

УДК 531.539

© 2000 г. О.В. Холостова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ "СПЯЩЕГО" ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Рассматривается движение волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания произвольной частоты и амплитуды. Исследуется частное движение, когда волчок вращается вокруг вертикально расположенной оси симметрии с постоянной угловой скоростью ("спящий" волчок). Дано полное решение задачи об устойчивости такого движения при всех допустимых значениях параметров задачи.

Некоторые аспекты движения волчка Лагранжа при вертикальных гармонических колебаниях точки подвеса рассмотрены ранее [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение волчка Лагранжа (динамически симметричного твердого тела, центр масс которого лежит на оси симметрии) относительно точки его подвеса O . Будем считать, что точка O совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\xi(t) = a_* \cos \Omega t$ относительно некоторой фиксированной точки.

Введем поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$ (ось OZ направлена вертикально вверх) и связанную с волчком систему координат $Oxyz$, оси которой совпадают с главными осями инерции волчка для точки O , причем ось Oz направлена по оси его динамической симметрии и центр масс G лежит на положительной полуоси Oz ($OG = z_G$, $z_G > 0$). Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера.

Кинетическая и потенциальная энергия волчка вычисляются по формулам [1]

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 - m z_G \dot{\xi} \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} A (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} C (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2 \quad (1.1)$$

$$\Pi = m g z_G \cos \theta + m g \xi(t)$$

где m – масса волчка, A и C – соответственно экваториальный и осевой моменты инерции.

Координаты ψ и ϕ циклические; обозначив постоянные значения импульсов p_ψ и p_ϕ соответственно через $A\Omega a$ и $A\Omega b$ (a и b – безразмерные постоянные), получим из (1.1) следующие выражения для угловых скоростей прецессии и собственного вращения волчка:

$$\psi' = \frac{a - b \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \phi' = \frac{A}{C} b - \frac{(a - b \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной $\tau = \Omega t$.

Исследование движения волчка сводится к рассмотрению системы с одной степенью свободы с обобщенной координатой θ ; приведенный гамильтониан имеет

вид [1]

$$H = \frac{(a - b \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} (p_\theta - \beta \sin \tau \sin \theta)^2 + d \cos \theta \quad (1.2)$$

В (1.2) p_θ – импульс (безразмерный), отвечающий координате θ , а параметры β и d определены по формулам

$$\beta = \frac{a_*}{l_0}, \quad d = \frac{mgz_G}{A\Omega^2}$$

где $l_0 = A/(mz_G)$ – приведенная длина тела как физического маятника. Величина β ($\beta \geq 0$) характеризует амплитуду колебаний точки подвеса, а параметр d ($d > 0$) – положение центра масс волчка на оси симметрии.

Пусть значения постоянных a и b циклических интегралов связаны соотношением $|a| = |b| \neq 0$. При $a = b$ гамильтониан (1.2) и дифференциальное уравнение движения имеют вид

$$H = \frac{1}{2} \zeta \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} (p_\theta - \beta \sin \tau \sin \theta)^2 + d \cos \theta \quad (\zeta = a^2) \quad (1.3)$$

$$\theta'' + \frac{\zeta \operatorname{tg}(\theta/2)}{2 \cos^2(\theta/2)} + (-d + \beta \cos \tau) \sin \theta = 0 \quad (1.4)$$

В случае $a = -b$ гамильтониан получается из (1.3) путем замены $\operatorname{tg}^2(\theta/2)$ на $\operatorname{ctg}^2(\theta/2)$, а уравнение движения – из (1.4) путем замены $\operatorname{tg}(\theta/2)/\cos^2(\theta/2)$ на $-\operatorname{ctg}(\theta/2)/\sin^2(\theta/2)$.

Уравнение (1.4) имеет частное решение (положение равновесия) $\theta = 0$, а соответствующее уравнение при $a = -b$ – решение $\theta = \pi$, отвечающие такому движению, когда волчок вращается вокруг вертикально расположенной оси симметрии с постоянной угловой скоростью; в случае $a = b$ центр масс волчка находится выше точки подвеса ("перевернутый" волчок), а в случае $a = -b$ – ниже этой точки ("висящий" волчок).

При отсутствии колебаний точки подвеса имеем классический "спящий" волчок Лагранжа; "висящий" волчок устойчив, а условие устойчивости "перевернутого" волчка есть известное условие Майевского – Четаева $C^2 \omega^2 \geq 4A mgz_G$ (ω – угловая скорость вращения волчка вокруг оси симметрии), которое в обозначениях данной работы имеет вид

$$\zeta/4 \geq d \quad (1.5)$$

Цель работы – решение вопроса об устойчивости "спящего" волчка Лагранжа (по отношению к переменным θ, p_θ) при наличии вертикальных гармонических колебаний точки подвеса произвольной частоты и амплитуды.

Случай $|a| = |b| = 0$ отвечает движению волчка как физического маятника. Вопрос об устойчивости относительных равновесий математического маятника на вертикали при вертикальных гармонических колебаниях точки его подвеса решен ранее [2].

Положив $\theta = q$ в (1.4) и $\theta = \pi + q$ в соответствующем уравнении для случая $a = -b$, получим уравнения возмущенного движения. Если во втором из этих уравнений заменить τ на $\tau + \pi$, а d на $-d$, то оба уравнения возмущенного движения (для случаев $a = b$ и $a = -b$) совпадут. Поэтому достаточно рассмотреть уравнение (1.4) и устойчивость его положения равновесия $\theta = 0$, считая, что $\beta > 0$ и $-\infty < d < +\infty$. При $\beta > 0$, $d > 0$ выводы будут относиться к "перевернутому" волчку ($a = b$), а при $\beta > 0$, $d < 0$ – к "висящему" волчку ($a = -b$).

Сделаем в (1.3) каноническую унивалентную замену переменных $\theta, p_\theta \rightarrow q, p$ по

формулам $q = \theta$, $p = p_\theta - \beta \sin \tau \sin \theta$. Гамильтониан преобразуется к виду

$$H = \frac{1}{2} p^2 + (d - \beta \cos \tau) \cos q + \frac{1}{2} \zeta \operatorname{tg}^2 \frac{q}{2} \quad (1.6)$$

В окрестности положения равновесия $q = 0$, $p = 0$ разложим выражение (1.6) в ряд по степеням q и p :

$$H = H_2 + H_4 + \dots \quad (1.7)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} (\alpha + \beta \cos \tau) q^2, \quad H_4 = -\frac{1}{24} \left(\alpha - \frac{3}{4} \zeta + \beta \cos \tau \right) q^4; \quad \alpha = \frac{1}{4} \zeta - d$$

Так как $\zeta > 0$, то для "висящего" волчка ($d < 0$) параметр α всегда положителен; для "перевернутого" же волчка ($d > 0$) $-\infty < \alpha < +\infty$, при этом неравенство $\alpha \geq 0$, согласно (1.5), есть условие устойчивости такого волчка в классическом случае.

Рассмотрим вопрос об устойчивости положения равновесия $q = 0$, $p = 0$ системы с гамильтонианом (1.7) при всех допустимых значениях параметров α , β и ζ . Затем, используя последнее соотношение (1.7), можно вместо ζ перейти к параметру d и интерпретировать полученные выводы об устойчивости применительно к "перевернутому" ($d > 0$) или "висящему" ($d < 0$) волчку.

