

УДК 531.36

© 2000 г. А.П. Маркеев

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается задача об орбитальной устойчивости периодического движения гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Функция Гамильтона не зависит явно от времени и аналитична в окрестности траектории возмущенного движения. Изучается критический случай, когда все мультипликаторы вещественны и имеют модули, равные единице. При помощи второго метода Ляпунова и КАМ-теории получены условия устойчивости и неустойчивости. Указаны конструктивные алгоритмы проверки этих условий. Особо рассмотрен случай системы, содержащей малый параметр. С технической стороны исследование существенно опирается на классическую теорию возмущений гамильтоновых систем и ее современные модификации. В качестве приложений рассмотрены задача об устойчивости перманентного вращения тяжелого кругового диска, соударяющегося с неподвижной горизонтальной плоскостью, и задача об устойчивости плоских вращений твердого тела вокруг неподвижной точки.

1. Функция Гамильтона и ее нормальная форма. Пусть автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы имеет периодическое движение и в окрестности, отвечающей этому движению замкнутой траектории фазового пространства функция Гамильтона аналитична. Период, не ограничивая общности, считаем равным 2π .

Канонически сопряженные переменные ξ_i, η_i (ξ_i – координаты, η_i – импульсы; $i = 1, 2$) можно [1] выбрать так, что решение, соответствующее рассматриваемому периодическому движению, запишется в виде

$$\xi_1(t) = t + \xi_1(0), \quad \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0 \quad (1.1)$$

При этом гамильтониан Γ будет 2π -периодичен по ξ_1 . Его можно разложить в сходящийся ряд по степеням η_1, ξ_2, η_2 :

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \dots + \Gamma_k + \dots \quad (1.2)$$

где Γ_k – форма степени k относительно $|\eta_1|^{1/2}, \xi_2, \eta_2$. Нужные в дальнейшем формы второй, третьей и четвертой степеней запишем в виде

$$\Gamma_2 = \eta_1 + \varphi_2(\xi_2, \eta_2, \xi_1), \quad \Gamma_3 = \psi_1(\xi_2, \eta_2, \xi_1)\eta_1 + \varphi_3(\xi_2, \eta_2, \xi_1) \quad (1.3)$$

$$\Gamma_4 = \chi(\xi_1)\eta_1^2 + \psi_2(\xi_2, \eta_2, \xi_1)\eta_1 + \varphi_4(\xi_2, \eta_2, \xi_1)$$

где $\chi(\xi_1)$ – 2π -периодическая функция от ξ_1 , а φ_m, ψ_m – формы степени m относительно ξ_2, η_2 с 2π -периодическими по ξ_1 коэффициентами.

Орбитальная устойчивость невозмущенного движения (1.1) означает устойчивость системы с гамильтонианом (1.2) по отношению к возмущениям величин η_1, ξ_2, η_2 .

Два мультипликатора линеаризованной в окрестности периодического движения (1.1) системы уравнений возмущенного движения равны единице, а два другие являют-

ся корнями уравнения

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0 \quad (1.4)$$

где $2A = x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi)$, а $x_{ii}(2\pi)$ – вычисленные при $\xi_1 = 2\pi$ элементы матрицы $X(\xi_1)$ фундаментальных решений ($X(0) = E$, E – единичная матрица второго порядка) линейной системы с 2π -периодическими по независимой переменной ξ_1 коэффициентами

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta_2}, \quad \frac{d\eta_2}{d\xi_1} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2} \quad (1.5)$$

Здесь φ_2 – квадратичная относительно ξ_2, η_2 часть функции Γ_2 из (1.3).

Будем исследовать критический случай, когда $|A| = 1$, т.е. когда уравнение (1.4) имеет вещественные корни $\rho_1 = \rho_2 = -1$ (при $A = -1$) или корни $\rho_1 = \rho_2 = 1$ (при $A = 1$). Ограничиваясь случаем общего положения, считаем, что матрица $X(2\pi)$ не приводится к диагональной форме. В этом случае невозмущенное периодическое движение орбитально неустойчиво в линейном приближении.

