

УДК 531.36; 62–50

© 2000 г. А.С. Ковалева

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ УКЛОНЕНИЯМИ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С МАЛЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Рассматривается задача управления системой, приведенной к стандартной форме с малым параметром ϵ . Управление считается слабым, а возмущение представляет собой широкополосный процесс, пропорциональный малому параметру. Если невозмущенная система имеет асимптотически устойчивую стационарную точку, то большинство возмущенных траекторий притягивается к этой точке, и среднее время пребывания системы в конечной области стремится к бесконечности при малых ϵ . Малые случайные возмущения могут привести к редким большим отклонениям от невозмущенной траектории и к выходу из области за сравнительно короткое время. Редкие события слабо влияют на среднее время пребывания в области, поэтому для решения задачи оптимального управления с учетом больших отклонений на коротких интервалах времени вводится экспоненциальный критерий специального вида. Критерий зависит от параметра ϵ и переходит в функционал быстрогодействия для детерминированных систем. Строится асимптотическое решение уравнения динамического программирования. Показано, что главный член асимптотического разложения решения зависит от интенсивности возмущения, хотя в исходных уравнениях эта величина мала. В качестве примера рассмотрена задача управления маятником. Строится управление, удерживающее систему в заданной области колебательных движений на максимально возможном интервале времени.

Критерии типа Майера или Больца, обычно используемые в задачах управления механическими системами, мало эффективны для управления с учетом больших отклонений. При использовании этих критериев предполагается, что динамика системы близка к невозмущенной, и малые случайные возмущения приводят к незначительным флуктуациям траекторий. В этом случае задача сводится к управлению детерминированной частью системы, а учет малых возмущений приводит к малым поправкам в основной цепи управления. Такой подход приемлем, если выход траектории из допустимой области не приводит к необратимым нарушениям в работе системы. Если же выход из области рассматривается как опасное событие, то управление должно быть чувствительным к малым возмущениям. Примерами могут служить задачи наведения, слежения, синхронизации, некоторые задачи о финансовых рисках и т.п. [1–3].

Для построения управления, чувствительного к малым возмущениям, предложены экспоненциальные критерии, зависящие от малого параметра [1–3]. Для детерминированной системы эти критерии переходят в функционалы Майера или Больца. Доказана эффективность экспоненциального аналога критерия быстрогодействия в задаче управления большими отклонениями в системах с не зависящими от времени коэффициентами сноса и диффузии [3].

В данной работе развивается аналогичный подход для колебательных систем, допускающих большие отклонения. Для системы, возмущаемой белым шумом, строится уравнение динамического программирования, решение которого ищется методом усреднения. Предложено обобщение этого подхода на системы с вращающейся фазой и системы с широкополосными возмущениями, отличными от белого шума.

1. Основные уравнения и функционалы задачи. Исследуется динамика управляемой системы, уравнения движения которой приводятся к стандартной форме с малым па-

раметром ε

$$x' = \varepsilon F(t, x, u) + \varepsilon \sigma(t, x) w'(t), \quad x(t) = x \in G; \quad x(0) = x^*; \quad u \in U \quad (1.1)$$

Здесь G – открытая область в R_n с границей Γ ; U – компакт в R_m ; $w(t)$ – стандартный винеровский процесс в R_l ; штрих означает производную по быстрому времени t . Коэффициент сноса $F(t, x, u)$ предполагается достаточно гладким по всем переменным и периодическим или почти периодическим и равномерно ограниченным по $t \in I_T = (-\infty, \infty)$ в области $D: \{I_T \times \bar{G} \times U\}$. Матрица диффузии

$$a(t, x) = \sigma(t, x) \sigma^T(t, x)$$

удовлетворяет аналогичным условиям в области $Q: \{I_T \times \bar{G}\}$. Дополнительно предполагается, что матрица $a(t, x)$ невырождена и положительно определена в области Q .