2. Устойчивость в линейном приближении. Линеаризованные уравнения движения системы с гамильтонианом (1.7) сводятся к уравнению Матье вида

$$q'' + (\alpha + \beta \cos \tau) q = 0 \quad (2.1)$$

Вопрос об устойчивости решения $q = 0$ уравнения (2.1) подробно изучен; приведем необходимые в дальнейшем краткие сведения [3–5].

Пусть $X(\tau) = \|x_{ij}(\tau)\|_{i,j=1}^2$ ($x_{21} = x'_{11}$, $x_{22} = x'_{12}$) – фундаментальная матрица решений линеаризованной системы, описываемой гамильтонианом H_2 (см. (1.7)), удовлетворяющая условию $X(0) = E$, где E – единичная матрица. Функции $x_{11}(\tau)$, $x_{22}(\tau)$ четны, а $x_{12}(\tau)$, $x_{21}(\tau)$ нечетны по τ . Характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид

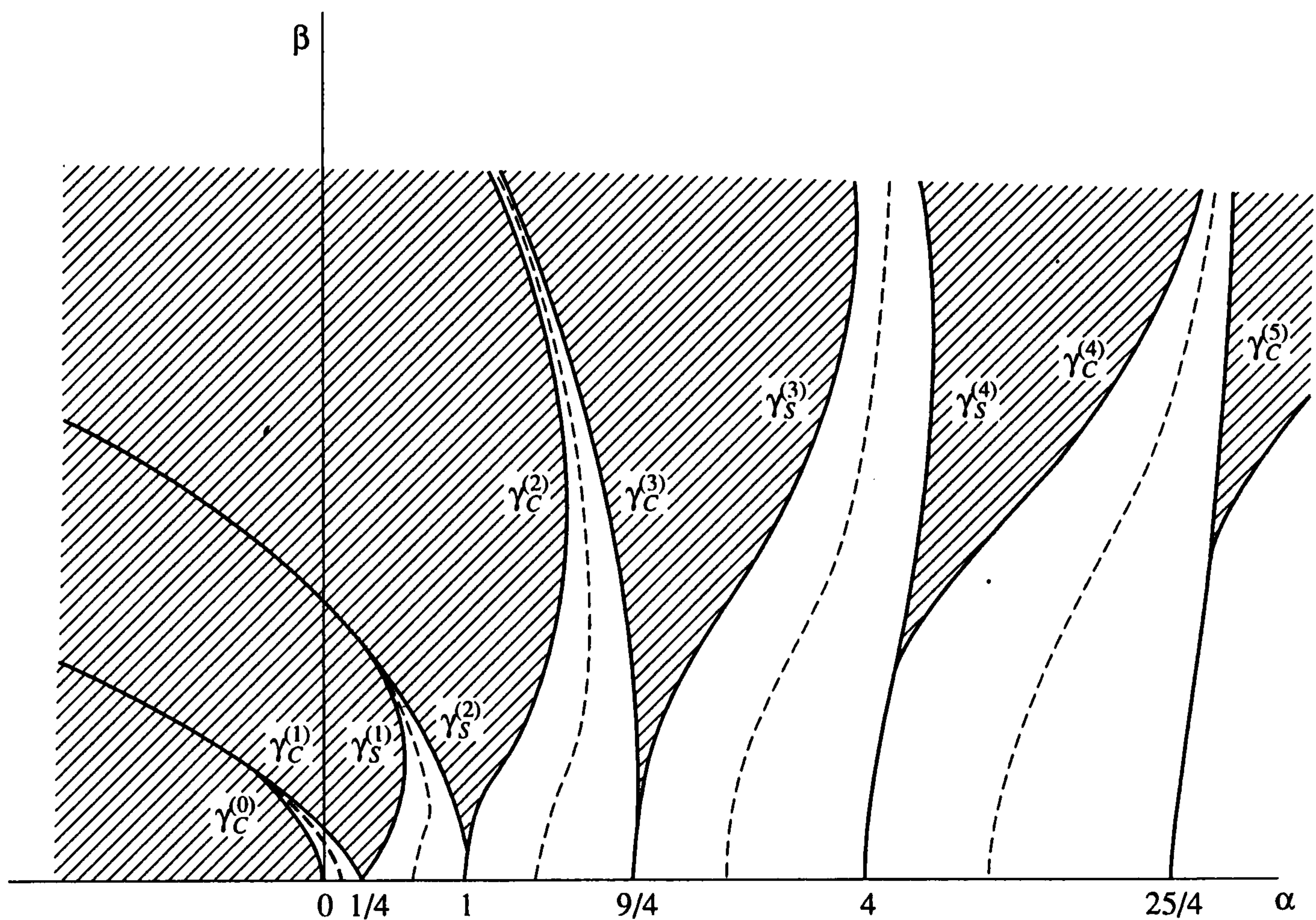
$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0, \quad A = x_{11}(2\pi) = x_{22}(2\pi) \quad (2.2)$$

На фиг. 1 в плоскости параметров (α, β) ($-\infty < \alpha < +\infty$, $\beta \geq 0$) показаны области устойчивости и неустойчивости нулевого решения уравнения (2.1). В заштрихованных областях один из корней характеристического уравнения (2.2) по модулю больше единицы, и имеет неустойчивость (причем не только в линейной задаче, но и для полной системы уравнений возмущенного движения, что следует из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [6]).

В незаштрихованных областях корни уравнения (2.2) комплексно-сопряженные и имеют модули, равные единице, т.е. выполняются условия устойчивости в линейном приближении. Обозначим через g_n ($n = 1, 2, \dots$) область устойчивости, переходящую при $\beta \rightarrow 0$ в интервал $(n-1)^2/4 < \alpha < n^2/4$ оси β . Характеристические показатели $\pm i\lambda$ ($\lambda > 0$) в областях g_n чисто мнимые, величина λ определяется из соотношения $\cos 2\pi\lambda = A$ ($|A| < 1$).

Все области устойчивости пересекают ось $\alpha = 0$ и с ростом β становятся очень узкими; тангенс угла наклона ограничивающих их кривых стремится к -1 при $\beta \rightarrow +\infty$.

Криволинейные границы областей устойчивости и неустойчивости выходят попарно из точек $\alpha = n^2/4$ ($n = 1, 2, \dots$) оси $\beta = 0$; при малых β эти пары кривых имеют касание порядка $n-1$. Обозначим через $\gamma_C^{(2k-2)}$, $\gamma_C^{(2k-1)}$ и $\gamma_S^{(2k-1)}$, $\gamma_S^{(2k)}$ границы областей g_{2k-1} и g_{2k} ($k = 1, 2, \dots$) соответственно. На кривых $\gamma_C^{(0)}$, $\gamma_C^{(2k)}$, $\gamma_S^{(2k)}$ ($k = 1,$



Фиг. 1

2,...) имеем резонанс первого порядка (корни ρ_1 и ρ_2 уравнения (2.1) равны единице), на кривых $\gamma_C^{(2k-1)}$, $\gamma_S^{(2k-1)}$ ($k = 1, 2, \dots$) – резонанс второго порядка ($\rho_1 = \rho_2 = -1$).