Для исследования нелинейной задачи об орбитальной устойчивости периодического движения (1.1) целесообразно получить при помощи канонической замены переменных нормальную форму функции Гамильтона (1.2). Для этого сначала при помощи вещественной линейной периодической по ξ_1 унивалентной канонической замены переменных

$$\xi_2 = n_{11}(\xi_1)u_2 + n_{12}(\xi_1)v_2, \quad \eta_2 = n_{21}(\xi_1)u_2 + n_{22}(\xi_1)v_2 \quad (1.6)$$

приведем квадратичный гамильтониан φ_2 уравнений (1.5) к его нормальной форме $\frac{1}{2}\delta v_2^2$, где величина $\delta = 1$ или -1 , ее конкретное значение определяется в процессе построения замены (1.6).

Если $A = 1$, то матрицу N замены переменных (1.6) можно получить 2π -периодической по ξ_1 . Она имеет вид [2]

$$N = X(\xi_1)PQ(\xi_1) \quad (1.7)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\xi_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

а число δ и матрица P определяются следующими формулами: если $x_{12}(2\pi) \neq 0$, то

$$P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad \delta = \text{sign } x_{12}(2\pi) \quad (1.9)$$

$$a = |x_{12}(2\pi)/(2\pi)|^{1/2}, \quad b = \delta(x_{22}(2\pi) - 1) |2\pi x_{12}(2\pi)|^{-1/2}$$

а при $x_{21}(2\pi) \neq 0$ имеем

$$P = \begin{pmatrix} d & c^{-1} \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta = -\text{sign } x_{21}(2\pi) \quad (1.10)$$

$$c = |x_{21}(2\pi)/(2\pi)|^{1/2}, \quad d = \delta(x_{11}(2\pi) - 1) |2\pi x_{21}(2\pi)|^{-1/2}$$

В случае $A = -1$ замена (1.6) будет 4π -периодической по ξ_1 . Ее можно получить в виде произведения трех матриц (1.7), где Q задается формулой (1.8), а P определяется равенствами (1.9) или (1.10), в которых a и c остаются прежними, а

$$b = -\delta(x_{22}(2\pi) + 1) |2\pi x_{12}(2\pi)|^{-1/2}, \quad d = -\delta(x_{11}(2\pi) + 1) |2\pi x_{21}(2\pi)|^{-1/2}$$

причем $\delta = -\text{sign } x_{12}(2\pi)$, если $x_{12}(2\pi) \neq 0$ и $\delta = \text{sign } x_{21}(2\pi)$, если $x_{21}(2\pi) \neq 0$.

Если $S(v_2, \xi_2, \xi_1)$ – производящая функция преобразования (1.6), то, согласно теории канонических преобразований [3], имеет место тождество

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_1} + \varphi_2 = \frac{1}{2} \delta v_2^2 \quad (1.11)$$

В левой части этого тождества величины ξ_2, η_2 выражаются через u_2, v_2 по формулам (1.6).

Для получения преобразования $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \rightarrow u_1, u_2, v_1, v_2$, канонического по всем переменным и приводящего функцию Γ_2 из (1.2) к нормальной форме, возьмем производящую функцию вида $v_1 \xi_1 + S$. Тогда $u_1 = \xi_1$, а

$$\eta_1 = v_1 + \frac{\partial S}{\partial \xi_1} = v_1 + k_{20} u_2^2 + k_{11} u_2 v_2 + k_{02} v_2^2 \quad (1.12)$$

где k_{ij} – периодические функции от ξ_1 , определяемые из тождества (1.11).

