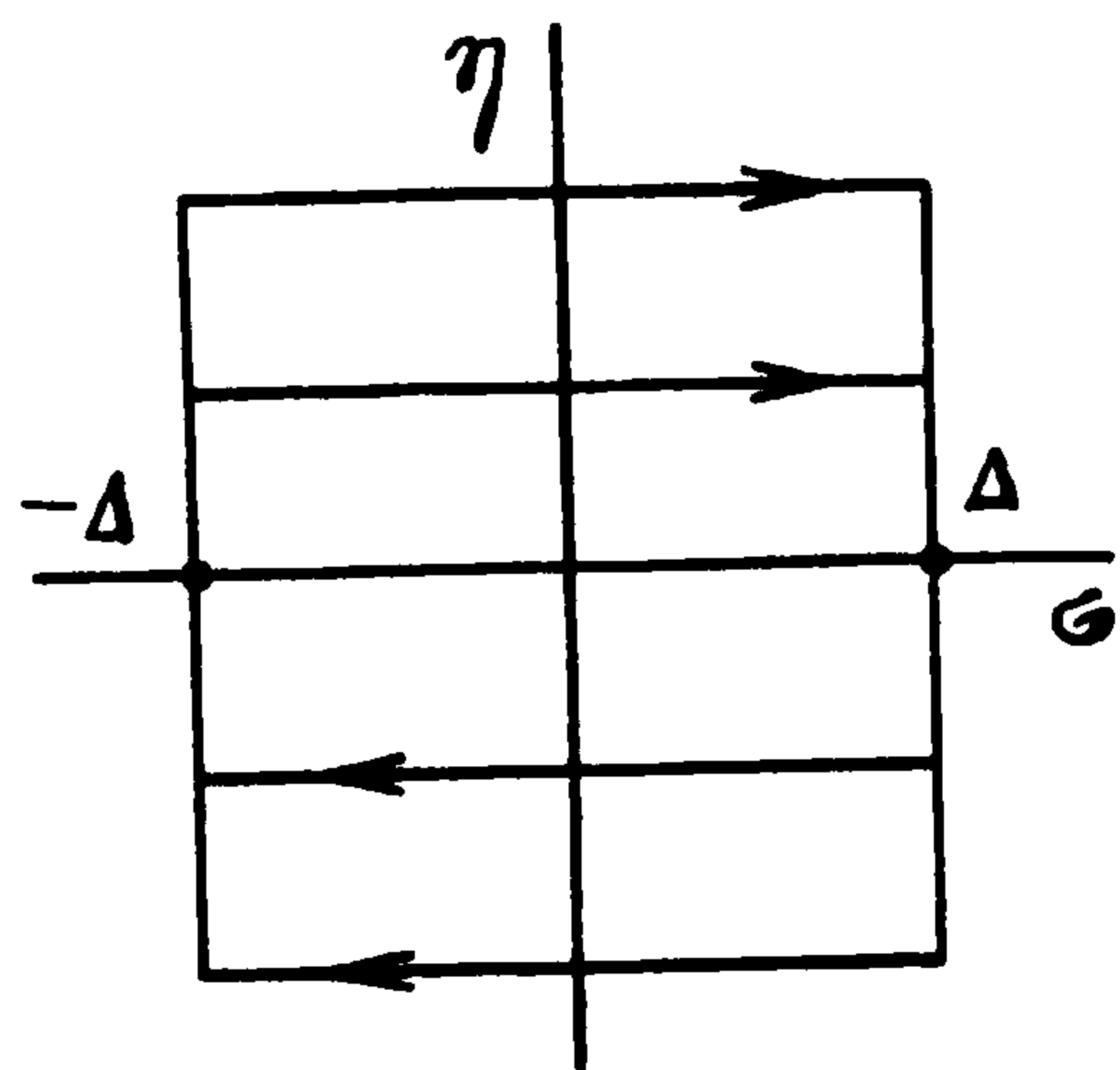
где  $g(\sigma)$  – некоторая однозначная функция, совпадающая с  $f(\sigma)$  в точках однозначности функции  $f(\sigma)$ . Для значений  $t$ , при которых  $\sigma(t)$  – точка однозначности  $f(\sigma)$ , выполнено соотношение

$$\frac{d}{dt} V(\eta(t), \sigma(t)) = -2a \left( \eta(t) - \frac{b}{1-ab} f(\sigma(t)) \right)^2 - \frac{2b}{(1-ab)^2} f(\sigma(t))^2 \quad (7)$$

На скользящих режимах системы (2) имеем  $\sigma(t) = \sigma^*$ , где  $\sigma^*$  – точка неоднозначности  $f(\sigma)$ . Поэтому из второго уравнения системы (2) имеем

$$\beta \eta(t) - b \xi(t) = 0 \quad (8)$$

где  $\xi(t)$  – так называемая доопределенная функция [2]. В этом случае первое уравне-



Фиг. 3

ние системы (2) примет вид  $\dot{\eta} = -a\eta - \xi(t)$ . Подставляя в это уравнение найденную из (8) функцию  $\xi(t)$  и учитывая тождество  $\sigma(t) = \sigma^*$ , получим, что на скользящем режиме

$$\frac{d}{dt} V(\eta(t), \sigma(t)) = -2 \left( a + \frac{\beta}{b} \right) \eta(t)^2 \quad (9)$$

Из соотношений (7) и (9) следует, что для функции  $V(\eta, \sigma)$  выполнено условие 3 теоремы 3.