Элементы фундаментальной матрицы линеаризованной системы уравнений возмущенного движения для точек граничных кривых $\gamma_C^{(m)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) определяются четной функцией Матье первого рода и отвечающей ей функцией Матье второго рода, а для точек кривых $\gamma_S^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$) – нечетной функцией Матье первого рода и соответствующей функцией Матье второго рода. Функции Матье первого рода 2π -периодичны по τ при четных и 4π -периодичны по τ при нечетных значениях m , а функции Матье второго рода неперiodичны и неограниченны. Поэтому на граничных кривых общее решение линеаризованной системы уравнений неограничено, а рассматриваемое положение равновесия неустойчиво в линейном приближении.

В следующих разделах дается строгое решение вопроса об устойчивости внутри областей g_n устойчивости в линейном приближении и на граничных кривых. Используются методы и алгоритмы, разработанные ранее [7–10], а также некоторые соотношения, полученные [2] при решении задачи об устойчивости относительных положений равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса.

3. Анализ устойчивости в областях g_n . Нерезонансный случай. Рассмотрим сначала вопрос об устойчивости системы с гамильтонианом (1.7) для значений α и β , лежащих внутри областей g_n устойчивости в линейном приближении. Для этого при помощи ряда канонических преобразований приведем гамильтониан возмущенного движения к нормальной форме.

При помощи линейной 2π -периодической по τ канонической замены переменных q , $p \rightarrow q_*, p_*$ вида [9]

$$q = n_{11}(\tau)q_* + n_{12}(\tau)p_*, \quad p = n_{21}(\tau)q_* + n_{22}(\tau)p_*$$

$$n_{i1}(\tau) = \kappa^{-1/2}(\mu_i \cos \lambda\tau + \nu_i \sin \lambda\tau), \quad n_{i2}(\tau) = \kappa^{-1/2}(-\mu_i \sin \lambda\tau + \nu_i \cos \lambda\tau) \quad (3.1)$$

$$\mu_i = \sin 2\pi\lambda x_{i2}(\tau), \quad v_i = -x_{12}(2\pi)x_{i1}(\tau), \quad i = 1, 2$$

$$\kappa = x_{12}(2\pi)\sin 2\pi\lambda > 0$$

квадратичная часть гамильтониана (1.7) преобразуется к нормальной форме $\lambda(q_*^2 + p_*^2)/2$, и гамильтониан примет вид

$$H = \frac{1}{2}\lambda(q_*^2 + p_*^2) - \frac{1}{24}\left(\alpha - \frac{3}{4}\zeta + \beta\cos\tau\right)(n_{11}q_* + n_{12}p_*)^4 + O_6 \quad (3.2)$$

где O_6 – совокупность членов не ниже шестой степени относительно q_* и p_* .

Величина λ определяется из соотношения $\cos 2\pi\lambda = A$; для устранения неоднозначности такого определения учтем, что $\lambda = \sqrt{\alpha}$ при $\beta = 0$, и примем во внимание свойство непрерывности характеристических показателей по β . Тогда получим, что $\lambda = (2\pi)^{-1} \arccos A + k - 1$ в областях g_{2k-1} и $\lambda = -(2\pi)^{-1} \arccos A + k$ в областях g_{2k} ($k = 1, 2, \dots$).

Пусть сначала в системе не реализуется резонанс четвертого порядка, т.е. величина 4λ не равна целому числу. Кривая резонанса четвертого порядка существует, и только одна, в каждой из областей g_n ($n = 1, 2, \dots$). На этой кривой $4\lambda = 2n - 1$, она выходит из точки $\alpha_0 = (2n - 1)^2/16$ оси $\beta = 0$, при малых β задается уравнением

$$\alpha = \alpha_0 + \beta^2/(2(4\alpha_0 - 1)) + O(\beta^4)$$

и с ростом β простирается неограниченно в области g_n . Кривые резонанса четвертого порядка показаны на фиг. 1 штриховыми линиями.

При помощи близкой к тождественной, вещественной, 2π -периодической по τ , аналитической по x, y канонической замены переменных $q_*, p_* \rightarrow x, y$ типа преобразования Биркгофа гамильтониан (3.2) можно привести к виду

$$H = \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}c_2(x^2 + y^2)^2 + O_6 \quad (3.3)$$

где постоянный коэффициент c_2 вычисляется по формуле [9] (всюду далее, за исключением последнего разд. 5, интегрирование по τ ведется в пределах от 0 до 2π)

$$c_2 = -\frac{1}{32\pi} \int \left(\alpha - \frac{3}{4}\zeta + \beta\cos\tau\right)(n_{11}^2 + n_{12}^2)^2 d\tau \quad (3.4)$$

Если $c_2 \neq 0$, то по теореме Арнольда – Мозера [7, 8] имеем устойчивость.

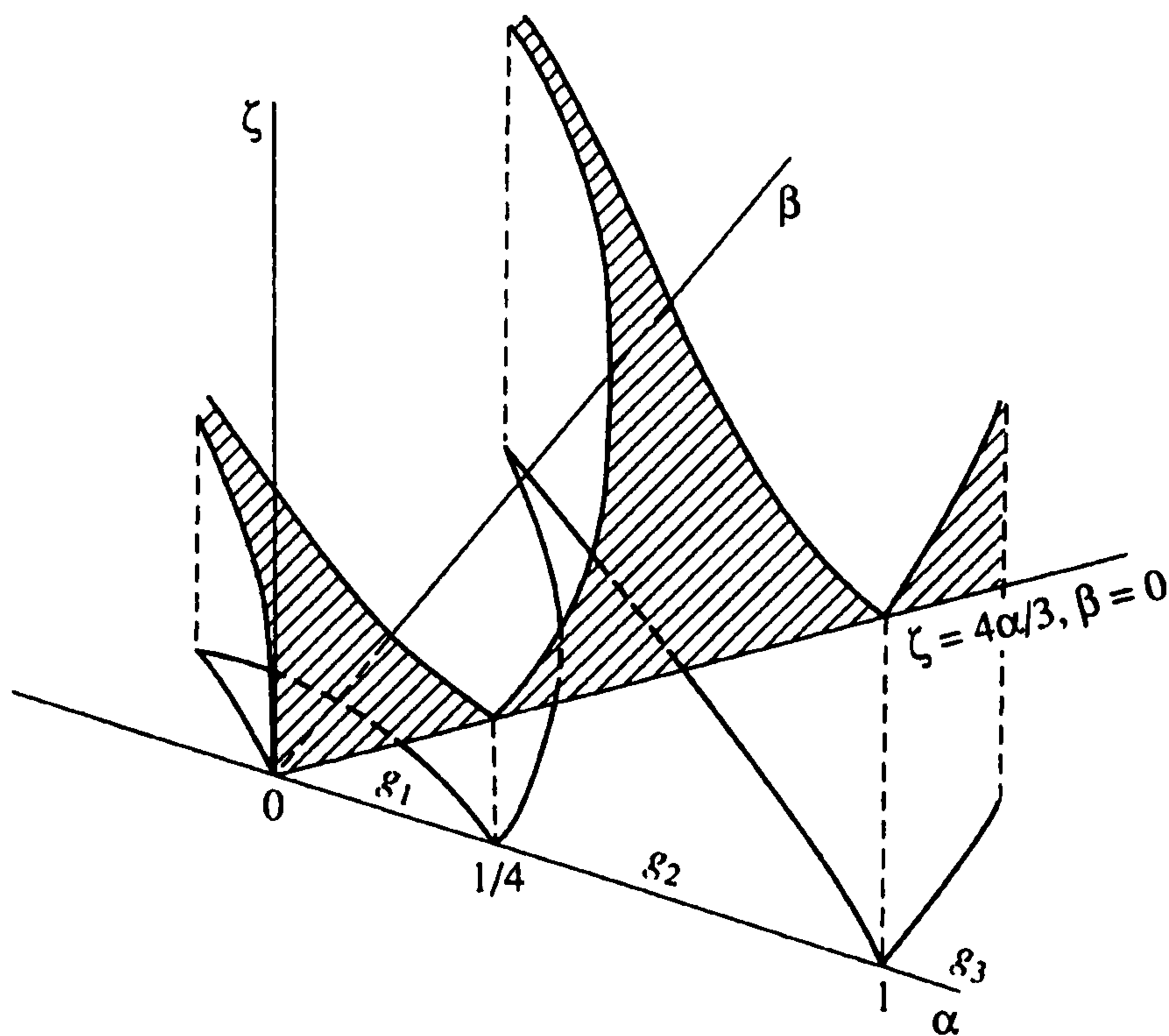
Учитывая, что входящие в выражения для n_{11} и n_{12} (см. (3.1)) функции $\mu_1(\tau)$ и $v_1(\tau)$ удовлетворяют уравнению Матье (2.1), в результате преобразования правой части (3.4) получим, что