Для выделения основного масштаба времени введем медленную переменную $\tau = \varepsilon t$ и перепишем (1.1) в виде

$$\dot{x}^\varepsilon = F^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon, u) + \varepsilon^{1/2} \sigma^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon) \dot{w}(\tau), \quad x^\varepsilon(\tau) = x, \quad x^\varepsilon(0) = x^* \quad (1.2)$$

$$F^\varepsilon(\tau, x, u) = F(\tau/\varepsilon, x, u), \quad \sigma^\varepsilon(\tau, x) = \sigma(\tau/\varepsilon, x)$$

точка означает производную по медленному времени τ . Матрица диффузии

$$a^\varepsilon(\tau, x) = \sigma^\varepsilon(\tau, x) (\sigma^\varepsilon(\tau, x))^T$$

Как правило, в качестве критерия, характеризующего надежность системы, выбирается среднее время пребывания в заданной области

$$\Phi^\varepsilon(u) = M \tau_G \quad (1.3)$$

где M – математическое ожидание, τ_G – момент первого выхода из области

$$\tau_G = \inf\{\tau: x^\varepsilon(\tau) \notin G / x^\varepsilon(0) = x^*\} \quad (1.4)$$

Пусть $F^\varepsilon(\tau, x, 0) = f^\varepsilon(\tau, x)$. Предположим, что порождающая неуправляемая система

$$\dot{x}^\varepsilon = f^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon) \quad (1.5)$$

удовлетворяет условиям применимости метода усреднения [4, 5] и имеет асимптотически устойчивое положение равновесия, определяемое как стационарное решение усредненной системы

$$\dot{x}^0 = f^0(x^0), \quad f^0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt \quad (1.6)$$

Если все допустимые начальные точки находятся в области притяжения этого положения равновесия, то с вероятностью, близкой к единице, большая часть траекторий возмущенной системы (1.2) попадает в его малую окрестность и проведет в этой окрестности сколь угодно большое время, если только ε достаточно мало. Вероятность пребывания в области G , лежащей в области притяжения асимптотически устойчивого положения, и среднее время первого выхода из этой области оцениваются экспоненциально [6, 7]

$$P\{\tau_G \leq T\} \sim \exp(-C/\varepsilon), \quad C > 0, \quad T \sim 1 \quad (1.7)$$

$$M \tau_G \sim \exp(-C_1/\varepsilon), \quad C_1 > 0$$

Из соотношений (1.7) следует, что основной вклад в критерий (1.3) вносят траектории с экспоненциально большим временем пребывания в области. Это означает, что управление, построенное по критерию максимума (1.3), практически не учи-

тывает опасных выбросов на сравнительно коротких интервалах времени. Задача состоит в построении управления, чувствительного к большим отклонениям на сравнительно коротких интервалах времени и, соответственно, чувствительного к внешним воздействиям. Для решения этой задачи предлагается ввести экспоненциальный критерий [1, 2]

$$\Phi^\varepsilon(u) = M \exp(-\theta \tau_G / \varepsilon) \quad (1.8)$$

или в более общем случае

$$\Phi^\varepsilon(u) = M \exp \left[-\varepsilon^{-1} \int_0^{\tau_G} L(x, u) d\tau \right] \quad (1.9)$$

Здесь $\theta > 0$ – весовой коэффициент, $L(x, u)$ – достаточно гладкая функция. Максимизация критерия (1.3) соответствует минимизация функционала (1.8).

Очевидно, что основной вклад в критерии (1.8), (1.9) вносят траектории со сравнительно малым временем пребывания в области G . Это означает, что экспоненциальные критерии "сдвинуты" в сторону более опасных событий, ассоциирующихся с выходами из области за короткое время.

Задачи (1.2), (1.8) и (1.2), (1.9) детально рассмотрены [2] для случая равномерной сходимости коэффициентов $F^\varepsilon \rightarrow F^0$, $\sigma^\varepsilon \rightarrow \sigma^0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Сформулированы условия существования решения задачи оптимального управления, построено уравнение динамического программирования, и обоснован переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Более слабые условия обоснованы [3] для системы с коэффициентами, не зависящими от τ , ε . В данной работе результаты переносятся на системы с усреднением, т.е. с интегральной сходимостью $F^\varepsilon \rightarrow F^0$, $\sigma^\varepsilon \rightarrow \sigma^0$ [4]. Вопрос о существовании решения не рассматривается. Предполагается, что условия гладкости коэффициентов обеспечивают существование решения уравнения динамического программирования рассматриваемой задачи и справедливость необходимых преобразования. Цель работы – построить асимптотическое (при $\varepsilon \rightarrow 0$) решение задачи (1.2) с критериями (1.8) или (1.9).

