

УДК 531.36:62–50

© 2000 г. И.А. Мухаметзянов

О ПРИМЕНЕНИЯХ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Для систем дифференциальных уравнений движения материальной системы весьма общего вида предлагается процедура построения семейства функций Ляпунова, позволяющая получать критерии асимптотической устойчивости по первому приближению. Рассматриваются вопросы о построении систем управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость "в большом", и вопрос о повышении качества переходного процесса. Приводятся примеры использования предложенной процедуры в задаче о стабилизации плоских движений спутника на эллиптической орбите, в задаче о стабилизации программного движения математического маятника с подвижной точкой подвеса и гиromаятника на подвижном основании.

Ранее [1] было построено семейство функций Ляпунова для исследования устойчивости "в малом" невозмущенного движения механических систем. Этот подход был применен [2] для построения механических систем, обладающих асимптотически устойчивым "в целом" программным движением.

Ниже эти результаты распространяются на более широкий класс материальных систем, включающих в себя, кроме механических, также и системы немеханической природы. Кроме того, построенное здесь семейство функций Ляпунова применяется для улучшения качества переходного процесса механических систем путем оптимального управления.

1. Построение семейства функций Ляпунова для исследования устойчивости по первому приближению. Пусть возмущенное движение материальной системы описывается следующими векторными уравнениями:

$$A_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, t)\ddot{x}_1 = B_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, t), \quad N_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, t)\dot{x}_2 = K_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, t) \quad (1.1)$$

где A_1, N_1 – $(n \times n)$ - и $(m \times m)$ -матрицы, x_1, B_1 – n -мерные, а x_2, K_1 – m -мерные векторы.

Элементы матриц A_1, N_1 и векторов B_1, K_1 предполагаются ограниченными, непрерывными и непрерывно дифференцируемыми в некоторой ограниченной области $G\{x, \dot{x}\}$, включающей $x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, x_2 = 0$ при $t \geq t_0$. Кроме того, предполагается, что $\det^2|A_1| > \delta_1, \det^2|N_1| > \delta_2$ в области G при $t \geq t_0$, где δ_1 и δ_2 – некоторые положительные постоянные. Эти условия необходимы для обеспечения существования и единственности решений уравнений (1.1) в области G при $t \geq t_0$ и для других целей, достигаемых ниже.

Задача заключается в построении таких функций Ляпунова, которые сами и их производные по времени образовали некоторое семейство квадратичных форм по $x_1, \dot{x}_1, x_2$ с матрицами, диагональные элементы которых, тождественно не равнясь нулю, содержали не только A_1, B_1, N_1, K_1 , входящих в (1.1), но и некоторых произвольных векторных функций $f(x_1, t)$.

Смысл постановки такой задачи заключается в том, что ее решение открывает возможность получения целого семейства критериев асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.1) с использованием лишь обобщенных критериев Сильвестра [3], в которые, кроме параметров системы, войдут еще и произвольные функции $f(x_1, t)$.

В следующих разделах работы эти функции Ляпунова будут использованы для построения систем управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость "в большом" и "в целом", а также для оценки и повышения качества переходного процесса.

Ранее [1, 2] некоторые из этих задач решены в случае механических систем при выборе функции $f(x_1, t)$ в линейном виде $H(t)x_1$.

Заметим, что здесь в отличие от механических систем матрицы A_1, N_1 зависят от $\dot{x}_1$ и могут не быть симметрическими и определенно-положительными.

Для того чтобы симметризовать и сделать определенно-положительными эти матрицы, можно умножать уравнения (1.1) соответственно на транспонированные матрицы A_1^T и N_1^T . При этом уравнения (1.1) примут вид

$$A(x_1, \dot{x}_1, x_2, t)\ddot{x}_1 = B(x_1, \dot{x}_1, x_2, t), \quad N(x_1, \dot{x}_1, x_2, t)\dot{x}_2 = K(x_1, \dot{x}_1, x_2, t) \quad (1.2)$$

где $A = A_1^T A_1$, $N = N_1^T N_1$ — определенно-положительные и симметрические матрицы, $B = A_1^T B_1$, $K = N_1^T R_1$ — n - и m -мерные векторы соответственно.

