

УДК 531.38

© 2000 г. В.Н. Тхай

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ ГРИОЛИ

На плоскости двух существенных параметров задачи выделена область необходимых и (отдельно) достаточных условий устойчивости регулярных прецессий Гриоли в задаче о движении тяжелого динамически несимметричного твердого тела вокруг неподвижной точки. Также доказано существование периодических движений, близких к регулярным прецессиям Гриоли. Предложен метод вычисления характеристических показателей обратимой линейной периодической системы порядка $l + n$ ($l \geq n$), требующий построения только n решений задачи Коши.

1. Формулировка проблемы. В 1947 г. Гриоли [1] обнаружил регулярные прецессии у тяжелого твердого тела, закрепленного в такой точке, что выполнены условия

$$x_0 \sqrt{B - C} = z_0 \sqrt{A - B}, \quad y_0 = 0, \quad A > B > C \quad (1.1)$$

(x_0, y_0, z_0 – координаты центра тяжести G тела в подвижной системе координат $Oxyz$, осями, направленными вдоль осей инерции тела для неподвижной точки O ; A, B, C – главные моменты инерции тела относительно этих осей). Две замечательные особенности отличают прецессии Гриоли. Во-первых, они происходят у динамически несимметричного твердого тела, подчиненного только условиям (1.1). Во-вторых, прецессии Гриоли происходят вокруг не вертикальной, а наклонной к вертикали оси под некоторым углом β (фиг. 1)

$$\cos \beta = \frac{A - B + C}{\sqrt{(A - B)(B - C) + (A - B + C)^2}} \quad (1.2)$$

При этом скорость прецессии ω_p равна скорости собственного вращения тела ω_0 , а угол между осями этих вращений – прямой. Кроме того, ось собственного вращения проходит через центр масс тела. На фиг. 1 восходящая вертикаль γ в неподвижной точке O , мгновенная угловая скорость тела ω , а также векторы ω_p и ω_0 изображены в тот момент времени, когда они принадлежат одной и той же вертикальной плоскости Π (плоскости чертежа).

Из формулы (1.2) видно, что регулярные прецессии Гриоли возможны и для таких тел, для которых отношение (1.2) меньше $1/\sqrt{2}$. В этом случае угол $\beta > \pi/4$, и в движениях Гриоли вектор ω все время находится по одну сторону от проходящей через неподвижную точку вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости Π . Очевидно, для таких тел моменты инерции должны удовлетворять условию

$$(A - B)(B - C) > (A - B + C)^2 \quad (1.3)$$

В 1955 г. М.П. Гуляев [2] нашел явные формулы, описывающие решения Гриоли

$$p = \frac{n}{l}(x_0 - z_0 \cos \tau), \quad q = n \sin \tau, \quad r = \frac{n}{l}(z_0 + x_0 \cos \tau)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -\frac{n^2}{Pl^2} [Cz_0 \cos \tau + (B - C)x_0 \sin^2 \tau] \\
\gamma_2 &= \frac{n^2}{Pl^3} [(Ax_0^2 + Cz_0^2) - (A - C)x_0z_0 \cos \tau] \sin \tau \\
\gamma_3 &= \frac{n^2}{Pl^2} [Ax_0 \cos \tau + (A - B)z_0 \sin^2 \tau] \\
l^2 &= x_0^2 + z_0^2, \quad \tau = nt - \varepsilon + \pi/2, \quad \varepsilon = nt_0, \quad n^2 = P^2 l^2 / [(A - B)(B - C) + (A - B + C)^2]
\end{aligned}
\tag{1.4}$$