В новых переменных u_i, v_i функция Гамильтона (1.2) запишется в виде

$$F = F_2 + F_3 + F_4 \dots + F_k + \dots \quad (1.13)$$

$$F_2 = v_1 + \frac{1}{2} \delta v_2^2, \quad F_3 = f_1(u_2, v_2, u_1) v_1 + f_3(u_2, v_2, u_1) \quad (1.14)$$

$$F_4 = \chi(u_1) v_1^2 + f_2(u_2, v_2, u_1) v_1 + f_4(u_2, v_2, u_1)$$

Здесь f_k – форма степени k относительно u_2, v_2 :

$$f_k = \sum_{v+\mu=k} f_{v\mu}(u_1) u_2^v v_2^\mu$$

Коэффициенты $f_{v\mu}$ имеют период τ по u_1 . Величина τ равна 2π , когда в уравнении (1.4) $A = 1$, и $\tau = 4\pi$, когда $A = -1$. Выражения $f_{v\mu}$ через коэффициенты гамильтониана (1.2) следуют из тождеств $\psi_1 \eta_1 + \varphi_3 = F_3$, $\chi \eta_1^2 + \psi_2 \eta_1 + \varphi_4 = F_4$, в левых частях которых ξ_2, η_2 и η_1 заменены, согласно формулам (1.6) и (1.12), а $\xi_1 = u_1$.

Для нормализации членов третьей и более высоких степеней в функции Гамильтона (1.13) воспользуемся методом Депри – Хори [4,5]. Ограничимся рассмотрением членов до четвертой степени включительно. В достаточно малой окрестности невозмущенного периодического движения нормализующее каноническое преобразование $u_1, v_1, u_2, v_2 \rightarrow w_1, r_1, q_2, p_2$ можно получить близким к тождественному:

$$u_1 = w_1 + \dots, \quad v_1 = r_1 + \dots, \quad u_2 = q_2 + \dots, \quad v_2 = p_2 + \dots$$

где многоточия обозначают сходящиеся ряды по степеням r_1, q_2, p_2 с τ – периодическими по w_1 коэффициентами. Нормализованный гамильтониан (1.13) примет вид

$$H = r_1 + \frac{1}{2} \delta p_2^2 + h_{30} q_2^3 + h_{10} q_2 r_1 + h_{40} q_2^4 + h_{20} q_2^2 r_1 + h_{00} r_1^2 + O_5 \quad (1.15)$$

где h_{ij} – постоянные величины, а O_5 – ряд, начинающийся с членов не ниже пятой степени относительно $|r_1|^{1/2}, q_2, p_2$, коэффициенты ряда τ периодичны по переменной w_1 . Орбитальная устойчивость невозмущенного периодического движения (1.1) эквивалентна устойчивости системы с нормализованным гамильтонианом (1.15) относительно возмущений величин r_1, q_2, p_2 .

Не останавливаясь на довольно громоздких выкладках, выпишем окончательные формулы, необходимые для вычисления коэффициентов h_{ij} нормальной формы. Имеем

$$h_{30} = \langle f_{30} \rangle, \quad h_{10} = \langle f_{10} \rangle \quad (1.16)$$

$$h_{40} = \langle f_{40} - \tilde{f}_{30}\tilde{f}_{10} + \frac{3}{2}(\tilde{f}_{30}\tilde{w}_{21} - \tilde{f}_{21}\tilde{w}_{30}) \rangle + \frac{1}{2}\delta(3\langle f_{30} \rangle \langle f_{12} \rangle - \langle f_{21} \rangle^2) \quad (1.17)$$

$$h_{20} = \langle f_{20} - \tilde{f}_{10}^2 + \frac{3}{2}(\tilde{f}_{30}\tilde{w}_{01} - \tilde{f}_{01}\tilde{w}_{30}) + \frac{1}{2}(\tilde{f}_{10}\tilde{w}_{21} - \tilde{f}_{21}\tilde{w}_{10}) \rangle + \frac{1}{2}\delta(\langle f_{10} \rangle \langle f_{12} \rangle - 2\langle f_{21} \rangle \langle f_{01} \rangle) \quad (1.18)$$

$$h_{00} = \langle \chi + \frac{1}{2}(\tilde{f}_{10}\tilde{w}_{01} - \tilde{f}_{01}\tilde{w}_{10}) \rangle - \frac{1}{2}\delta\langle f_{01} \rangle^2 \quad (1.19)$$