Ясно также, что при  $a > 0$  из соотношений (7) и (9) следует выполнение условия 4 теоремы 3. При  $a = 0$  в полосах  $\{\eta \in R^1, \sigma \in (2k\pi - \Delta, 2k\pi + \Delta)\} = 0$  выполняется соотношение  $V(\eta(t), \sigma(t)) = \text{const}$ . Однако непосредственным интегрированием системы (2) легко показать, что целыми траекториями, расположенными в этих полосах, являются лишь состояния равновесия. Для любой другой траектории лишь некоторая ее часть может находиться в полосах  $\{\eta \in R^1, \sigma \in (2k\pi - \Delta, 2k\pi + \Delta)\}$  (фиг. 3). Отсюда и из (7) и (9) следует выполнение условия 4 теоремы 3 при  $a = 0$ . Условия 1 и 2 теоремы, очевидно, выполнены в силу условия  $\gamma = 0$ . Ясно, что в этом случае  $m = 1$  и

$$\int_0^{2\pi} g(\sigma) d\sigma = 0, \quad d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3 и любое решение системы (2) стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к стационарному множеству.

Элементарный анализ поведения траекторий в окрестности стационарного множества системы (2) позволяет сделать несколько более сильное утверждение о том, что любое решение стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к некоторому состоянию равновесия.

**Доказательство теоремы 2.** Воспользуемся принципом сравнения Чаплыгина – Камке [12–14], построив систему сравнения

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -f_1(\vartheta), \quad \dot{\vartheta} = u - bf_1(\vartheta) \\ f_1(\vartheta) &= \begin{cases} \varphi(\vartheta) - \gamma_1 & \text{при } \vartheta \in (-\pi, -\Delta) \text{ и } \vartheta \in (\Delta, \Delta) \\ 0 & \text{при } \vartheta \in (-\Delta, \pi) \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Положительное число  $\gamma_1 \in (0, \gamma)$  будет определено позже. Найдем периодическое решение  $u_0(\vartheta)$  уравнения первого порядка

$$\frac{du}{d\vartheta} = \frac{-f_1(\vartheta)}{u - bf_1(\vartheta)} \quad (11)$$

эквивалентного системе (10), для которого

$$u_0(\vartheta) > b \max_{\vartheta} f_1(\vartheta) \quad (12)$$

Из принципа сравнения тогда получим, что любое решение системы (2) с начальными данными  $\eta(0), \sigma(0)$ , удовлетворяющими условию  $\eta(0) > u_0(\sigma(0))$ , будет обладать следующим свойством:

$$\eta(t) > u_0(\sigma(t)) \quad (13)$$

Из соотношений (12) и (13) будет следовать утверждение теоремы 2.

Выясним теперь условия существования решения  $u_0(\vartheta)$ . Из интегрирования уравнения (11) ясно, что

$$-f_1^-(\pi - \Delta) = \frac{1}{2} (u_0(-\Delta)^2 - u_0(-\pi)^2) - bf_1^-(u_0(-\Delta) - u_0(-\pi)) \quad (14)$$

$$-f_1^+(\pi - \Delta) = \frac{1}{2}(u_0(\pi)^2 - u_0(\Delta)^2) - bf_1^+(u_0(\pi) - u_0(\Delta)) \quad (15)$$

где  $f_1^-$  – значение  $f_1(\vartheta)$  на интервале  $(-\pi, -\Delta)$ ,  $f_1^+$  – значение  $f_1(\vartheta)$  на интервале  $(\Delta, \pi)$ .

Суммируя (14) и (15) и учитывая, что  $u_0(\pi) = u_0(-\pi)$  и  $u_0(-\Delta) = u_0(\Delta)$ , получим

$$\gamma_1(\pi - \Delta) = b\varphi^-(u_0(\pi) - u_0(\Delta)) \quad (16)$$

где  $\varphi^-$  – значение  $\varphi(\vartheta)$  на  $(-\pi, -\Delta)$ .

Из соотношений (15) и (16) получим следующее равенство для определения  $u_0(\pi)$ :

$$u_0(\pi) = -\frac{b\varphi^- f_1^+}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1(\pi - \Delta)}{2b\varphi^-} + bf_1^+$$

Ясно, что при достаточно малых  $\gamma_1$  будет выполняться неравенство  $u_0(\vartheta) \geq u_0(\pi) > bf_1^+$ . Отсюда следует неравенство (12). Теорема доказана.

Различные обобщения теорем 1 и 2 как на более широкие классы нелинейностей, так и на многомерные динамические системы возможны в рамках частотных методов, изложенных в [8, 12, 15].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
2. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Мат. сб. 1960. Т. 51. № 1. С. 99–128.
4. Филиппов А.Ф. О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 1971. Т. 10. № 3. С. 307–313.
5. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
6. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 447 с.
7. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Сов. радио, 1978. 598 с.
8. Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И. Частотные методы в теории колебаний. Т. 1. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1992. 366 с.
9. Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д. О величине полосы захвата системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 4. С. 561–567.
10. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453–456.
11. Бакаев Ю.Н. Некоторые вопросы нелинейной теории фазовых систем // Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. 1959. Вып. 800. 90 с.
12. Leonov G.A., Reitmann V., Smirnova V.B. Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems. Stuttgart; Leipzig: Teubner, 1992. 242 p.
13. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 299 с.
14. Белых В.Н. Анализ непрерывных СФС методом двумерных систем сравнения // Системы фазовой синхронизации / Под ред. Шахгильдяна В.В. и Белюстиной Л.Н. М.: Радио и связь, 1982. С. 45–55.
15. Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B. Frequency Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. Singapore: World Scient., 1996. 498 p.

Санкт-Петербург

e-mail: leonov@math.spbu.ru

Поступила в редакцию

4.II.1999