2. Уравнения динамического программирования. Построим уравнения динамического программирования для задачи (1.2), (1.8). Определим функцию Беллмана

$$W^\varepsilon(\tau, x) = \min_{u \in U} M_{\tau, x} \exp(-\theta \tau_G / \varepsilon) \quad (2.1)$$

где $M_{\tau, x}$ – условное математическое ожидание относительно состояния $x^\varepsilon(\tau) = x$. Функция (2.1) ищется как решение уравнения динамического программирования [1, 2]

$$W_\tau^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \text{Tr}[a^\varepsilon(\tau, x) W_{xx}^\varepsilon] + h^\varepsilon(\tau, x, W_x^\varepsilon) - \frac{\theta}{\varepsilon} W^\varepsilon = 0, \quad x \in G \quad (2.2)$$

$$W^\varepsilon(\tau, x) = 1, \quad x \in \Gamma$$

Здесь нижние индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным и

$$h^\varepsilon(\tau, x, p) = \min_{u \in U} (F^\varepsilon(\tau, x, u), p) \quad (2.3)$$

где (F^ε, p) – скалярное произведение соответствующих векторов.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (2.2) сингулярно, его решение слабо зависит от случайных возмущений и убывает экспоненциально по параметру $1/\varepsilon$ на интервале $\tau_G \sim 1$. Для регуляризации задачи вводится новая переменная $V^\varepsilon(\tau, x)$ по формуле [1, 2]

$$W^\varepsilon(\tau, x) = \exp[-V^\varepsilon(\tau, x)/\varepsilon] \quad (2.4)$$

или

$$V^\varepsilon(\tau, x) = -\varepsilon \ln W^\varepsilon(\tau, x) = \max_{u \in U} \{-\varepsilon \ln [M_{\tau, x} \exp(-\theta \tau_G / \varepsilon)]\} \quad (2.5)$$

Используя замену переменной (2.4), (2.5), преобразуем соотношения (2.2), (2.3) в уравнение для функции $V^\varepsilon(\tau, x)$ с соответствующим граничным условием

$$V_\tau^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \text{Tr}[a^\varepsilon(\tau, x) V_{xx}^\varepsilon] + H^\varepsilon(\tau, x, V_x^\varepsilon) - \frac{1}{2} (a^\varepsilon(\tau, x) V_x^\varepsilon, V_x^\varepsilon) = 0, \quad x \in G \quad (2.6)$$

$$V^\varepsilon(\tau, x) = 0, \quad x \in \Gamma$$

где

$$H^\varepsilon(\tau, x, p) = \max_{u \in U} (F^\varepsilon(\tau, x, u), p) + \theta \quad (2.7)$$

Решение задачи (2.6), (2.7) имеет вид

$$u^\varepsilon(\tau, x) = U(\tau/\varepsilon, x, V_x^\varepsilon(\tau, x)) \quad (2.8)$$

Как следует из (2.6), при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $V^\varepsilon(\tau, x)$ зависит от матрицы диффузии a^ε в главном приближении, хотя в уравнения движения эта величина входит с коэффициентом ε . Таким образом, критерий (2.5) оказывается чувствительным к внешнему воздействию. Если существует решение (2.6), равномерно ограниченное при $\varepsilon \rightarrow 0$, то можно утверждать, что основной вклад в (2.5) вносят большие отклонения со временем пребывания в области $\tau_G \sim 1$, т.е. управление следит за выходами из области на конечных, а не экспоненциально больших интервалах времени.

Очевидно, что в детерминированных системах ($a^\varepsilon = 0$) функция (2.6) совпадает с функцией Беллмана

$$V(\tau, x) = \max_{u \in U} (\theta \tau_G)$$

В стохастических системах решение задачи (2.5)–(2.7) соответствует максимизации функционала

$$\Phi^\varepsilon(u) = -\varepsilon \ln [M \exp(-\theta \tau_G/\varepsilon)] \quad (2.9)$$

Это выражение можно рассматривать как регуляризованный (при $\varepsilon \rightarrow 0$) аналог функционала (1.3). Максимизация критерия (2.9) вместо стандартного критерия быстрогодействия (1.3) позволяет построить закон управления системой, согласующийся с физическим смыслом задачи.