Введем замену

$$\dot{x}_1 = y + f(x_1, t), \quad f(0, t) = 0 \quad (1.3)$$

где $f(x_1, t)$ — произвольная n -мерная вектор-функция с ограниченными и дифференцируемыми элементами, допускающая бесконечно малый высший предел. Умножая первое уравнение (1.2) скалярно на вектор $y = \dot{x}_1 - f(x_1, t)$, а второе на вектор x_2 и затем складывая их, получим уравнения, которые после подстановки

$$\ddot{x}_1 = \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial x_1} y + \frac{\partial f}{\partial x_1} f(x_1, t) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

и использования равенства

$$y^T A \dot{y} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y^T A y) - \frac{1}{2} y^T \frac{dA}{dt} y$$

приведем к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y^T A \dot{y} + x_2^T N x_2) &= y^T B - y^T A \frac{\partial f}{\partial x_1} y - y^T A \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} y^T \frac{dA}{dt} y + x_2^T K + \frac{1}{2} x_2^T \frac{dN}{dt} x_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Предположим, что B, K, f разложимы в сходящиеся степенные ряды по $x_1, \dot{x}_1, x_2$. Члены первого приближения этих векторов выражаются так:

$$f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_0 x_1, \quad B = \left(\frac{\partial B}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial B}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial B}{\partial x_2} \right)_0 x_2$$

$$K = \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial K}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial K}{\partial x_2} \right)_0 x_2$$

Тогда

$$y^T B = y^T \left(\frac{\partial B}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 \dot{x}_1 + y^T \left(\frac{\partial B}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + x_2^T \left(\frac{\partial B}{\partial x_2} \right)_0 y$$

$$x_2^T K = \dot{x}_1^T \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 \dot{x}_2 + x_1^T \left(\frac{\partial K}{\partial x_1} \right)_0 x_2 + x_2^T \left(\frac{\partial K}{\partial x_2} \right)_0 x_2$$

Сохраняя в правой части уравнения (1.4) члены не выше второго порядка малости и заменяя в правой части вектор y на $[\dot{x}_1 - H(t)x_1]$, где $H(t) = (\partial f / \partial \dot{x}_1)_0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y^T A y + x_2^T N x_2) = & -\dot{x}_1^T \Gamma \dot{x}_1 - \dot{x}_1^T (\Gamma_1 + \Gamma H + \Gamma^T H) x_1 - x_1^T H^T (\Gamma H - \Gamma_1) x_1 + \\ & + x_2^T \left[\left(\frac{\partial K}{\partial x_2} \right)_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{dN}{dt} \right)_0 \right] x_2 + \dot{x}_1^T \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 x_2 - x_1^T H^T \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 x_2 + \\ & + x_2^T \left(\frac{\partial B}{\partial x_2} \right)_0 \dot{x}_1 - x_2^T \left(\frac{\partial B}{\partial x_2} \right)_0 H x_1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma &= A H - \left(\frac{\partial B}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{dA}{dt} \right)_0 \\ \Gamma_1 &= A (H^2 + \dot{H}) - \left(\frac{\partial B}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 H - \left(\frac{\partial B}{\partial x_1} \right)_0 \end{aligned}$$

Из матриц первого и второго членов в правой части уравнения (1.5) выделим симметрические и кососимметрические части:

$$\Gamma = D + G, \quad \Gamma_1 + \Gamma H + \Gamma^T H = C + E$$

где D, C – симметрические, а G, E – кососимметрические части матриц. Перенеся в левую часть член $-\dot{x}_1^T C x_1$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} V = & -\dot{x}_1^T D \dot{x}_1 - \dot{x}_1^T E x_1 - x_1^T \left[H^T (\Gamma H - \Gamma_1) - \frac{\dot{C}}{2} \right] x_1 + \\ & + x_2^T \left[\left(\frac{\partial K}{\partial x_2} \right)_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{dN}{dt} \right)_0 \right] x_2 + \dot{x}_1^T \left[\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 + \left(\frac{\partial B}{\partial x_2} \right)_0 \right] x_2 - \dot{x}_1^T H^T \left[\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 + \left(\frac{\partial B}{\partial x_2} \right)_0 \right] x_2 \\ V = & \frac{1}{2} (y^T A y + x_2^T N x_2 + x_1^T C x_1) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь учтены следующие соотношения:

$$\dot{x}_1^T G \dot{x}_1 \equiv 0, \quad \dot{x}_1^T C x_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}_1^T C x_1) - \frac{1}{2} x_1^T \dot{C} x_1$$

Матрица H имеет n^2 произвольных элементов. Следовательно, функцию V , зависящую от них, можно рассматривать в качестве искомого семейства функций Ляпунова, так как правая часть равенства (1.6), являющаяся полной производной по t от функции V , есть квадратичная форма по $x_1, \dot{x}_1, x_2$ с матрицей, диагональные элементы которой тождественно не равняются нулю, чего нельзя добиться при $H \equiv 0$.