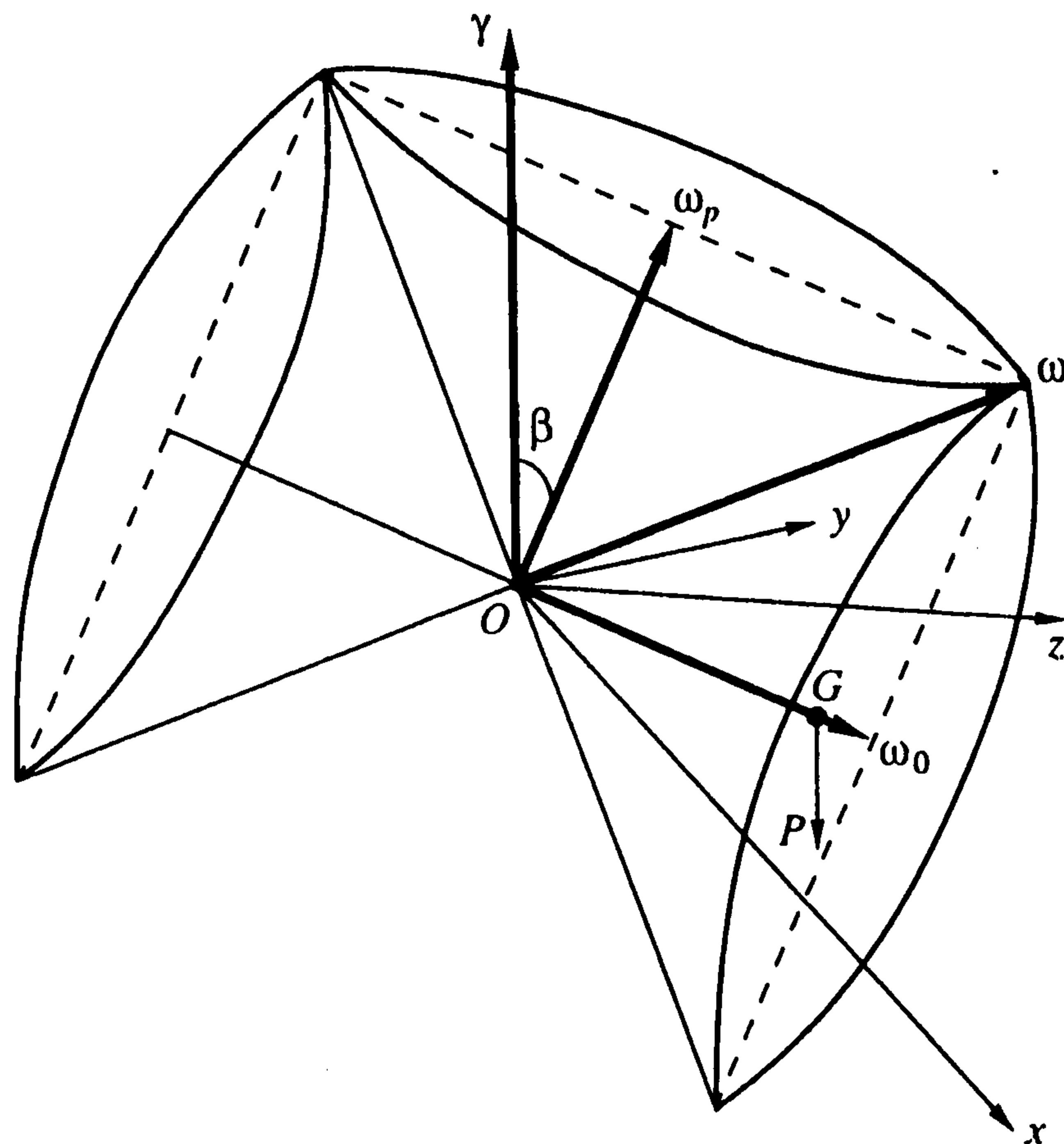
(p, q, r – проекции мгновенной угловой скорости ω на оси системы $Oxyz$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – направляющие косинусы вектора γ , $P = mg$ – вес тела, l – расстояние от неподвижной точки O до центра масс G , n – угловая скорость собственного вращения, равная угловой скорости прецессии, t_0 – постоянная времени). Видно, что для заданного тела с фиксированной точкой, удовлетворяющей условиям закрепления (1.1), возможно механически единственное движение в виде прецессии, описываемое формулами (1.4).

Получение явных выражений (1.4) позволило корректно поставить задачу об устойчивости регулярных прецессий Гриоли как задачу об устойчивости частного решения (1.4) системы описывающих движение уравнений Эйлера–Пуассона

$$A \frac{dp}{dt} - (B - C)qr = P(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q
\tag{1.5}$$

($pqr, ABC, x_0 y_0 z_0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$)

при выполнении условий (1.1). Однако данная задача представляется достаточно сложной. Действительно, во-первых, уравнения возмущенного движения будут 2π -периодическими по τ , и исследование даже линейного приближения – задача аналитически непосильная. Во-вторых, имеем очень вырожденную задачу, в которой линейное приближение содержит четырехкратный нулевой характеристический показатель с тремя группами решений. Это немедленно следует из первых интегралов уравнений Эйлера–Пуассона – интегралов энергии, кинетического момента и геомет-



Фиг. 1

рического

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = 2h(\text{const})$$

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \sigma(\text{const}) \quad (1.6)$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

Кроме того, наличие указанных нулевых показателей говорит о неустойчивости системы уравнений в вариациях, что еще больше усложняет задачу об устойчивости регулярных прецессий Гриоли.

С другой стороны, интегралы (1.6) позволяют в принципе свести уравнения Эйлера–Пуассона к системе второго порядка или к одному дифференциальному уравнению второго порядка. Эта система или уравнение привлекательны своей низкой размерностью и уже не содержат нулевых характеристических показателей, обусловленных интегралами (1.6). Однако в результате получаются [3, 4] очень сложные уравнения и, кроме того, для этих уравнений трудно получить явные формулы, описывающие решения Гриоли.

Указанные выше обстоятельства приводят к мысли, что решение задачи об устойчивости регулярных прецессий Гриоли следует искать на пути анализа достаточно простой системы уравнений (1.5), однако, имея в виду при этом мыслимую возможность привести уравнения (1.5) к системе второго порядка. Другая идея состоит в учете свойства обратимости, которым обладает система (1.3) при $y_0 = 0$. Собственно говоря, система уравнений Эйлера–Пуассона линейно обратима при закреплении тела в любой точке O . Это выражается в инвариантности системы (1.5) относительно замены (t, γ, ω) на $(-t, \gamma, -\omega)$. Свойство обратимости полезно при рассмотрении периодических движений. Так, например, из обратимости системы уравнений Эйлера–Пуассона немедленно следует периодичность движения, на котором угловая скорость ω , по крайней мере дважды, обращается в нуль.