При достаточной гладкости коэффициентов существует классическое решение уравнения (2.6), определяющее решение задачи оптимального управления (2.5) на траекториях системы (1.2) [2, 3]. Для перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ используется процедура метода возмущений в уравнениях динамического программирования [8, 9]. В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим усредненное уравнение

$$H^0(x, V_x^0) - \frac{1}{2} (a^0(x) V_x^0, V_x^0) = 0, \quad x \in G \quad (2.10)$$

$$V^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma$$

где для функций $H^\varepsilon, a^\varepsilon$, обозначенных как $G^\varepsilon(\tau, x, p)$, определен предел [5]

$$G^0(x, p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G^\varepsilon(\tau, x, p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\tau/\varepsilon, x, p) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G(t, x, p) dt \quad (2.11)$$

Существование предела $V^0(x)$ как вязкого решения уравнения доказано ранее [2, 3, 8]. Сходимость

$$V^\varepsilon(\tau, x) \rightarrow V^0(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \tau, x \in Q_G : \{[0, \tau_G] \times \bar{G}\} \quad (2.12)$$

равномерна в каждом компакте Q_G . Управление

$$u^0(t, x) = U(t, x, V_x^0(x)) \quad (2.13)$$

рассматривается как квазиоптимальное. Квазиоптимальность (2.13) доказывается с помощью стандартных рассуждений [10].

Решение задачи (1.2), (1.9) строится с помощью аналогичных рассуждений. Функция

$$V^\varepsilon(\tau, x) = \max_{u \in U} \left\{ -\varepsilon \ln \left[M_{\tau, x} \exp \left(-\varepsilon^{-1} \int_0^{\tau_G} L(x, u) d\tau \right) \right] \right\} \quad (2.14)$$

определяется как решение уравнения (2.6), в котором

$$H^\varepsilon(\tau, x, p) = \max_{u \in U} [(F^\varepsilon(\tau, x, u), p) + L(x, u)] \quad (2.15)$$

Функция Беллмана (2.14) аппроксимируется решением усредненного уравнения (2.10), причем $H^0(x, p)$ определяется усреднением выражения (2.15).

3. Некоторые обобщения. 1°. Пусть уравнения движения приводятся к стандартной форме уравнений с вращающейся фазой

$$x' = \varepsilon [F_1(\Psi, x, u) + \sigma_{11}(\Psi, x)w_1'(t) + \sigma_{12}(\Psi, x)w_2'(t)] \quad (3.1)$$

$$\Psi' = \omega(x) + \varepsilon [F_2(\Psi, x, u) + \sigma_{21}(\Psi, x)w_1'(t) + \sigma_{22}(\Psi, x)w_2'(t)]$$

$$x \in \bar{G} \in R_n, \quad \Psi \in R_1$$

где $w_1(t)$, $w_2(t)$ – независимые винеровские процессы соответствующей размерности. Правые части уравнений (3.1) предполагаются достаточно гладкими по всем переменным и 2π -периодическими по фазе Ψ в рассматриваемой области; частота $\omega(x) \geq \omega_0 > 0$ при $x \in \bar{G}$.

Пусть задача состоит в минимизации функционала (1.9) на траекториях системы (3.1). Не вводя медленной переменной τ , перепишем (1.9) в виде

$$\Phi^\varepsilon(u) = M \exp \left[- \int_0^{T_G} L(x, u) dt \right] \quad (3.2)$$

где $T_G = \inf\{t: x(t, \varepsilon) \notin G\}$, и определим функцию Беллмана

$$V^\varepsilon(\Psi, x) = \max_{u \in U} \left\{ -\varepsilon \ln \left[M_{\Psi, x} \exp \left(- \int_0^{T_G} L(x, u) dt \right) \right] \right\} \quad (3.3)$$

как решение уравнения

$$\begin{aligned} & \omega(x)V_\Psi^\varepsilon + \varepsilon H(\Psi, x, V_x^\varepsilon, V_\Psi^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} [(a_{11}(\Psi, x)V_x^\varepsilon, V_x^\varepsilon) + [a_{12}(\Psi, x)V_x^\varepsilon, V_\Psi^\varepsilon] + \\ & + (a_{21}(\Psi, x)V_\Psi^\varepsilon, V_x^\varepsilon) + (a_{22}(\Psi, x)V_\Psi^\varepsilon, V_\Psi^\varepsilon)] + \varepsilon^2 \dots = 0, \quad x \in G \\ & V^\varepsilon(\Psi, x) = 0, \quad x \in \Gamma \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$a_{ik} = \sigma_{ik}(\sigma_{ik})^T$$

$$H(\Psi, x, p, r) = \max_{u \in U} [(F_1(\Psi, x, u), p) + (F_2(\Psi, x, u), r) + L(x, u)]$$

$$u = U(\Psi, x, p, r) \quad (3.5)$$

Как и в разд. 2, переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствует усреднению по быстрой фазе Ψ и отбрасыванию членов высшего порядка по ε . В результате получим уравне-