Таким образом, имеется возможность получения целого семейства критериев асимптотической устойчивости невозмущенного движения по первому приближению, пользуясь лишь обобщенными критериями Сильвестра [3].

2. Построение систем асимптотически устойчивого "в большом" программного движения. Введем в правую часть системы (1.2) векторы управления Q_1 и Q_2 . Получим

$$A(x_1, \dot{x}_1, x_2, t) \ddot{x}_1 = B(x_1, \dot{x}_1, x_2, t) + Q_1 \quad (2.1)$$

$$N(x_1, \dot{x}_1, x_2, t) \dot{x}_2 = K(x_1, \dot{x}_1, x_2, t) + Q_2$$

При замене $\dot{x}_1$ на y по формуле (1.3) скалярное умножение первого уравнения (2.1) на y , а второго на x_2 приводит к следующему аналогу уравнения (1.4):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y^T A y + x_2^T N x_2) = \\ & = y^T \left\{ Q_1 + B - A \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) y - A \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) f + \frac{\partial f}{\partial t} \right] + \frac{1}{2} \frac{dA}{dt} y \right\} + x_2^T \left(K + \frac{1}{2} \frac{dN}{dt} x_2 + Q_2 \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если векторы Q_1, Q_2 выбрать в виде

$$\begin{aligned} Q_1 &= -Dy - F_1 x_1 - B + A \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) y + A \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) f + \frac{\partial f}{\partial t} \right] - \frac{1}{2} \frac{dA}{dt} y \\ Q_2 &= -K - \frac{1}{2} \frac{dN}{dt} x_2 - F_2 x_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

то получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y^T A y + x_2^T N x_2 + x_1^T F_1 x_1) = -y^T D y + \left(f^T F_1 + x_1^T \frac{\dot{F}_1}{2} \right) x_1 - x_2^T F_2 x_2 \quad (2.4)$$

где D, F_1, F_2 – симметрические определено-положительные матрицы.

Функция $y^T A y + x_2^T N x_2 + x_1^T F_1 x_1$ построена определено-положительной при всех $x_1, \dot{x}_1, x_2, t$, допускающей бесконечно малый высший и бесконечно большой низший пределы. Следовательно, в случае определенной отрицательности функции $(f^T F_1 + x_1^T \dot{F}_1 / 2) x_1$ правая часть уравнения (2.4) будет определено-отрицательной по $x_1, \dot{x}_1, x_2$, и при этом программное состояние $x_1 = \dot{x}_1 = 0, x_2 = 0$ системы (2.1) будет стабилизировано "в большом". Если приведенный подход применить для стабилизации программного состояния "в целом", то необходимо иметь в виду некоторые дополнительные условия.

Выясним эти условия. Для этого обратим внимание на правые части уравнений (2.3), которые имеют члены

$$\frac{1}{2} \frac{dA}{dt} y \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \frac{dN}{dt} x_2$$

содержащие старшие производные $\ddot{x}_1$ и $\ddot{x}_2$.

Заметим, что в уравнениях первого приближения эти производные отсутствуют, так как члены с ними имеют более высокий порядок малости. Следовательно, при наличии этих членов, вообще говоря, речь может идти только об устойчивости в ограниченной области начальных возмущений. Если же матрицы A_1, N_1 явно не зависят от $\dot{x}_1$, а матрица N_1 еще и от x_2 , то правые части равенства (2.3) не содержат старших производных. При этом векторы Q_1 и Q_2 обеспечивают условия асимптотической устойчивости невозмущенного состояния системы "в целом".

Для того чтобы, несмотря на явное содержание в A_1 и N_1 векторов $\dot{x}_1$ и x_2 , построить Q_1 и Q_2 так, чтобы невозмущенное состояние системы было асимптотически устойчивым "в целом", можно предложить следующую схему.