При $y_0 = 0$ система (1.5) инвариантна также относительно замены $(t, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r)$ на $(-t, \gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3, p, -q, r)$. Другими словами, при $y_0 = 0$ система (1.5) представляет собой обратимую механическую систему с неподвижным множеством $M = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r: \gamma_2 = q = 0\}$. А прецессии (1.4) представляют собой симметричное относительно неподвижного множества M периодическое движение. Поэтому необходимо не просто понизить, с использованием интегралов (1.6), порядок системы (1.5) до двух, но и получить редуцированную периодическую систему второго порядка, обладающую свойством обратимости. Тогда можно использовать известное утверждение [5] об устойчивости по Ляпунову, которая имеет место почти всегда при чисто мнимых характеристических показателях. А вычисление характеристических показателей можно провести, анализируя систему (1.5) в окрестности решения (1.4).

2. Редуцированная система. Геометрический интеграл учтем заменой переменных

$$\gamma_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta \quad (0 < \theta \leq \pi) \quad (2.1)$$

Тогда вместо трех уравнений для $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ получим только два уравнения

$$\dot{\theta} = -\omega_2, \quad \dot{\varphi} = -\omega_3 + \omega_1 \operatorname{ctg} \theta \quad (\sin \theta \neq 0)$$

$$\omega_1 = p \cos \varphi + q \sin \varphi, \quad \omega_2 = -p \sin \varphi + q \cos \varphi, \quad \omega_3 = r$$

Отметим, что угол θ представляет собой угол нутации, а угол φ в сумме с углом собственного вращения дает $\pi/2$. Кроме того, ω_1, ω_2 – проекции угловой скорости ω на оси, повернутые в плоскости xu относительно осей x, y на угол φ .

Преобразуем к новым переменным интеграл энергии

$$(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \omega_1^2 + (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \omega_2^2 + (B - A) \sin 2\varphi \omega_1 \omega_2 + C \omega_3^2 + \\ + 2P(x_0 \sin \theta \cos \varphi + y_0 \sin \theta \sin \varphi + z_0 \cos \theta) = 2h$$

и кинетического момента. Из последнего найдем

$$\omega_1 = \frac{\sigma - (B - A) \sin 2\varphi \sin \theta \omega_2 / 2 - C \omega_3 \cos \theta}{(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \sin \theta} \quad (2.2)$$

и подставим в интеграл энергии. В результате получим квадратное уравнение для определения ω_3 , из которого найдем

$$\omega_3 = F \pm \sqrt{F^2 - SR} \quad (2.3)$$

$$F = C\sigma \cos \theta, \quad S = C[(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta]$$

$$R = \sigma^2 - (B - A)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \omega_2^2 + 2[P(x_0 \sin \theta \cos \varphi + y_0 \sin \theta \sin \varphi + z_0 \cos \theta) - h] \times \\ \times (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta$$

В результате проведенных вычислений проекции ω_1 , ω_3 выражаются с помощью формул (2.2), (2.3) как функции φ , θ , ω_2 . Поэтому редуцированная система третьего порядка имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega_2, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \Omega_2(\varphi, \theta, \omega_2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\omega_3(\varphi, \theta, \omega_2) + \omega_1(\varphi, \theta, \omega_2) \operatorname{ctg} \theta \quad (2.4)$$

$$\Omega_2 \equiv \left[-\omega_1 + \left(\frac{C - B}{A} q \sin \varphi + \frac{C - A}{B} p \cos \varphi \right) \omega_3 - \right. \\ \left. - \frac{P}{A} (z_0 \sin \theta \sin \varphi - y_0 \cos \theta) \sin \varphi + \frac{P}{B} (x_0 \cos \theta - z_0 \sin \theta \cos \varphi) \cos \varphi \right]_*$$

(звездочка означает, что в правой части вместо p , q , ω_1 , ω_3 подставлены их выражения через φ , θ , ω_2). При этом правые части системы (2.4) будут 2π -периодическими по углу φ и, кроме этого, зависят от постоянных энергии (h) и кинетического момента (σ).

Очевидно, система (2.4) описывает движения, на которых $\sin \theta \neq 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению регулярных прецессий Гриоли. Из формул (1.4) видно, что $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$. В самом деле, в случае $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0$ необходимо имеем $\sin \tau \neq 0$, $\cos \tau \neq 0$. Но тогда выражения в квадратных скобках в формулах для γ_1 и γ_2 не могут одновременно обращаться в нуль, так как $x_0 z_0 > 0$ и $(A - B)(B - C) > 0$.

Таким образом, на регулярных прецессиях Гриоли имеем $\sin \theta \neq 0$. Очевидно, $\sin \theta \neq 0$ также на движениях, близких к регулярным прецессиям Гриоли, т.е. на возмущенных движениях.