$$c_2 = -\frac{1}{32\pi\kappa^2} \int \left[(\mu_1'v_1 + \mu_1v_1')^2 + (\mu_1\mu_1' - v_1v_1')^2 + 2(\mu_1\mu_1' + v_1v_1')^2 - \frac{3}{4}\zeta(\mu_1^2 + v_1^2)^2\right] d\tau \quad (3.5)$$

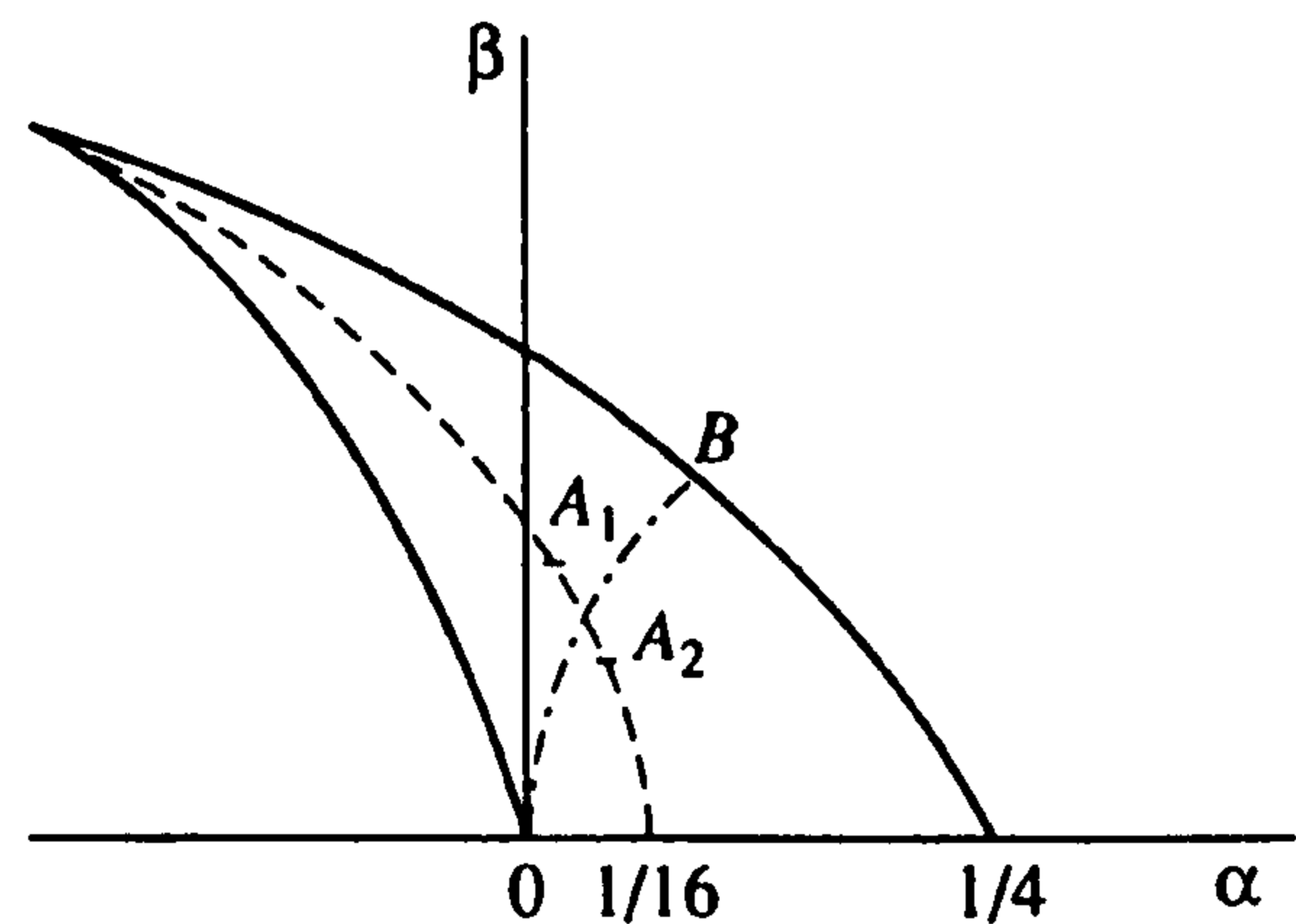
При фиксированных значениях параметров α и β коэффициент c_2 обращается в нуль, если

$$\zeta = \zeta_*(\alpha, \beta) = \frac{4}{3} \frac{\int [(\mu_1'v_1 + \mu_1v_1')^2 + (\mu_1\mu_1' - v_1v_1')^2 + 2(\mu_1\mu_1' + v_1v_1')^2] d\tau}{\int (\mu_1^2 + v_1^2)^2 d\tau} \quad (3.6)$$

Таким образом, каждой точке (α, β) , принадлежащей одной из областей g_n устойчивости в линейном приближении (кроме точек резонансных кривых), отвечает единственная точка $\zeta = \zeta_*(\alpha, \beta)$, где нарушается условие невырожденности $c_2 \neq 0$ гамильтониана (3.3).



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассмотрим сначала случай $\beta \ll 1$ (амплитуда колебаний точки подвеса волчка мала). Следуя алгоритму из [4], можно выписать элементы фундаментальной матрицы $X(\tau)$ для точек кривой $\alpha = \alpha_0 + \beta^2 / (2(4\alpha_0 - 1)) + O(\beta^4)$ (выходящей из точки $\alpha = \alpha_0$ ($\alpha_0 \neq k^2/4$, $k = 0, 1, 2, \dots$) оси $\beta = 0$), на которой $A = \cos 2\pi\sqrt{\alpha_0}$. Проведя затем ряд преобразований согласно формулам (3.1) и (3.6), получим, что в случае малых β условие невырожденности нарушается при

$$\zeta = \zeta_* = \frac{4}{3} \left[\alpha_0 - \frac{3\beta^2}{2(4\alpha_0 - 1)} \right] + O(\beta^3)$$

При произвольных значениях β соотношение (3.6) задает уравнение поверхности в пространстве параметров (α, β, ζ) . Эта поверхность состоит из счетного числа "кусков", отвечающих областям g_n плоскости (α, β) . Границами этих "кусков" в плоскости $\beta = 0$ являются отрезки прямой $\zeta = 4\alpha/3$ при $(n-1)^2/4 < \alpha < n^2/4$ ($n = 1, 2, \dots$). Построение поверхности $\zeta = \zeta_*(\alpha, \beta)$ проводилось при помощи ЭВМ; вид этой поверхности показан на фиг. 2. Расчеты показывают, что в пределах каждого "куска" функция $\zeta = \zeta_*(\alpha, \beta)$ при фиксированном значении β монотонно возрастает с ростом α , при увеличении же β величина ζ_* неограниченно растет.