Умножим уравнения (1.1) соответственно на неособенные матрицы AA_1^{-1} и NN_1^{-1} , где $A(x_1, x_2, t), N(x_1, t)$ – произвольные ограниченные и имеющие ограниченные производные по всем переменным при всех $x_1, x_2, t \geq t_0$ определено-положительные симметрические матрицы, удовлетворяющие обобщенным критериям Сильвестра [3]. Тогда уравнения (1.1) при введении в правую часть "обобщенных сил" управления Q_1

и Q_2 принимают вид

$$A(x_1, x_2, t)\ddot{x}_1 = AA_1^{-1}B_1 + AA_1^{-1}Q_1$$

$$N(x_1, t)\dot{x}_2 = NN_1^{-1}K_1 + NN_1^{-1}Q_2$$

Умножая скалярно первое уравнение на y , а второе на x_2 , получим аналог уравнения (2.2), из которого следует, что при значениях

$$\begin{aligned} Q_1 &= -B_1 + A_1 A^{-1} \left[-Dy - F_1 x_1 + A \frac{\partial f}{\partial x_1} y + A \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{dA(x_1, x_2, t)}{dt} y \right] \\ Q_2 &= -K_1 + N_1 N^{-1} \left[-F_2 x_2 - \frac{1}{2} \frac{dN(x_1, t)}{dt} x_2 \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

получим уравнение вида (2.4)

При таком построении управлений условия существования и единственности решений системы (1.1) не нарушаются во всем фазовом пространстве при всех $t \geq t_0$.

3. Повышение качества переходного процесса механической системы оптимальным управлением. Рассмотрим механическую систему

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q(q, \dot{q}, t), \quad T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q, t) \dot{q} + \dot{q}^T a(q, t) + \frac{1}{2} a_0(q, t)$$

Было показано [2], что при выборе $f = H(t)x$ и вектора обобщенных сил Q в виде

$$Q = -Dy - Fx + \frac{1}{2} A' y - \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2'}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial A(q_0 + x, t)}{\partial t} y - GHx + \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_0}{\partial x} + \frac{dAHx}{dt} \quad (3.1)$$

система обладает программным движением $q_0(t)$, стабилизированным "в целом".

Здесь

$$y = \dot{x} - H(t)x, \quad T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} T_2' = \frac{1}{2} y^T A y$$

$$b(x, t) = A(q_0 + x, t) \dot{q}_0 + a(q_0 + x, t), \quad b_0 = \dot{q}_0^T A \dot{q}_0 + 2 \dot{q}_0^T a + a_0$$

A' – $(n \times n)$ -матрица с элементами $a'_{ij} = x^T H^T \partial a_{ij} / \partial x$, a_{ij} – элемент матрицы A , $H(t)$ – произвольная ограниченная $(n \times n)$ -матрица с ограниченной и непрерывной производной по t , G – кососимметрическая матрица с элементами $g_{vi} = -\partial b_v / \partial x_i + \partial b_i / \partial x_v$, b_v , b_i – элементы вектора b , D и F – определено-положительные симметрические матрицы.

При этом для отклонений $x = q - q_0(t)$ от программного движения имеем функцию Ляпунова и ее производную по времени

$$V = T_2' + x^T Fx / 2, \quad \dot{V} = -y^T Dy + x^T (H^T F + \dot{F} / 2) x$$

где $(H^T F + \dot{F} / 2)$ – определено-отрицательная матрица.

При нелинейной замене $y = \dot{x} - f(x, t)$ с помощью нелинейной функции $f(x, t)$ с ограниченными и дифференцируемыми элементами, допускающей бесконечно малый высший предел, выбором обобщенной силы в виде, отличающемся от (3.1) заменой Hx на $f(x, t)$, получим

$$V = T_2' + x^T Fx / 2, \quad \dot{V} = -y^T Dy + f^T(x, t) Fx + x^T \dot{F} x / 2$$

Если функцию $f(x, t)$ и матрицу F выбрать так, чтобы функция $f^T Fx + x^T \dot{F} x / 2$ была

определенно-отрицательной, то показатель качества переходного процесса будет иметь следующее значение:

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[y^T D y - \left(f^T F x + \frac{1}{2} x^T \dot{F} x \right) \right] dt = V_0, \quad V_0 = V(t_0) \quad (3.3)$$

Для повышения качества переходного процесса добавим к вектору Q дополнительную составляющую $M(x, \dot{x}, t)u$, где $M - (n \times r)$ -матрица, $u - r$ -мерный вектор управления. Следуя предложенному ранее подходу [4], ищем подынтегральное выражение функционала качества оптимального управления в виде

$$W^0 = F_1(x, \dot{x}, t) + u^T R(x, \dot{x}, t)u$$

где $R -$ определенно-положительная ограниченная симметрическая $(r \times r)$ -матрица.