ние, аналогичное (2.10), с коэффициентами, не зависящими от Ψ ,

$$a^0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{11}(\Psi, x) d\Psi, \quad H^0(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\Psi, x, p) d\Psi \quad (3.6)$$

Следуя изложенному ранее подходу [8, 11], можно доказать равномерную сходимость

$$V^\varepsilon(\Psi, x) \rightarrow V^0(x)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \in \bar{G}$.

Квазиоптимальное управление u^0 записывается в виде

$$u^0 = U(\Psi, x, V_x^0(x), 0) \quad (3.7)$$

Функция $U(\Psi, x, p, r)$ находится из последнего соотношения (3.5).

2°. Рассмотрим систему с возмущениями, отличными от белого шума,

$$x' = \varepsilon F(t, x, u) + \varepsilon \gamma(t, x) \xi(t) \quad (3.8)$$

где $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условиям перемешивания, выполняющимся, в частности, для стационарных нормальных процессов [6, 10], коэффициенты F и γ предполагаются достаточно гладкими в области $D: \{I_T \times \bar{G} \times U\}$.

С помощью процедуры диффузионной аппроксимации [12] аппроксимируем (3.8) частично усредненной системой

$$\dot{x}^\varepsilon = F^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon, u) + \varepsilon B(x^\varepsilon) + \varepsilon^{1/2} \sigma(x^\varepsilon) \dot{w}(\tau) \quad (3.9)$$

Дополнительное слагаемое $\varepsilon B(x)$ соответствует поправке Стратоновича [6] и может быть вычислено в явном виде [12]. В данной задаче вид $B(x)$ не существен, так как слагаемые $O(\varepsilon)$ в коэффициенте сноса не входят в предельное уравнение (2.10).

Усредненная матрица диффузии $a(x) = \sigma(x)\sigma^T(x)$ вычисляется по формуле

$$a(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t, x) K(s) \gamma^T(t+s, x) ds dt \quad (3.10)$$

где $K(s)$ – корреляционная матрица процесса $\xi(t)$. Аналогичные преобразования могут быть проведены для системы (3.1) с вращающейся фазой.

4. Пример. Управление квазиконсервативной системой, препятствующее преодолению потенциального барьера. Задачи об управлении большими отклонениями представляют особый интерес, если невозмущенная система асимптотически устойчива. Вместе с тем, подобная постановка задачи имеет смысл и для неасимптотически устойчивых систем. В этом случае управление оказывается "чувствительным" к внешним воздействиям и увеличивает среднее время пребывания в области.

Рассмотрим квазиконсервативную систему, динамика которой описывается уравнениями

$$q' = E_v, \quad v' = -E_q + \varepsilon u + \varepsilon \sigma w'(t) \quad (4.1)$$

где функция

$$E = v^2/2 + Q(q) \quad (4.2)$$

определяет интеграл энергии невозмущенной консервативной системы. Предполагается, что потенциал $Q(q)$ допускает устойчивое положение равновесия q_s :

$$dQ/dq = 0, \quad d^2Q/dq^2 > 0 \quad \text{при} \quad q = q_s$$

и неустойчивое положение равновесия q_u :

$$dQ/dq = 0, \quad d^2Q/dq^2 < 0 \quad \text{при} \quad q = q_u$$

Тогда движение в области $Q(q_s) \leq Q(q) < Q(q_u)$ соответствует колебаниям внутри потенциальной ямы; переход через потенциальный барьер соответствует пересечению сепаратрисы, разделяющей области с различными типами движения, и рассматривается как опасное событие. Цель управления – воспрепятствовать случайным скачкам через потенциальный барьер.