Перейдем теперь к интерпретации результатов в пространстве параметров (α, β, d) . Условие невырожденности нарушается при $d_*(\alpha, \beta) = \zeta_*(\alpha, \beta)/4 - \alpha$. Расчеты показывают, что для всех точек (α, β) из областей g_n при $n \geq 2$ имеем $d_* < 0$. Поэтому в указанных областях "перевернутый" волчок ($d > 0$) устойчив при всех значениях d ; "висящий" волчок ($d < 0$, $\alpha > 0$) также устойчив, за исключением, быть может, точек $d = d_*(\alpha, \beta)$.

В области g_1 (фиг. 3) существует кривая (показанная штрих-пунктирной линией), на которой $d_*(\alpha, \beta) = 0$; эта кривая выходит из точки $(0, 0)$ и при малых β задается уравнением $\alpha = 2\beta^2 + O(\beta^3)$, она пересекает граничную кривую $\gamma_C^{(1)}$ в точке $B(0.103, 0.28)$. Для точек (α, β) , принадлежащих кривой $d_* = 0$, условие устойчивости выполняется для всех значений $d \neq 0$, т.е. и для "перевернутого" и для "висящего" волчка. Для точек области g_1 , расположенных правее кривой $d_* = 0$, имеем $d_* < 0$ (условие невырожден-

ности нарушается для "висящего" волчка), а для точек левее этой кривой $d_* > 0$ (условие невырожденности нарушается для "перевернутого" волчка).

4. Устойчивость на кривых резонанса четвертого порядка. Пусть теперь точка (α, β) принадлежит кривой резонанса четвертого порядка. Нелинейная каноническая замена переменных $q_*, p_* \rightarrow x, y$ преобразует гамильтониан (3.2) к виду

$$H = \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}c_2(x^2 + y^2)^2 + (x_{40} \cos 4\lambda\tau - y_{40} \sin 4\lambda\tau)(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) - \\ - 4(y_{40} \cos 4\lambda\tau + x_{40} \sin 4\lambda\tau)xy(x^2 - y^2) + O_6$$

где коэффициент c_2 определяется по формуле (3.5), а постоянные величины x_{40} и y_{40} задаются выражениями

$$x_{40} = \int (\chi_1 \cos 4\lambda\tau + \chi_2 \sin 4\lambda\tau) d\tau, \quad y_{40} = \int (-\chi_1 \sin 4\lambda\tau + \chi_2 \cos 4\lambda\tau) d\tau \quad (4.1)$$

$$\chi_1 = -\frac{1}{4}\chi_0[(n_{11}^2 + n_{12}^2)^2 - 8n_{11}^2n_{12}^2], \quad \chi_2 = \chi_0n_{11}n_{12}(n_{11}^2 - n_{12}^2)$$

$$\chi_0 = \frac{1}{96\pi} \left(\alpha - \frac{3}{4}\zeta + \beta \cos \tau \right)$$

Положение равновесия $q = 0, p = 0$ системы с гамильтонианом (1.7) устойчиво при выполнении условия $|c_2| > 4(x_{40}^2 + y_{40}^2)^{1/2}$ и неустойчиво в противном случае [9].

Подставляя в (4.1) выражения для n_{11} и n_{12} из (3.1), получим

$$x_{40} = \frac{1}{4\kappa^2} \int [4\mu_1^2 v_1^2 - (\mu_1^2 - v_1^2)\chi_0] d\tau, \quad y_{40} = \frac{1}{\kappa^2} \int \mu_1 v_1 (\mu_1^2 - v_1^2)\chi_0 d\tau$$

В силу нечетности подынтегральной функции в выражении для y_{40} имеем $y_{40} = 0$, и условие устойчивости примет вид $|c_2| > 4|x_{40}|$. Выражение для x_{40} преобразуем, учитывая (3.1) и уравнение Матье (2.1), к виду

$$x_{40} = \frac{1}{128\pi\kappa^2} \int [(\mu_1' v_1 + \mu_1 v_1')^2 - (\mu_1 \mu_1' - v_1 v_1')^2] d\tau - \frac{\zeta}{512\pi\kappa^2} \int [4\mu_1^2 v_1^2 - (\mu_1^2 - v_1^2)^2] d\tau \quad (4.2)$$

Граница области устойчивости определяется уравнением $c_2 = \pm 4x_{40}$. Уравнение $c_2 = 4x_{40}$ при учете (3.5) и (4.2) преобразуется к виду

$$\zeta = \zeta_1(\alpha, \beta) = 4 \frac{\int [(\mu_1' v_1 + \mu_1 v_1')^2 + (\mu_1 \mu_1' + v_1 v_1')^2] d\tau}{\int (\mu_1^4 + v_1^4 + 6\mu_1^2 v_1^2) d\tau} \quad (4.3)$$

а уравнение $c_2 = -4x_{40}$ — к виду

$$\zeta = \zeta_2(\alpha, \beta) = 4 \frac{\int (\mu_1^2 \mu_1'^2 + v_1^2 v_1'^2) d\tau}{\int (\mu_1^4 + v_1^4) d\tau} \quad (4.4)$$

Соотношения (4.3) и (4.4) задают на резонансных поверхностях, определяемых в пространстве параметров (α, β, ζ) уравнениями $4\lambda = 2k - 1$ ($k = 1, 2, \dots$), пространственные кривые, при переходе через которые меняется характер устойчивости рассматриваемого положения равновесия.

При малых значениях β величины ζ_1 и ζ_2 имеют вид

$$\zeta_{1,2} = \frac{4}{3} \left[\alpha_0 - \frac{3\beta^2}{2(4\alpha_0 - 1)} \right] + O(\beta^3), \quad \alpha_0 = \frac{(2k - 1)^2}{16} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Их главные части (до членов порядка β^2 включительно) совпадают.

Кривые $\zeta_1(\alpha, \beta)$ и $\zeta_2(\alpha, \beta)$ выходят из общей предельной точки $(\alpha_0, 0, 4\alpha_0/3)$, где имеют общую касательную. Для всех остальных точек (α, β) ($\beta \neq 0$) резонансных кривых, как показывают расчеты, $\zeta_1 < \zeta_2$. Качественный вид кривых $\zeta = \zeta_1(\alpha, \beta)$ и $\zeta = \zeta_2(\alpha, \beta)$ показан на фиг. 4 для одной из резонансных поверхностей. С ростом β разность $\zeta_2 - \zeta_1$ уменьшается, при больших значениях β кривые $\zeta = \zeta_1(\alpha, \beta)$ и $\zeta = \zeta_2(\alpha, \beta)$ неограниченно сближаются.