Построим функцию [5]

$$B^0 = \dot{V} + u^T M^T y + F_1 + u^T R u$$

Из условия $\partial B^0 / \partial u = 0$ получим $u^0 = -R^{-1} M^T y / 2$, а из условия $B^0 = 0$ имеем

$$F_1 = -\dot{V} + y^T M R^{-1} M^T y / 4$$

При этом имеем

$$W^0 = -\dot{V} + y^T M R^{-1} M^T y / 2$$

и следующий критерий качества переходного процесса:

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[y^T D y - \left(f^T F x + \frac{1}{2} x^T \dot{F} x \right) + \frac{1}{2} y^T M R^{-1} M^T y \right] dt = V_0$$

где $V_0 -$ значение $V = T_2' + x^T F x / 2$ при $t = t_0$.

Таким образом, добавление к Q оптимального управления u^0 улучшило качество переходного процесса, так как величина функционала качества при $u = 0$ (левая часть равенства (3.3)) уменьшилась на

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} y^T M R^{-1} M^T y dt$$

Если нет необходимости потребовать минимальности функционала

$$\int_{t_0}^{\infty} W^0 dt$$

то функцию F_1 можно выбрать из условия

$$0 \leq F_1 \leq -\dot{V} + y^T M R^{-1} M^T y / 4$$

При этом достигается гарантированная оценка качества переходного процесса [6]

$$\int_{t_0}^{\infty} W^0 dt \leq V_0$$

Заметим, что если задачу решать в рамках уравнений первого приближения, то члены

$$\left(\frac{1}{2} A' y - \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_2'}{\partial x} \right)$$

второго порядка малости в выражении Q можно приравнять нулю. Если при этом от матриц $H = (\partial f / \partial x)_0$, D , F потребовать, чтобы $H = H^T$ и матрицы

$$\left(D - \frac{1}{2} \frac{\partial A(q_0, t)}{\partial t} + AH \right), \left(F - AH^2 - \frac{dAH}{dt} \right)$$

были определенно-положительными, то при условии определенной положительности матрицы

$$-(H^T F' + \dot{F}' / 2), \text{ где } F' = F - dAH / dt - AH^2$$

вектор Q можно построить в виде

$$Q = -Dy - Fx + \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_0}{\partial x} - GHx$$

4. Примеры. 1°. Стабилизация ориентации спутника на эллиптической орбите. При использовании гравитационного момента для стабилизации вращательного движения ориентации спутника имеет место следующее уравнение движения [7]:

$$\ddot{\alpha} - l(v)\dot{\alpha} + m(v)\sin \alpha = 2l(v) + u$$

где

$$l(v) = \frac{2\varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \cos v}, \quad m(v) = \frac{n^2}{1 + \varepsilon \cos v}, \quad n^2 = 3 \frac{A - C}{B}, \quad \alpha = 2\Theta$$

Θ – угол отклонения оси OZ спутника от радиального положения, v – истинная аномалия, ε – эксцентриситет орбиты ($0 < \varepsilon < 1$), точками обозначены производные по v . Примем управляющий вектор u в виде суммы

$$u = u_0(v, \alpha, \dot{\alpha}) + M$$

где u_0 – управляющий момент при невозмущенном движении, M – стабилизирующий момент.

При этом уравнение возмущенного движения имеет вид [6]

$$\ddot{x} = -l(v)\dot{x} - g(v, x)\sin \frac{x}{2} + M, \quad g(v, x) = 2m(v)\cos(\alpha_0 + \frac{x}{2})$$

Введем замену

$$y = \dot{x} + Hx, \quad H = \text{const} > 0$$

Заменяя $\ddot{x}$ на $\ddot{x} = \dot{y} - Hy + H^2x$, получим

$$\dot{y} = -l(v)(y - Hx) - H^2x + Hy - g(v, x)\sin \frac{x}{2} + M$$

Умножим это уравнение на y и выберем M в виде

$$M = -D_1y - F_1x$$

Введем обозначения

$$D = D_1 - H + l(v), \quad F = F_1 + H^2 - Hl(v) + \frac{g(v, x)}{x} \sin \frac{x}{2}$$

После замены y в выражении (yFx) , перенеся $(\dot{x}Fx)$ в левую часть, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dv} (y^2 + Fx^2) = -Dy^2 - \left(FH - \frac{\dot{F}}{2} \right) x^2$$

Если потребовать выполнения условий

$$D > 0, \quad F > 0, \quad FH - \frac{\dot{F}}{2} > 0$$

то при управляющем моменте (4.1) невозмущенное движение будет стабилизировано в целом. При этом качество переходного процесса определится равенством

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[Dy^2 + \left(FH - \frac{\dot{F}}{2} \right) x^2 \right] dt = y_0^2 + Fx_0^2; \quad y_0 = y(t_0), x_0 = x(t_0) \quad (4.2)$$

2°. *Стабилизация программного движения математического маятника с подвижной точкой подвеса.* Пусть точка подвеса маятника совершает произвольно заданные плоские движения, описываемые законами $\Theta(t)$, $v(t)$ вдоль вертикальной и горизонтальной осей неподвижной системы координат.