Приведем (4.1) к стандартной форме (3.1). Введем новые переменные e, Ψ по формулам [5]

$$e = \frac{v^2(e, q)}{2} + Q(q), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial q} = \frac{\omega(e)}{v(e, q)}, \quad \omega(e) = \frac{2\pi}{T(e)} \quad (4.3)$$

$$v(e, q) = \pm [2(e - Q(q(e, \Psi)))]^{1/2}, \quad T(e) = \oint \frac{dq}{v(e, q)}$$

(интегрирование ведется по контуру $e = \text{const}$). Формально граница допустимой области определяется уравнением сепаратрисы $E = e^* = Q(q_u)$; фактическая допустимая область определяется условием $G: \{e \leq e_\Gamma < e^*\}$.

Замена (4.3) преобразует уравнения (4.1) к виду [5]

$$e' = \varepsilon uv + \varepsilon^2 \sigma^2 / 2 + \varepsilon \sigma v w'(t) \quad (4.4)$$

$$\Psi' = \omega(e) + \varepsilon g(e, \Psi, u) + \varepsilon \delta(e, \Psi) w'(t)$$

Из (4.4) следует, что для неуправляемой системы ($u = 0$) среднее время пребывания в конечной области $M \tau_G \sim 1/\varepsilon^2$. Введение управления делает систему диссипативной, с экспоненциально большим временем пребывания в области G .

Рассмотрим два типа ограничений и функционалов задачи.

1°. Построим управление, максимизирующее функционал

$$\Phi^\varepsilon(u) = -\varepsilon \ln \left\{ M \exp \left[- \int_0^{T_G} \omega(e) dt \right] \right\} \quad (4.5)$$

на траекториях (4.4) при условии $|u| \leq U$. Здесь $t = T_G$ – момент первого выхода траектории на границу области $e = e_\Gamma$. Как и в детерминированных системах [10, 13], функционал (4.5) соответствует не моменту, а фазе выхода из допустимой области G .

Уравнение (3.4) для задачи (4.4), (4.5) записывается в виде

$$\omega(e) V_\Psi^\varepsilon + \varepsilon H(\Psi, e, v, V_e^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} (\sigma v V_e^\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 \dots = 0, \quad e \in G \quad (4.6)$$

$$V^\varepsilon(\Psi, e) = 0, \quad e = e_\Gamma$$

где

$$v = v(e, q(e, \Psi)), \quad H(\Psi, e, v, V_e^\varepsilon) = \max_{|u| \leq U} (uv V_e^\varepsilon) + \omega(e) \quad (4.7)$$

Из второго равенства (4.7) следует

$$u^\varepsilon = U \operatorname{sgn}(v V_e^\varepsilon), \quad H = U |v V_e^\varepsilon| + \omega(e) \quad (4.8)$$

Внося функцию H из (4.8) в (4.6) и усредняя по быстрой фазе Ψ , получим ук-

роченное уравнение динамического программирования (2.10) в виде

$$U | V_e^0 | S(e) - \frac{1}{2} (\sigma V_e^0)^2 I(e) = -1, \quad e \in G \quad (4.9)$$

$$V^0(e) = 0, \quad e = e_\Gamma$$

где $I(e) > 0$ – интеграл действия [5]

$$I(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{v^2(e, q(e, \Psi))}{\omega(e)} d\Psi = \frac{1}{2\pi} \oint v(e, q) dq \quad (4.10)$$

и $S(e) > 0$ – нормированная длина контура интегрирования

$$S(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|v(e, q(e, \Psi))|}{\omega(e)} d\Psi = \frac{1}{2\pi} \oint \text{sgn} v dq \quad (4.11)$$

Очевидно, что решение уравнения (4.9) существует при всех значениях $U > 0$ и $\sigma > 0$. Решению задачи управления соответствует $V_e^0 < 0$. Из соотношений (3.7), (4.8) при $V_e^0 < 0$ получим квазиоптимальное управление в форме

$$u^0 = -U \text{sgn } v \quad (4.12)$$

2°. Рассмотрим другой тип функционала

$$\Phi^\varepsilon(u) = -\varepsilon \ln \left\{ M \exp \left[- \int_0^{T_G} [\omega(e) - u^2 / 2r^2] dt \right] \right\} \quad (4.13)$$

Уравнение (3.4) для задачи (4.4), (4.13) записывается в виде (4.6), где

$$H(\Psi, e, v, V_e^\varepsilon) = \max_u (uvV_e^\varepsilon - u^2 / 2r^2) + \omega(e) \quad (4.14)$$