Вычислим

$$\dot{\gamma}_2 \gamma_1 - \gamma_2 \dot{\gamma}_1 = -n^2 [f_1(\tau) + f_2(\tau)] / (P^2 l^5) \quad (2.5)$$

$$f_1(\tau) \equiv [(A x_0^2 + C z_0^2) z_0 - (B - C) l^2 x_0 \cos \tau] C$$

$$f_2(\tau) \equiv (A - C)(B - C) x_0^2 (z_0 - x_0 \cos \tau) \sin^2 \tau$$

При $|z_0| > |x_0|$ знак $f_2(\tau)$ совпадает со знаком числа z_0 , а при $z_0 = x_0$ $f_2(\tau)$ обращается в

нуль только при $\sin \tau = 0$. Кроме того, условия (1.1) позволяют преобразовать $f_1(\tau)$ к виду

$$f_1(\tau) = Cz_0 f^*(\tau), \quad f^*(\tau) \equiv (A - B + C) - \sqrt{(A - B)(B - C)} \cos \tau$$

и $f_1(\tau)$ имеет знак числа z_0 , если

$$A - B + C > \sqrt{(A - B)(B - C)} \quad (2.6)$$

Неравенство (2.6) в точности противоположно неравенству (1.3). Поэтому геометрически условие (2.6) означает, что угол между вертикалью и осью прецессии не превосходит $\pi/4$. Укажем здесь же, что при $x_0 = z_0$ имеем $A + C = 2B$ и условие (2.6) выполнено.

Таким образом, на регулярных прецессиях Гриоли, для которых угол, образуемый осью прецессии с вертикалью, не превосходит $\pi/4$ и, кроме того, $|z_0| > |x_0|$, угол φ меняется, как это следует из (2.5), монотонно. Следовательно, при решении задачи об устойчивости таких прецессий можно пользоваться периодической системой второго порядка. Эта система немедленно выводится из (2.4), если выбрать в качестве нового "времени" угол φ .

Пусть полученная система второго порядка устойчива по переменным θ, ω_2 . В этой системе возмущенное и невозмущенное решения сравниваются при одних и тех же значениях φ , которые в общем случае достигаются в различные моменты времени. Поэтому из формул перехода к переменным $\varphi, \theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ вытекает, что из устойчивости редуцированной системы второго порядка следует устойчивость системы (1.5) по переменным $\gamma_1^2 + \gamma_2^2, \gamma_3, p^2 + q^2, r$.

Из формул (2.1), а также из выражений для $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ видно, что при изменении знака γ_2 и q также меняется знак угла φ и проекции ω_2 . При этом, как это видно из (2.4), выражение для Ω_2 сохраняет знак. Поэтому система (2.4) инвариантна относительно замены $(t, \varphi, \theta, \omega_2)$ на $(-t, -\varphi, \theta, -\omega_2)$. Значит, полученная из (2.4) периодическая система второго порядка не меняется при замене $(\varphi, \theta, \omega_2)$ на $(-\varphi, \theta, -\omega_2)$ и представляет собой обратимую систему.

Рассмотрим теперь прецессии Гриоли для тел, у которых $|x_0| > |z_0|$. В этом случае имеем $A - B > B - C$, и условие (2.6) выполнено. Поэтому на прецессиях Гриоли угол $\beta < \pi/4$. Далее, как и в предыдущем случае, из формул (1.4) выводим $\gamma_2^2 + \gamma_3^2 \neq 0$. Поэтому, если выполнить преобразование

$$\gamma_1 = \cos \theta, \quad \gamma_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_3 = \sin \theta \cos \varphi$$

то на прецессиях Гриоли будет $\sin \theta \neq 0$. Теперь вычислим

$$\dot{\gamma}_2 \gamma_3 - \gamma_2 \dot{\gamma}_3 = n^2 [f_3(\tau) + f_4(\tau)] / (P^2 l^5) \quad (2.7)$$

$$f_3(\tau) \equiv [Ax_0^2 + Cz_0^2]x_0 - (A - B)l^2 z_0 \cos \tau]A$$

$$f_4(\tau) \equiv (A - C)(B - C)z_0^2(x_0 - z_0 \cos \tau) \sin^2 \tau$$

причем $f_3(\tau)$ преобразуется к виду $Ax_0 f^*(\tau)$. Поэтому при $|x_0| > |z_0|$ выражение (2.7) имеет один и тот же знак и угол φ меняется монотонно.

Выведем уравнения для переменных

$$\theta, \varphi, \omega_1 = p, \quad \omega_2 = -r \sin \varphi + q \cos \varphi, \quad \omega_3 = r \cos \varphi + q \sin \varphi$$

и с помощью интегралов энергии и кинетического момента редуцируем полученную систему к системе третьего порядка для переменных $\theta, \varphi, \omega_2$. Наконец, с учетом неравенства $\varphi' \neq 0$ получим периодическую обратимую систему второго порядка. Эти вычисления проведены выше подробно для случая $|z_0| \geq |x_0|$.

Суммируем выводы данного раздела.