Пусть точка (α, β, ζ) принадлежит резонансной поверхности. Если при этом $\zeta < \zeta_1(\alpha, \beta)$ или $\zeta > \zeta_2(\alpha, \beta)$, то имеем $|c_2| > 4|x_{40}|$, и условие устойчивости удовлетворяется; если же $\zeta_1(\alpha, \beta) < \zeta < \zeta_2(\alpha, \beta)$, то выполняется неравенство с противоположным знаком, и имеем неустойчивость. Область неустойчивости на резонансной поверхности на фиг. 4 заштрихована, вне этой области имеем устойчивость.

Отвечающие ζ_1 и ζ_2 величины $d_i = \zeta_i/4 - \alpha$ ($i = 1, 2$) для точек (α, β) резонансных кривых, лежащих в областях g_n ($n \geq 2$), отрицательны при всех α и β , поэтому область неустойчивости $d_1 < d < d_2$ существует только для "висящего" волчка (в тех точках, где $\alpha > 0$), "перевернутый" волчок на этих резонансных кривых всегда устойчив.

Для резонансной кривой $4\lambda = 1$ в области g_1 (фиг. 2, штриховая линия) имеем $d_1 = 0$ в точке $A_1(0.036, 0.205)$ и $d_2 = 0$ в точке $A_2(0.042, 0.175)$. Для точек кривой $4\lambda = 1$, лежащих левее и выше точки A_1 , имеем $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, и область неустойчивости $d_1 < d < d_2$ существует для "перевернутого" волчка, а "висящий" волчок устойчив. Для точек кривой $4\lambda = 1$, лежащих правее и ниже точки A_2 , имеем $d_1 < 0$, $d_2 < 0$, и область неустойчивости существует для "висящего" волчка, а "перевернутый" волчок устойчив. Наконец, для точек резонансной кривой, находящихся между точками A_1 и A_2 , $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, и область неустойчивости имеется и для "висящего" ($d_1 < d < 0$), и для "перевернутого" ($0 < d < d_2$) волчков.

5. Исследование устойчивости на граничных кривых. Рассмотрим теперь случай, когда параметры α, β принадлежат граничным кривым. При помощи линейной, вещественной, канонической замены $q, p \rightarrow q_*, p_*$, задаваемой соотношением

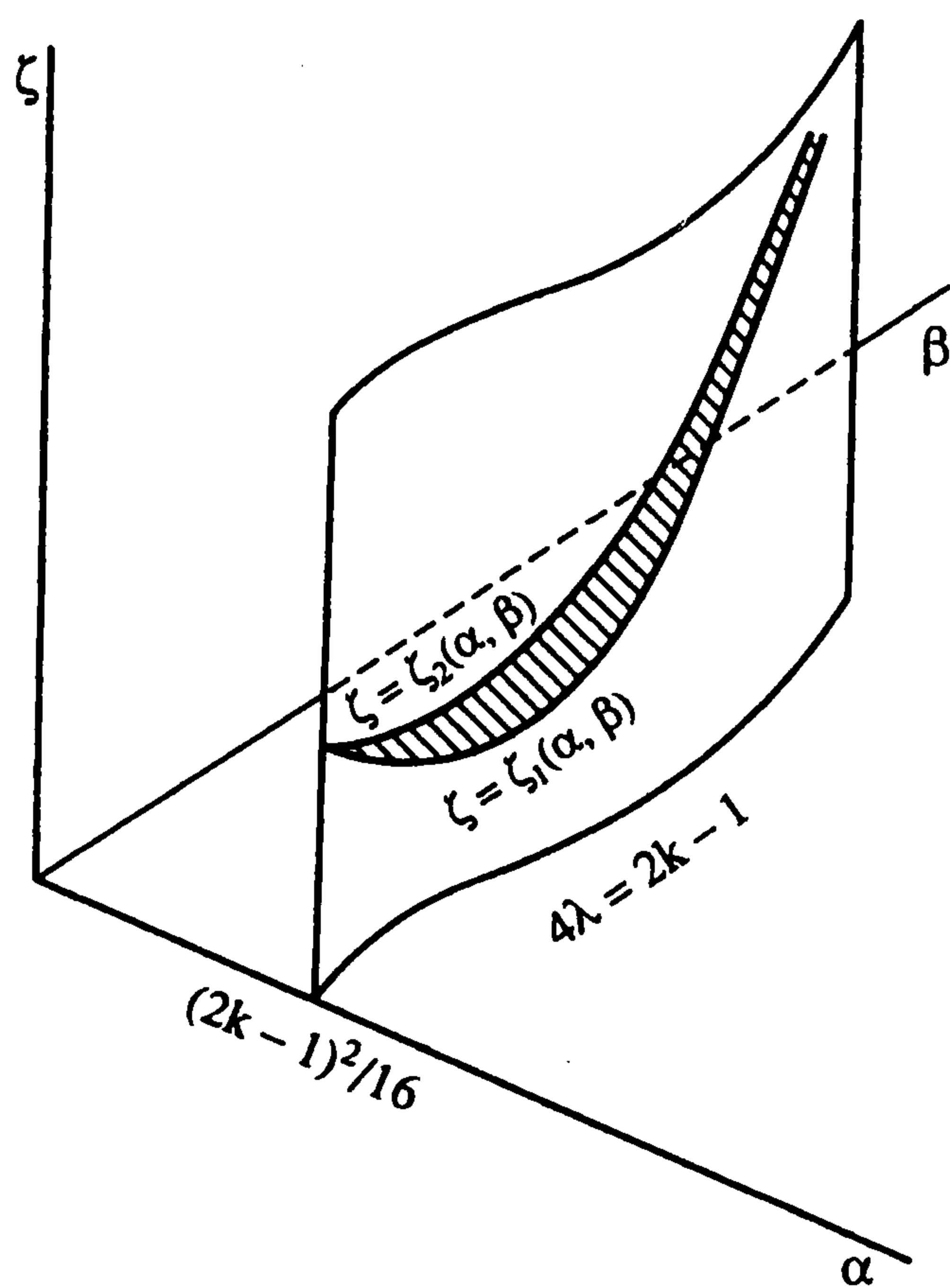
$$\|qp\|^T = N(\tau) \|q_*p_*\|^T, \quad N(\tau) = \|n_{ij}(\tau)\| \quad (5.1)$$

гамильтониан (1.7) приводится к виду

$$H = \frac{1}{2} \delta p_*^2 - \frac{1}{24} \left(\alpha - \frac{3}{4} \zeta + \beta \cos \tau \right) (n_{11} q_* + n_{12} p_*)^4 + O_6 \quad (5.2)$$

где величина δ равна 1 или -1 и вдоль каждой граничной кривой сохраняет постоянное значение.

Симплектическая матрица в (5.1) 2π -периодична по τ для точек кривых $\gamma_C^{(2k)}$ и $\gamma_S^{(2k)}$ (где имеет место резонанс первого порядка) и 4π -периодична по τ для точек кривых $\gamma_S^{(2k-1)}$ и $\gamma_C^{(2k-1)}$ (при резонансе второго порядка). Явный вид этой матрицы указан



Фиг. 4

ранее [2]. Для дальнейшего исследования потребуется только функция $n_{11}(\tau)$. Приведем ее вид, а также значение постоянной δ для точек каждой из граничных кривых [2]:

для точек кривых $\gamma_C^{(2k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$\delta = 1, \quad n_{11} = bx_{11}(\tau), \quad b = (|x_{12}(2\pi)|/(2\pi))^{1/2} \quad (5.3)$$

для точек кривых $\gamma_S^{(2k)}$ ($k = 1, 2, \dots$)

$$\delta = -1, \quad n_{11} = -cx_{12}(\tau), \quad c = (|x_{21}(2\pi)|/(2\pi))^{1/2} \quad (5.4)$$

для точек кривых $\gamma_S^{(2k-1)}$ и $\gamma_C^{(2k-1)}$ ($k = 1, 2, \dots$) величины δ равны соответственно 1 и -1 , а функции $n_{11}(\tau)$ получаются соответственно из формул (5.4) и (5.3), в которых величина 2π заменена на 4π .