При

$$m = 1, \quad l = 1/a, \quad a > 0$$

где l – длина маятника, m – масса, имеет место следующее уравнение движения [8]:

$$\ddot{\varphi} + a\ddot{v}(t)\cos\varphi + a\ddot{\Theta}\sin\varphi + ag\sin\varphi = M_1$$

Подставим $\varphi = \varphi_0(t) + x$, где φ_0 – заданная программа, а управляющий момент представим в виде суммы

$$M_1 = M_0 + M, \quad M_0 = \ddot{\varphi}_0 + a\ddot{v}\cos(x + \varphi_0, t)$$

где M – стабилизирующий момент. Тогда получим уравнение возмущенного движения в виде

$$\ddot{x} + k\sin(x + \varphi_0) = M, \quad k = a(\ddot{\Theta} + g)$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\ddot{x} = -g(x, t)\sin\frac{x}{2} + M, \quad g = 2k\cos\left(\varphi_0 + \frac{x}{2}\right)$$

Итак, получили уравнение, являющееся частным случаем уравнения возмущенного движения, полученного в примере 1 при $l = 0$. Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y^2 + Fx^2) = -Dy^2 - \left(FH - \frac{\dot{F}}{2} \right) x^2$$

$$D = D_1 - H, \quad F = F_1 + H^2 + \frac{g(x, t)}{x} \sin\frac{x}{2}, \quad y = \dot{x} + Hx, \quad H = \text{const} > 0$$

где D_1, F_1 – элементы стабилизирующего момента (4.1), удовлетворяющие условиям

$$D > 0, \quad F > 0$$

При стабилизации таким моментом достигается показатель качества переходного процесса (4.2).

3°. *Стабилизация программного движения гиromаятника на подвижном основании.* Пусть на платформу, совершающую вертикальное движение по закону $\zeta_0 = \zeta(t)$, помещен гиromаятник, имеющий угловую скорость собственного вращения, равную $\dot{\varphi}$. Положение оси OZ симметрии гиromаятника относительно неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$ (ось $O\zeta$ – вертикальна) будем задавать углами α и β ([3, с. 56]). При этом кинетическая энергия T и потенциальная энергия Π гиromаятника

имеют вид

$$T = \frac{1}{2} A(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} C(\dot{\varphi} + \dot{\beta} \sin \alpha)^2 - \\ - Ml\dot{\zeta}_0(\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta) + \frac{1}{2} M\dot{\zeta}_0^2$$

$$\Pi = Mg\zeta + Mgl \cos \alpha \cos \beta$$

где M – масса, l – расстояние от точки опоры до центра тяжести, A – момент инерции относительно осей OX , OY , C – относительно оси OZ .

Движение гиromаятника будем описывать уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T_2}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q; \quad q_1 = \alpha, \quad q_2 = \beta, \quad q_3 = \varphi$$

Для получения уравнений возмущенного движения заменим q на $q_0(t) + x$. Получим

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} A(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} C(\dot{x}_3^2 + \dot{x}_2^2 \sin^2 \alpha) - C\dot{x}_2 \dot{x}_3 \sin \alpha$$

$$T_1 = \dot{x}^T b(x, t), \quad T_0 = \frac{1}{2} b_0(x, t)$$

$$b = (b_1, b_2, b_3)$$

$$b_1 = A\dot{\alpha}_0 - Ml\dot{\zeta}_0 \sin(\alpha_0 + x_1) \cos(\beta_0 + x_2)$$

$$b_2 = [A \cos^2(\alpha_0 + x_1) + C \sin(\alpha_0 + x_1)]\dot{\beta}_0 - C\dot{\varphi}_0 \sin(\alpha_0 + x_1) - \\ - Ml\dot{\zeta}_0 \cos(\alpha_0 + x_1) \sin(\beta_0 + x_2)$$

$$b_3 = -C\dot{\beta}_0 \sin(\alpha_0 + x_1) + C\dot{\varphi}_0$$

$$b_0 = A[\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2 \cos^2(\alpha_0 + x_1)] + C[\dot{\varphi}_0 - \dot{\beta}_0 \sin(\alpha_0 + x_1)]^2 - \\ - 2Ml\dot{\zeta}_0[\dot{\alpha}_0 \sin(\alpha_0 + x_1) \cos(\beta_0 + x_2) + \\ + \dot{\beta}_0 \cos(\alpha_0 + x_1) \sin(\beta_0 + x_2)] + M\dot{\zeta}_0^2$$