Лемма 1. Задача об устойчивости регулярных прецессий Гриоли, в которых угол, образуемый осью прецессии с вертикалью, не превосходит $\pi/4$, корректно сводится к задаче об устойчивости периодической обратимой системы второго порядка вида (2.4). При этом из устойчивости по Ляпунову этой системы следует устойчивость системы (1.5) по переменным $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$, γ_3 , $p^2 + q^2$, r при $|z_0| \geq |x_0|$ и по переменным γ_1 , $\gamma_2^2 + \gamma_3^2$, p , $q^2 + r^2$ при $|x_0| \geq |z_0|$, если только при этом не возмущаются постоянные интегралов энергии и кинетического момента.

3. Вычисление характеристических показателей обратимой системы. Обратимся к проблеме характеристических показателей (ХП) для линейной, 2π -периодической обратимой системы

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{A}_-(t)\mathbf{u} + \mathbf{A}_+(t)\mathbf{v} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{B}_+(t)\mathbf{u} + \mathbf{B}_-(t)\mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n (l \geq n) \end{aligned} \quad (3.1)$$

(плюс или минус означает матрицу, состоящую из четных или нечетных функций). Ясно, что система (3.1) инвариантна относительно каждого из двух преобразований: а) $(t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (-t, \mathbf{u}, -\mathbf{v})$, б) $(t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (-t, -\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Множества $\mathbf{M}_1 = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$, $\mathbf{M}_2 = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{u} = \mathbf{0}\}$ называются неподвижными множествами обратимой системы (3.1).

Свойство инвариантности относительно указанных преобразований приводит к тому, что система (3.1) вместе с каждым решением $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ имеет также решения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(-t)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{v}(-t)$ и $\mathbf{u} = -\mathbf{u}(-t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(-t)$. Отсюда немедленно выводится возвратность характеристического уравнения для системы (3.1).

Из линейности системы (3.1) вытекает существование решений

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(-t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(-t) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(-t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(-t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

На первом из этих решений имеем $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ при $t = 0$, на втором $-\mathbf{v} = \mathbf{0}$ при $t = 0$. Решения (3.2) симметричны относительно множеств $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ соответственно.

При выполнении условия единственности решения системы (3.1) при учете решений (3.2) выводим фундаментальную матрицу решений

$$\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^+(t) & \mathbf{u}^-(t) \\ \mathbf{v}^-(t) & \mathbf{v}^+(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{I}_{l+n}$$

(матрицы $\mathbf{u}^+(t)$, $\mathbf{v}^+(t)$ состоят из четных функций, $\mathbf{u}^-(t)$, $\mathbf{v}^-(t)$ — из нечетных функций, $\mathbf{I}_j$ — единичная j -матрица) с единичной матрицей начальных условий.

Ранг матрицы $\mathbf{v}^-(t)$ не превосходит n . Значит, в результате элементарного преобразования $l - n$ столбцов матрицы $\mathbf{v}^-(\pi)$ становятся нулевыми. Тогда из условия $\text{rang } \mathbf{v}^-(\pi) \leq n$ следует [6] существование в (3.1) не меньше $l - n$ симметричных относительно множества $\mathbf{M}_1$, 2π -периодических решений.

Таким образом, периодическая обратимая система (3.1) имеет не меньше $l - n$ простых нулевых ХП. Остальные ХП разбиваются на пары $\pm \kappa$.

Обозначим через ρ собственное значение матрицы $\mathbf{S}(2\pi)$. Тогда матрицы $\mathbf{S}(-2\pi) = \mathbf{S}^{-1}(2\pi)$, $2\mathbf{S} = \mathbf{S}(2\pi) + \mathbf{S}(-2\pi)$ имеют собственные значения, равные соответственно ρ^{-1} и $2\alpha = \rho + \rho^{-1}$. Явный вид матриц $\mathbf{S}(2\pi)$ и $\mathbf{S}(-2\pi)$ позволяет вычислить

$$\det(\mathbf{S} - \alpha \mathbf{I}_{l+n}) = \det(\mathbf{u}^+(2\pi) - \alpha \mathbf{I}_l) \det(\mathbf{v}^+(2\pi) - \alpha \mathbf{I}_n) \quad (3.3)$$

С другой стороны,

$$\det(\mathbf{S} - \alpha \mathbf{I}_{l+n}) = c(\alpha - 1)^{l-n} P_n^2(\alpha), \quad c = \text{const} \quad (3.4)$$

($P_n(\alpha)$ – полином степени n от α), ибо матрица S имеет не менее $l - n$ собственных значений, равных единице, а каждое из остальных собственных значений имеет четную кратность. В случае простых корней полинома

$$Q_n(\alpha) = \det(v^+(2\pi) - \alpha I_n)$$

из (3.3), (3.4) немедленно выводим

$$Q_n(\alpha) = c_1 P_n(\alpha), \quad c_1 = \text{const} \quad (3.5)$$

Если же $Q_n(\alpha)$ имеет корень кратности k , то S имеет собственное значение кратности $2k$, и $P_n(\alpha)$ имеет корень кратности k . Следовательно, в этом случае также имеем (3.5).

Лемма 2. Линейная, 2π -периодическая обратимая система (3.1) имеет не менее $l - n$ простых нулевых ХП. Все остальные ХП разбиваются на пары $\pm \kappa$ и определяются по формулам

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \text{Arch } \alpha, \quad \det(v^+(2\pi) - \alpha I_n) = 0$$

Следствие. Если все корни полинома $Q_n(\alpha)$ действительны и не превосходят по модулю единицы, то все ХП имеют нулевые действительные части.