В соотношениях (5.3), (5.4) и аналогичных для кривых $\gamma_S^{(2k-1)}$, $\gamma_C^{(2k-1)}$ функции $x_{ij}(\tau)$ являются элементами фундаментальных матриц решений уравнения Матье (2.1) на граничных кривых (см. разд. 2).

Нелинейная каноническая замена переменных $q_*, p_* \rightarrow x, y$ (2π -периодическая по τ для кривых $\gamma_C^{(2k)}$, $\gamma_S^{(2k)}$ и 4π -периодическая по τ для кривых $\gamma_S^{(2k-1)}$, $\gamma_C^{(2k-1)}$) преобразует гамильтониан (5.2) к следующей нормальной форме [10]:

$$H = \frac{1}{2}\delta y^2 + a_4 x^4 + O_6 \quad (5.5)$$

где a_4 – постоянный коэффициент. Если $a_4\delta > 0$, то решение $q = 0$, $p = 0$ системы с гамильтонианом (1.7) устойчиво, если же $a_4\delta < 0$ – неустойчиво [10].

Коэффициент a_4 задается соотношением

$$a_4 = -\frac{1}{48\pi s} \int_0^{2\pi s} \left(\alpha - \frac{3}{4}\zeta + \beta \cos \tau \right) n_{11}^4 d\tau \quad (5.6)$$

где $s = 1$ для кривых $\gamma_C^{(2k)}$, $\gamma_S^{(2k)}$ и $s = 2$ для кривых $\gamma_S^{(2k-1)}$, $\gamma_C^{(2k-1)}$.

Учитывая, что входящая в (5.6) функция $n_{11}(\tau)$ удовлетворяет уравнению Матье (2.1), преобразуем выражение для a_4 к виду

$$a_4 = -\frac{1}{16\pi s} \int_0^{2\pi s} n_{11}^2 n_{11}'^2 d\tau + \frac{\zeta}{64\pi s} \int_0^{2\pi s} n_{11}^4 d\tau$$

В то время как знак величины δ вдоль каждой граничной кривой сохраняется, знак коэффициента a_4 в каждой точке (α, β) граничной кривой зависит от значения параметра ζ : если $\zeta = \zeta_{**}(\alpha, \beta)$, то $a_4 = 0$; если $0 < \zeta < \zeta_{**}$, то $a_4 < 0$; если $\zeta > \zeta_{**}$, то $a_4 > 0$. Здесь

$$\zeta_{**}(\alpha, \beta) = 4 \int_0^{2\pi s} n_{11}^2 n_{11}'^2 d\tau \left(\int_0^{2\pi s} n_{11}^4 d\tau \right)^{-1} \quad (5.7)$$

На левых границах областей устойчивости (кривые $\gamma_C^{(2k)}$ и $\gamma_S^{(2k-1)}$) $\delta = 1$; для точек этих кривых при $0 < \zeta < \zeta_{**}$ имеем $a_4\delta < 0$, и рассматриваемое решение неустойчиво, при $\zeta > \zeta_{**}$ имеем $a_4\delta > 0$, и решение устойчиво. На правых границах областей устойчивости (кривые $\gamma_S^{(2k)}$ и $\gamma_C^{(2k-1)}$) $\delta = -1$, и, наоборот, при $0 < \zeta < \zeta_{**}$ имеем устойчивость ($a_4\delta > 0$), а при $\zeta > \zeta_{**}$ – неустойчивость ($a_4\delta < 0$) рассматриваемого решения.

Соотношение (5.7) задает уравнения кривых, разделяющих области устойчивости и

неустойчивости на граничных поверхностях, отвечающих в пространстве параметров (α, β, ζ) рассматриваемым граничным кривым.

При малых значениях β (малых амплитудах колебаний точки подвеса волчка) (5.7) преобразуется к следующему виду:

при $k \neq 1$ для всех граничных кривых $\gamma_C^{(2k)}$, $\gamma_S^{(2k)}$, $\gamma_S^{(2k-1)}$ и $\gamma_C^{(2k-1)}$

$$\zeta_{**} = \frac{4}{3} \left[\alpha_0 - \frac{3\beta^2}{2(4\alpha_0 - 1)} \right] + O(\beta^3)$$

где α_0 — абсциссы точек на оси $\beta = 0$, из которых выходят граничные кривые ($\alpha_0 = k^2$ для $\gamma_C^{(2k)}$, $\gamma_S^{(2k)}$ и $\alpha_0 = (2k-1)^2/4$ для $\gamma_S^{(2k-1)}$, $\gamma_C^{(2k-1)}$);

при $k = 1$

$$\zeta_{**} = \frac{4}{3} - \frac{41}{27}\beta^2 + O(\beta^3) \quad \text{для кривой } \gamma_C^{(2)}$$

$$\zeta_{**} = \frac{4}{3} + \frac{5}{27}\beta^2 + O(\beta^3) \quad \text{для кривой } \gamma_S^{(2)}$$

$$\zeta_{**} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}\beta + \frac{11}{54}\beta^2 + O(\beta^3) \quad \text{для кривой } \gamma_S^{(1)}$$

$$\zeta_{**} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\beta + \frac{11}{54}\beta^2 + O(\beta^3) \quad \text{для кривой } \gamma_C^{(1)}$$