Заметим, что элементами (3×3) -матрицы A^0 квадратичной формы T_2 являются

$$a_{11} = A, \quad a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0, \quad a_{22} = A \cos^2(\alpha_0 + x_1) + C \sin^2(\alpha_0 + x_1) \\ a_{23} = a_{32} = -C \sin(\alpha_0 + x_1), \quad a_{33} = C$$

Трехмерный вектор обобщенных сил выберем в виде (3.1) с добавлением в правой части слагаемого $\partial \Pi / \partial q$ и заменой A на A^0 . При этом имеет место программное движение

$$\alpha = \alpha_0(t), \quad \beta = \beta_0(t), \quad \varphi = \varphi_0(t)$$

стабилизированное в целом. Входящие в Q величины, не указанные выше, имеют следующие выражения:

$$T_2' = \frac{1}{2} A(y_1^2 + y_2^2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} C(y_3^2 + y_2^2 \sin^2 \alpha) - Cy_2 y_3 \sin \alpha, \quad \alpha = \alpha_0 + x_1$$

A' – (3×3) -матрица с элементами a'_{ij} , определяемыми через элементы a_{ij} матрицы A^0 в виде $a'_{ij} = x^T H^T \partial a_{ij} / \partial x$, $y = \dot{x} - H(t)x$, $H(t)$ – произвольная (3×3) -матрица с ограниченными и непрерывными элементами, G – кососимметрическая (3×3) -матрица с элементами $g_{ij} = -\partial b_v / \partial x_i + \partial b_i / \partial x_v$, b_v и b_i – элементы вектора b , D , F – определенно-положительные симметрические матрицы.

При таком выборе Q имеем функцию Ляпунова и ее производную по времени в виде (3.2), где $H(t)$ выбирается так, чтобы матрица $(H^T F + \dot{F}/2)$ была определенно-отрицательной. При этом получим следующий показатель качества переходного процесса:

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[y^T D y - x^T \left(H^T F + \frac{\dot{F}}{2} \right) x \right] dt = V_0, \quad V_0 = V(t_0) \quad (4.3)$$

Этот показатель можно улучшить путем добавления к Q дополнительной составляющей u^0 , требуя от нее достижения минимума функционала

$$\int_{t_0}^{\infty} [-V + (u^0)^2] dt$$

Так же, как в разд. 3, получим $u^0 = -y/2$, при котором для улучшенного показателя качества имеем соотношение, отличающееся от (4.3) добавлением в подынтегральное выражение слагаемого $y^2/2$. Заметим, что значение функционала качества при $u^0 = 0$ уменьшается на

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} y^2 dt$$

Теперь рассмотрим один важный частный случай, когда невозмущенным состоянием является вертикальное положение оси гиromаятника $\alpha_0 = \dot{\alpha}_0 = \beta_0 = \dot{\beta}_0 = 0$ при постоянной скорости собственного вращения вокруг оси OZ ($\dot{\phi} = \omega = \text{const}$). Тогда положение оси OZ определяется обобщенными координатами $q_1 = \alpha$, $q_2 = \beta$.

При этом

$$T_2 = \frac{1}{2} A(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \cos^2 x_1) + \frac{1}{2} C \dot{x}_2^2 \sin^2 x_1$$

$$T_1 = \dot{x}_1 b_1 + \dot{x}_2 b_2, \quad T_0 = \frac{1}{2} (C \omega^2 + M \dot{\zeta}_0^2), \quad b_0 = C \omega^2 + M \dot{\zeta}_0^2,$$

$$T'_2 = \frac{1}{2} A(y_1^2 + y_2^2 \cos^2 x_1) + \frac{1}{2} C y_2^2 \sin^2 x_1$$

$$b_1 = -M l \dot{\zeta}_0 \sin x_1 \cos x_2, \quad b_2 = -C \omega \sin x_1 - M l \dot{\zeta}_0 \cos x_1 \sin x_2$$

$$g_{12} = -g_{21} = C \omega \cos x_1$$

Элементы матрицы квадратичной формы T_2 имеют вид

$$a_{11} = A, \quad a_{22} = A \cos^2 x_1 + C \sin^2 x_1, \quad a_{12} = a_{21} = 0$$