Замечание. Из леммы 2 вытекает следующий важный вывод: для вычисления ХП обратимой линейной периодической системы $(l + n)$ -го порядка ($l \geq n$) достаточно построить только n частных решений задачи Коши на отрезке $[0, 2\pi]$.

4. Анализ системы уравнений в вариациях. Перейдем в уравнениях Эйлера–Пуассона к безразмерным проекциям угловой скорости $p^* = p/n$, $q^* = q/n$, $r^* = r/n$ и введем безразмерные параметры

$$a = A/(A + C), \quad c = 1 - a, \quad b = a + (1 - 2a)\lambda^2, \quad \lambda = x_0/l, \quad v = z_0/l, \quad \mu = \sqrt{a^2\lambda^2 + c^2v^2}$$

Тогда в полученной системе прецессии Гриоли задаются формулами

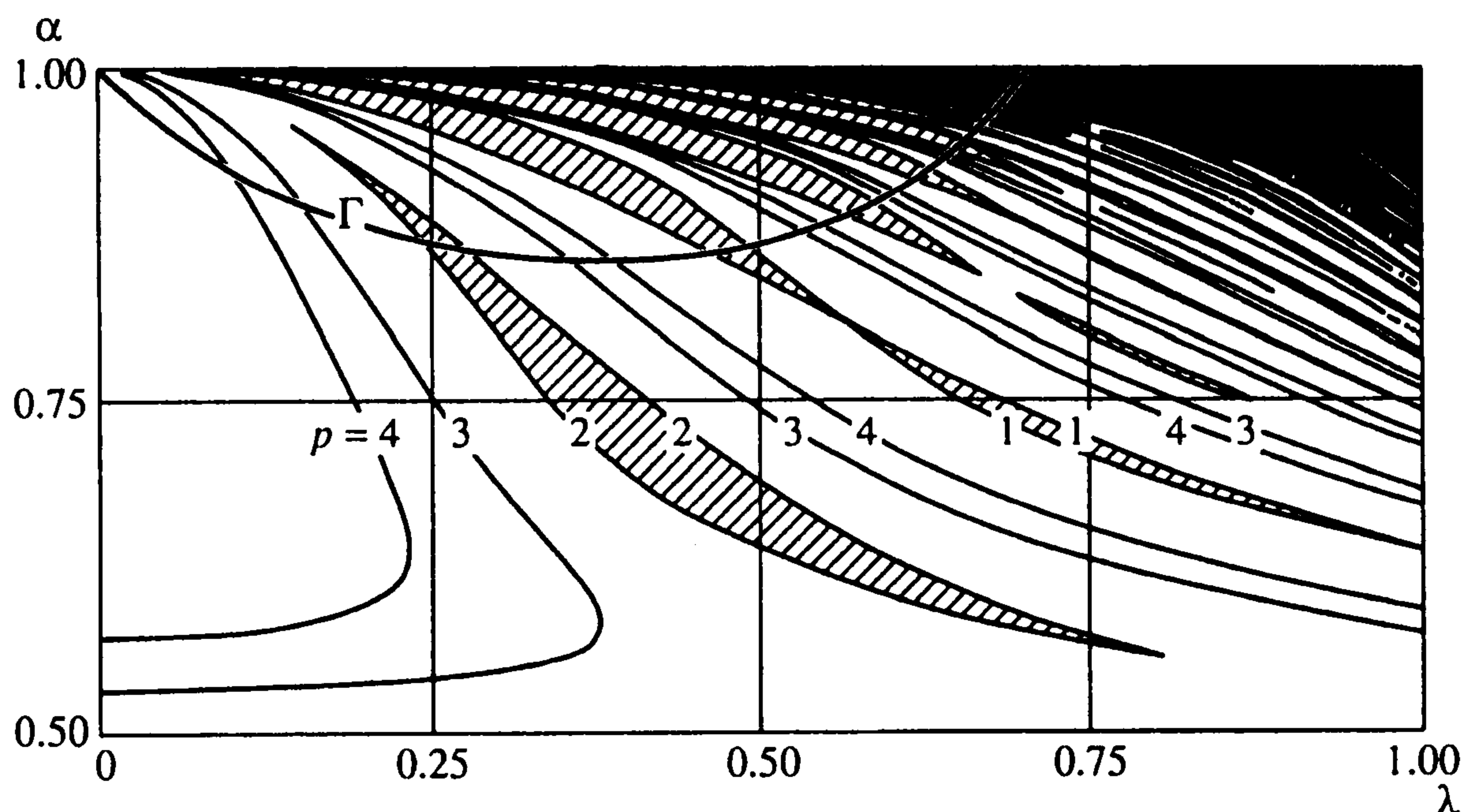
$$\begin{aligned} p^* &= \lambda - v \cos \tau, \quad q^* = \sin \tau, \quad r^* = v + \lambda \cos \tau \\ \gamma_1 &= -[cv \cos \tau + (b - c)\lambda \sin^2 \tau] / \mu \\ \gamma_2 &= [(a\lambda^2 + cv^2) - (a - c)\lambda v \cos \tau] \sin \tau / \mu \\ \gamma_3 &= [a\lambda \cos \tau + (a - c)v \sin^2 \tau] / \mu \end{aligned} \quad (4.1)$$

и эта система содержит только два существенных параметра: a и λ ($1/2 < a < 1$, $-1 \leq \lambda \leq 1$).