Из (4.14) следует

$$u^\varepsilon = rvV_e^\varepsilon, \quad H = (rvV_e^\varepsilon)^2 / 2 + \omega(e) \quad (4.15)$$

Внося (4.15) в (4.6) и усредняя по быстрой фазе Ψ , получим укороченное уравнение динамического программирования (2.10) в виде

$$\frac{1}{2} (r - \sigma^2) (V_e^0)^2 I(e) = -1, \quad e \in G \quad (4.16)$$

$$V^0(e) = 0, \quad e = e_\Gamma$$

где $I(e)$ – интеграл действия (4.10). Из (4.16) следует, что решение задачи о выходе траектории из области G существует, если

$$\gamma = \sigma^2 - r > 0, \quad r < \sigma^2 \quad (4.17)$$

и $V_e^0 < 0$. Из первого равенства (4.15) и соотношений (3.7), (4.15), (4.16) находим

$$V_e^0 = -[2 / \gamma I(e)]^{1/2}, \quad u^0 = -rv [2 / \gamma I(e)]^{1/2} \quad (4.18)$$

Таким образом, управление u^0 эквивалентно введению нелинейной диссипации в систему.

В общем случае систем типа маятника величины $I(e)$ и $S(e)$ выражаются через эллиптические интегралы. Задача существенно упрощается, если цель управления – удержать систему вдали от потенциального барьера в достаточно малой области положения равновесия. В этом случае можно линеаризовать систему в допустимой области G : $\{e \leq e_r\}$ и принять

$$Q(q) = \frac{(\lambda q)^2}{2}, \quad \omega(e) = \lambda, \quad q = R \cos \Psi, \quad v = -\lambda R \sin \Psi, \quad e = \frac{R^2}{2}$$

Вычисляя интеграл действия (4.10) для линейной системы, получим $I(e) = \lambda e$. Тогда квазиоптимальное управление (4.18) записывается в виде

$$u^0 = -2r(\gamma\lambda)^{-1/2}vR^{-1} = 2r(\lambda/\gamma)^{1/2} \sin \Psi \quad (4.19)$$

Такими образом, управление линейной системой остается нелинейным.

Из соотношений (4.17) следует, что каждому значению r соответствует предельно допустимое значение уровня возмущений σ , при котором решение задачи оптимального управления существует на интервале времени $\tau_G \sim 1$. Если неравенство (4.17) нарушается, т.е. уровень возмущения достаточно низок, то основной вклад в функционал (4.13) вносят большие отклонения со временем выхода из области $\tau_G \gg 1$. В этом случае для решения задачи можно рассмотреть полное уравнение (3.4) с учетом членов более высокого порядка. При этом задача остается сингулярной, и функционал (4.13) стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Учитывая, что параметр r определяет уровень ограничений, можно найти предельно допустимые затраты на управление, при которых траектории, соответствующие большим отклонениям, остаются в допустимой области на интервале времени $\tau_G \gg 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-923), Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (97-1140) и Национального института стандартов и технологии, США (NIST-43NANB912947).

ЛИТЕРАТУРА

1. Whittle P. Risk-Sensitive Optimal Control. New York: Wiley, 1990. 246 p.
2. Fleming W.H., Soner M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. New York: Springer, 1993. 428 p.
3. Dupuis P., McEneaney W.M. Risk-sensitive and robust escape criteria // SIAM J. Control Optim. 1997. V. 35. № 6. P. 2021–2049.
4. Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.
5. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
7. Meerkov S.M., Runolfsson T. Residence time control // IEEE Trans. Automat. Control. 1988. V. 33. № 4. P. 323–332.
8. Bensoussan A. Perturbation Methods in Optimal Control. New York: Wiley, 1988. 573 p.
9. Buckdahn R., Hu Y. Probabilistic approach to homogenization of systems of quasilinear parabolic PDEs with periodic structures // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl. 1998. V. 32. № 5. P. 609–619.
10. Ковалева А.С. Управление колебательными и виброударными системами. М.: Наука, 1990. 255 с.
11. Briand P., Hu Y. Probabilistic approach to singular perturbations of semilinear and quasilinear parabolic PDEs / Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl. 1999. V. 35. № 7. P. 815–831.
12. Ковалева А.С. О построении последовательных приближений метода возмущений для систем со случайными коэффициентами // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 612–619.
13. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.