Следовательно, имеют место равенства

$$\frac{\partial A^0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial b_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial t} = \begin{Bmatrix} -M l \ddot{\zeta}_0 \sin x_1 \cos x_2 \\ -M l \ddot{\zeta}_0 \cos x_1 \sin x_2 \end{Bmatrix}$$

Выберем $H = -I$, где I – единичная матрица. Тогда

$$y = \dot{x} + Ix$$

$$\frac{dA^0 Hx}{dt} = -A^0 \dot{x} - \dot{A}^0 x = \begin{Bmatrix} -A\dot{x}_1 \\ -(A \cos^2 x_1 + C \sin^2 x_1)\dot{x}_2 - (C - A)\dot{x}_1 x_2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x} = \begin{Bmatrix} (C - A) \sin 2x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad a'_{11} = 0$$

$$a'_{22} = (A - C)x_1 \sin 2x_1, \quad A'y = \begin{Bmatrix} 0 \\ (A - C)x_1 y_2 \sin 2x_1 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(C - A)\dot{x}_2^2 \sin 2x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial T'_2}{\partial x} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(C - A)y_2^2 \sin 2x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \begin{Bmatrix} -Mgl \sin x_1 \cos x_2 \\ -Mgl \cos x_1 \sin x_2 \end{Bmatrix}, \quad G = \begin{Bmatrix} 0 & -C\omega \cos x_1 \\ C\omega \cos x_1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Если задачу решать в первом приближении, то имеем

$$Q = \begin{Bmatrix} -Mglx_1 \\ -Mglx_2 \end{Bmatrix} - D \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 + x_1 \\ \dot{x}_2 + x_2 \end{Bmatrix} - F \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} - \\ - \begin{Bmatrix} Ml\ddot{\zeta}_0 x_1 \\ Ml\ddot{\zeta}_0 x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A\dot{x}_1 \\ A\dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -C\omega x_2 \\ +C\omega x_1 \end{Bmatrix}$$

Если D, F выберем в виде диагональных постоянных матриц с положительными элементами d_1, d_2 и f_1, f_2 соответственно, то получим

$$Q_1 = -x_1(Mgl + d_1 + f_1 + Ml\ddot{\zeta}_0) - C\omega x_2 - \dot{x}_1(d_1 - A)$$

$$Q_2 = C\omega x_1 - x_2(Mgl + d_2 + f_2 + Ml\ddot{\zeta}_0) - \dot{x}_2(d_2 - A)$$

При этом функция Ляпунова и ее производная по времени выражаются в виде

$$V = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2)$$

$$\dot{V} = -d_1 y_1^2 - d_2 y_2^2 - f_1 x_1^2 - f_2 x_2^2$$

Следовательно, имеет место следующий показатель качества переходного процесса:

$$\int_{t_0}^{\infty} (d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2) dt = V_0, \quad V_0 = V(t_0) \quad (4.4)$$

Если для повышения качества переходного процесса к вектору Q добавить составляющую u^0 оптимального управления, то, следуя изложенному в разд. 3, имеем $u^0 = -y/2$, а также улучшенный показатель качества переходного процесса, отличающийся от (4.4) добавлением в подынтегральное выражение слагаемого $(y_1^2 + y_2^2)/2$.

При этом величина показателя качества при $u^0 = 0$ улучшается на величину

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (y_1^2 + y_2^2) dt$$

Автор благодарит В.В. Румянцеву за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01193).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухаметзянов И.А. Построение одного семейства функций Ляпунова // Вестн. РУДН. Сер. Прикл. математика и информатика. 1995. № 1. С. 9–12.
2. Мухаметзянов И.А. Построение систем асимптотически устойчивого в целом программного движения // Вестн. РУДН. Сер. Прикл. математика и информатика. 1998. № 1. С. 16–21.
3. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
4. Румянцев В.В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440–456.
5. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
6. Андреев А.С., Безгласный С.П. О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 44–51.
7. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
8. Безгласный С.П. К задаче о стабилизации нестационарных программных движений математического маятника // Ученые записки УлГУ. 1997. Вып. 4. С. 19–23.

Москва

Поступила в редакцию
17.XI.1999