Теперь составим уравнения в вариациях для решения (4.1), обозначая $u = (\delta p^*, \delta r^*, \delta \gamma_1, \delta \gamma_2)^T$, $v = (\delta q^*, \delta \gamma_2)^T$; T – транспонирование. В результате имеем систему

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= (b - c) / a (q^* u_2 + r^* v_1) + (\mu / a) v v_2 \\ \dot{u}_2 &= ((a - b) / c) (q^* u_1 + p^* v_1) - (\mu / c) \lambda v_2 \\ \dot{u}_3 &= \gamma_2 u_2 - q^* u_4 - \gamma_3 v_1 + r^* v_2 \\ \dot{u}_4 &= -\gamma_2 u_1 + q^* u_3 + \gamma_1 v_1 - p^* v_2 \\ \dot{v}_1 &= ((c - a) / b) (r^* u_1 + p^* u_2) - (\mu / b) (v u_3 - \lambda u_4) \\ \dot{v}_2 &= \gamma_3 u_1 - \gamma_1 u_4 - r^* u_3 + p^* u_4 \end{aligned} \quad (4.2)$$

т.е. систему вида (3.1) с векторами u и v размерности $l = 4$ и $n = 2$ соответственно. Следовательно, система (4.2) имеет не менее двух простых нулевых ХП. Более того,



Фиг. 2

вследствие наличия у уравнений Эйлера–Пуассона трех первых интегралов система (4.2) имеет еще пару нулевых ХП с одной группой решений.

Для вычисления оставшейся пары ХП воспользуемся леммой 2. Построим на отрезке $[0, 2\pi]$ два решения задачи Коши с начальными условиями: 1) $u(0) = 0$, $v_1(0) = 1$, $v_2(0) = 0$; 2) $u(0) = 0$, $v_1(0) = 0$, $v_2(0) = 1$. В результате сформируем матрицу $v^+(2\pi) = \|v_{ij}^+(2\pi)\|$. Далее определим корни α квадратного уравнения

$$\alpha^2 - [\nu_{11}^+(2\pi) + \nu_{22}^+(2\pi)]\alpha + \nu_{11}^+(2\pi)\nu_{22}^+(2\pi) - \nu_{12}^+(2\pi)\nu_{21}^+(2\pi) = 0 \quad (4.2)$$

и ХП $\pm \kappa$, $\kappa = \text{Arch}\alpha/(2\pi)$. При этом уравнение (4.2) имеет один корень $\alpha = 1$. Поэтому нужно определить только второй корень, равный по теореме Виета

$$\alpha = \nu_{11}^+(2\pi) + \nu_{22}^+(2\pi) - 1 \quad (4.3)$$

Найдем число α по формуле (4.3). Тогда условие $|\alpha| \leq 1$ определяет чисто мнимые ХП $\pm \kappa$, которые в этом случае вычисляются по формуле $\kappa = \arccos\alpha/(2\pi)$.

Система уравнений Эйлера–Пуассона содержит в случае Гриоли только два существенных параметра a , λ , которые меняются в прямоугольнике (фиг. 2). Для каждой точки этого прямоугольника вычислим α и выделим область, в которой ХП чисто мнимые. При этом вычисления, очевидно, достаточно провести только при $\lambda \geq 0$ или $\lambda \leq 0$. На фиг. 2 область, где ХП имеют ненулевые действительные части, заштрихована.

5. Результаты. В системе уравнений в вариациях (4.2) угол φ , если его использовать в качестве "времени", меняется так же, как и на прецессиях Гриоли

$$\varphi = \tau + \Phi(\tau), \quad \Phi(\tau + 2\pi) = \Phi(\tau) \quad (5.1)$$

причем $|\Phi'| < 1$, если угол β между осью прецессии и вертикалью не превосходит $\pi/4$. В этом последнем случае соотношение (5.1) позволяет выразить τ через φ . Поэтому из пары чисто мнимых ХП системы (4.2) следует, что единственная пара ХП редуцированной системы второго порядка также будет чисто мнимой. На плоскости (λ, a) условие $\beta < \pi/4$ приобретает вид ($\lambda \geq 0$)

$$(1 - a)/(2a - 1) > \lambda(\sqrt{1 - \lambda^2} - \lambda) \quad (5.2)$$

Это условие выполняется на фиг. 2 в области D (ниже дуги Γ). В области D из чисто мнимых характеристических показателей (области S светлого фона), как правило,

следует устойчивость по Ляпунову. Для этого необходимо исключить резонансы $p\kappa = 1$, $p = 1, 2, 3, 4$ (соответствующие значения p на фиг. 2 указаны) и потребовать необращения в нуль одного коэффициента $C(\lambda, a)$ в формах третьего порядка нормализованной системы (для системы вида (2.4)). Формы третьего порядка в системе (2.4) не обращаются тождественно в нуль. Значит, и в нормализованной системе почти всегда имеем $C(\lambda, a) \neq 0$.