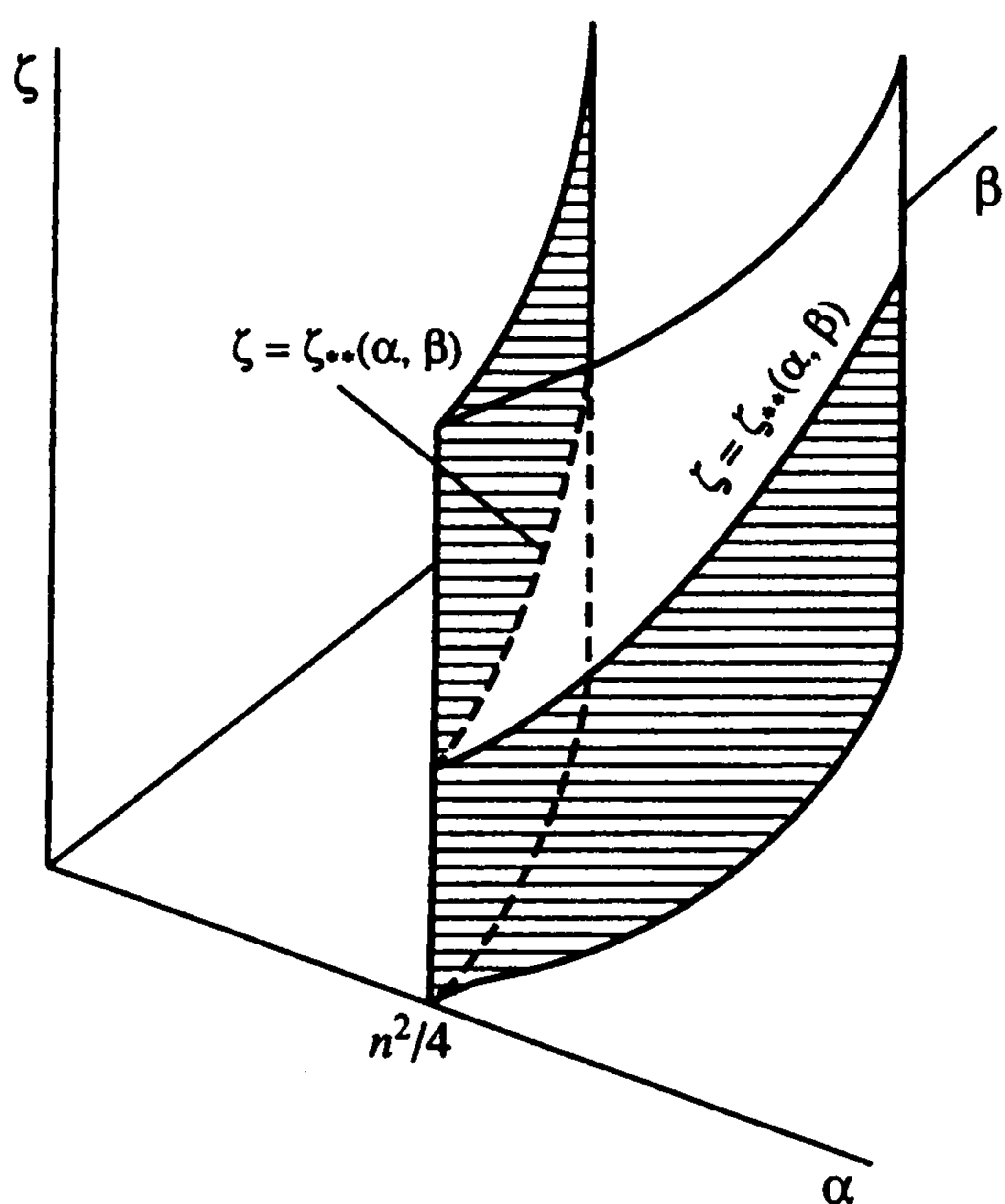
Для произвольных значений параметра β качественный вид кривых (5.7) показан на фиг. 5 на двух граничных поверхностях (отвечающих граничным кривым в плоскости (α, β) , выходящим из общей точки $(\alpha_0, 0)$ ($\alpha_0 = n^2/4$, $n = 0, 1, 2, \dots$) оси $\beta = 0$). Общая предельная (при $\beta = 0$) точка этих кривых имеет координаты $(\alpha_0, 0, 4\alpha_0/3)$; с ростом β функции $\zeta = \zeta_{**}(\alpha, \beta)$ неограниченно возрастают.

На правой из показанных на фиг. 5 граничных поверхностей (отвечающей левой границе области устойчивости в плоскости (α, β)) рассматриваемое положение равновесия $q = 0$, $p = 0$ системы с гамильтонианом (1.7) устойчиво для точек (α, β, ζ) , лежащих выше кривой $\zeta = \zeta_{**}(\alpha, \beta)$, и неустойчиво для точек ниже этой кривой. На левой граничной поверхности (отвечающей правой границе области устойчивости в плоскости (α, β)), наоборот, для точек, лежащих выше кривой $\zeta = \zeta_{**}(\alpha, \beta)$, имеем неустойчивость, для точек ниже этой кривой — устойчивость. Области неустойчивости на граничных поверхностях на фиг. 5 заштрихованы.

Пересчитаем теперь результаты относительно параметра d . Отвечающая $\zeta_{**}(\alpha, \beta)$ величина $d_{**}(\alpha, \beta) = \zeta_{**}(\alpha, \beta)/4 - \alpha$, как показывают расчеты, отрицательна для всех точек (α, β) , принадлежащих всем граничным кривым, кроме $\gamma_C^{(0)}$ и $\gamma_C^{(1)}$ (границ области g_1). Для точек кривой $\gamma_C^{(0)}$ (фиг. 3) имеем $d_{**} > 0$ (кроме предельной точки $(0, 0)$, где $d_{**} = 0$); для точек кривой $\gamma_C^{(1)}$, лежащих левее точки B (где $d_{**} = 0$), имеем $d_{**} > 0$, для точек этой кривой правее точки B — $d_{**} < 0$.

Поэтому на всех левых границах областей g_n (кроме $\gamma_C^{(0)}$) "перевернутый" волчок устойчив, а на всех правых границах (кроме $\gamma_C^{(1)}$) неустойчив. На граничной кривой $\gamma_C^{(0)}$ "перевернутый" волчок неустойчив при $0 < d < d_{**}$ и устойчив при $d > d_{**}$. На кривой $\gamma_C^{(1)}$ для точек, лежащих правее точки B (фиг. 3), "перевернутый" волчок неустойчив; для точек этой кривой левее точки B волчок неустойчив при $0 < d < d_{**}$ и устойчив при $d > d_{**}$.

"Висящий" волчок на всех левых границах областей g_n (для точек, где $\alpha > 0$) устойчив при $d_{**} < d < 0$ и неустойчив при $d < d_{**}$. На границе $\gamma_C^{(1)}$ "висящий" волчок



Фиг. 5

устойчив для точек, лежащих левее точки B (при $\alpha > 0$); для точек этой кривой правее точки B , а также для всех остальных правых границ областей g_n (при $\alpha > 0$) "висящий" волчок устойчив при $d < d_{**}$ и неустойчив при $d_{**} < d < 0$.

6. Сравнение с классическим результатом. Как указано в разд. 1, классический "висящий" волчок устойчив в области существования $\alpha > 0$, "перевернутый" волчок устойчив при $\alpha \geq 0$ и неустойчив при $\alpha < 0$. В обоих случаях условию устойчивости отвечают на фиг. 1 точки положительной полуоси $O\alpha$.

При наличии колебаний точки подвеса в плоскости параметров (α, β) выделено как для "висящего", так и для "перевернутого" волчка счетное число областей устойчивости и неустойчивости. Для "висящего" волчка эти области лежат в полуплоскости $\alpha > 0$, а для "перевернутого" волчка каждая из областей устойчивости (и неустойчивости), начинаясь в области положительных значений α , пересекает ось $\alpha = 0$ (границу устойчивости для классического волчка), и простирается неограниченно в сторону отрицательных значений α (хотя области устойчивости при $\alpha < 0$ весьма узкие).

Кроме того, наличие областей неустойчивости на резонансных поверхностях (в пространстве трех параметров задачи), а также разнообразие выводов об устойчивости на граничных поверхностях делают картину устойчивости "спящего" волчка существенно богаче и сложнее по сравнению с классическим результатом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00405).

ЛИТЕРАТУРА

1. Холостова О.В. О динамике волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 785–796.
2. Бардин Б.С., Маркеев А.П. Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 922–929.
3. Strutt M.J.O. Lamesché – Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Berlin: Springer, 1932. = Струтт М.И.О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков; Киев: Гостехиздат, 1935. 238 с.
4. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 475 с.
5. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. N.Y. etc.: Mc Graw-Hill, 1955. = Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 299 с.
6. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
7. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
8. Moser J.K. Lectures on Hamiltonian Systems. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1968. = Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
9. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
10. Иванов А.П., Сокольский А.Г. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 963–970.

Москва

Поступила в редакцию
17.II.2000