Теорема 1. Регулярные прецессии Гриоли неустойчивы по Ляпунову для всех точек области IS , заштрихованной на фиг. 2. В области D , лежащей ниже дуги Γ , угол между осью прецессии и вертикалью не превосходит 45° и регулярные прецессии Гриоли устойчивы по Ляпунову почти для всех точек области S (светлого фона, фиг. 2). Исключение составляют, быть может, резонансные кривые, а также точки, в которых $C(\lambda, a) = 0$.

Из сформулированной теоремы выводится устойчивость по Ляпунову. Хотя, казалось бы, редуцированная обратимая система второго порядка содержит постоянные интегралы энергии и кинетического момента и устойчивость имеется при фиксированных их значениях (условная устойчивость). Однако проведенное недавно исследование показало [7], что в случае симметричных интегралов (такими являются интегралы энергии и кинетического момента) выводится устойчивость по Ляпунову.

Проведенные в разд. 4 вычисления по определению ХП позволяют также решить задачу о существовании у тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой периодических движений, близких к регулярным прецессиям Гриоли. Здесь возможны две постановки задачи.

Пусть, по-прежнему, выполнены условия (1.1). Прецессии Гриоли представляют собой симметричное периодическое движение (СПД) обратимой механической системы и в общей ситуации принадлежат семейству [8]. В силу существования интегралов энергии и кинетического момента с произвольными (нефиксированными) постоянными следует ожидать, что это семейство – двухпараметрическое. Задачу о существовании семейства можно свести к задаче о существовании локального семейства СПД у системы уравнений возмущенного движения. Введением малого параметра последняя задача сводится к задаче о продолжении по параметру и решается [6] в грубых случаях системой уравнений в вариациях.

Во второй задаче предположим, что $y_0 = 0$, а условие

$$x_0\sqrt{B-C} = z_0\sqrt{A-B} \quad (5.3)$$

выполняется с некоторой точностью, характеризуемой малым параметром ε . Тогда при $\varepsilon = 0$ имеем регулярные прецессии Гриоли, а при $\varepsilon \neq 0$ существование СПД доказывается продолжением по параметру ε решений (1.4). В грубых случаях эта задача также решается [6] системой уравнений в вариациях.

Система уравнений в вариациях (4.2) имеет четырехкратный нулевой ХП с тремя группами решений. Учитывая, что эти нулевые ХП обусловлены тремя первыми интегралами (1.6), приходим к выводу, что нулевые ХП не препятствуют продолжению решений (1.4). Поэтому если оставшаяся пара $\pm \kappa$ удовлетворяет условию $\kappa \neq ik$ ($k \in \mathbb{Z}$), то задача о продолжении имеет [6] положительное решение.

Теорема 2. Почти для всех значений параметров регулярные прецессии Гриоли принадлежат двухпараметрическому семейству СПД системы уравнений Эйлера – Пуассона. Это семейство существует в случае Гриоли (1.1) и распространяется на случай, когда условие (5.3) выполняется с некоторой точностью, а $y_0 = 0$.

Существование прецессий Гриоли установлено [1, 2] при выполнении условий (1.1). Однако при внимательном прочтении [1, 2] оказывается, что прецессии, описываемые формулами (1.4), существуют также для тел, подчиненных, вместо условий (1.1), условиям

$$x_0\sqrt{B-C} = -z_0\sqrt{A-B}, \quad y_0 = 0, \quad A > B > C \quad (5.4)$$

отличающиеся от (1.1) тем, что в них знаки x_0 и z_0 – противоположны друг другу. Можно также видеть, что вывод изложенных выше результатов по устойчивости и периодическим движениям остается справедливым для тел, подчиненных условиям (5.4). Поэтому справедлива

Теорема 3. Теоремы 1 и 2 сохраняют справедливость, если тело, вместо условий (1.1), подчинено условиям (5.4).

Автор благодарит В.В. Румянцева, привлечшего внимание автора к задаче, а также В.В. Белецкого – за интерес к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00–15–96150, 00–01–00122), программы "Университеты России – фундаментальные исследования" (015.04.01.56) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (N2.1–294).

ЛИТЕРАТУРА

1. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precess'ioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. pure di appl. Ser. 4. 1947. V. 26. Fasc 3/4. P. 271–281.
2. Гуляев М.П. Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Вестн. МГУ. Сер. Физ.-мат. и естеств. наук. № 3. С. 15–21.
3. Харламов П.В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 703–707.
4. Харламова Е.И. Сведение задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку к одному уравнению // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 4. С. 784–788.
5. Бибиков Ю.Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. 143 с.
6. Тхай В.Н. Нелинейные колебания обратимых систем // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 38–50.
7. Matveev M.V. Reversible systems with first integrals // Physica D. 1998. V. 112. № 1/2. P. 148–157.
8. Devaney R.L. Reversible diffeomorphisms and flows // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 89–113.

Москва

Поступила в редакцию
14.XII.1999