Здесь для τ -периодических по u_1 коэффициентов $f_{v\mu}$ форм (1.14) приняты обозначения $f_{v\mu} = \langle f_{v\mu} \rangle + \tilde{f}_{v\mu}$, где $\langle f_{v\mu} \rangle$ – среднее значение функции $f_{v\mu}$ по периоду. Аналогичные обозначения приняты и для коэффициентов $w_{v\mu}$ разложения в ряд производящей функции преобразования Ли в методе Депри – Хори. Входящие в (1.17) – (1.19) функции $\tilde{w}_{v,\mu}$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\tilde{w}_{30}}{du_1} = \tilde{f}_{30}, \quad \frac{d\tilde{w}_{21}}{du_1} = \tilde{f}_{21} - 3\delta\tilde{w}_{30}$$

$$\frac{d\tilde{w}_{10}}{du_1} = \tilde{f}_{10}, \quad \frac{d\tilde{w}_{01}}{du_1} = \tilde{f}_{01} - \delta\tilde{w}_{10}$$

Начальные значения функций $\tilde{w}_{v,\mu}$, очевидно, можно подобрать так, чтобы средние значения $\langle \tilde{w}_{v,\mu} \rangle$ равнялись нулю.

2. О неустойчивости периодического движения. В этом разделе доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Если коэффициент h_{30} нормальной формы (1.15) отличен от нуля или $h_{30} = 0$, но $\delta h_{40} < 0$, то периодическое движение орбитально неустойчиво.

Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно показать неустойчивость для значений возмущений r_1, q_2, p_2 , принадлежащих уровню энергии $H = 0$, на котором лежит невозмущенное движение (1.1). На этом изоэнергетическом уровне движение системы описывается уравнениями Уиттекера, которые имеют форму уравнений Гамильтона [3]. Роль функции Гамильтона играет функция $K(q_2, p_2, w_1)$, где $r_1 = -K$ является корнем уравнения $H = 0$, а роль независимой переменной – величина w_1 . В достаточно малой окрестности невозмущенного движения (1.1) величина w_1 монотонно возрастает и может играть роль времени в задаче об устойчивости.

Пусть в (1.15) величина h_{30} отлична от нуля. Разрешив уравнение $H = 0$ относительно r_1 , получим

$$K = \frac{1}{2}\delta p_2^2 + h_{30}q_2^3 - \frac{1}{2}\delta h_{10}q_2p_2^2 + O_4 \quad (2.1)$$

где O_4 – совокупность членов выше третьей степени относительно q_2, p_2 .

Воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости [6]. Предварительно упростим гамильтониан (2.1), сделав последовательно две канонические замены переменных. Первая замена $q_2, p_2 \rightarrow q'_2, p'_2$ унивалентная и задается производящей функцией

$$S_1 = q_2p'_2 + \frac{1}{4}h_{10}q_2^2p'_2$$

а вторая обладает валентностью δh_{30}^2 и имеет вид

$$q'_2 = \delta h_{30}^{-1}Q_2, \quad p'_2 = h_{30}^{-1}P_2$$

После этих замен движение на изоэнергетическом уровне $H = 0$ описывается пре-

образованным гамильтонианом (2.1), имеющим вид

$$K = \frac{1}{2} P_2^2 + Q_2^3 + O_4 \quad (2.2)$$

В качестве функции Ляпунова возьмем функцию

$$V = (Q_2 - \frac{1}{3})P_2$$

Ее производная в силу уравнений движения с гамильтонианом (2.2) будет такой

$$\frac{dV}{dw_1} = Q_2^2 + P_2^2 + O_3$$

Так как производная определенно-положительная, а сама функция V знакопеременная, то, согласно теореме Ляпунова, имеет место неустойчивость.

Пусть теперь $h_{30} = 0$, а $\delta h_{40} < 0$. Покажем неустойчивость, как и выше, воспользовавшись теоремой Ляпунова. Движение на изоэнергетическом уровне $H = 0$ описывается уравнениями, которым соответствует гамильтониан

$$K = \frac{1}{2} \delta p_2^2 - \frac{1}{2} \delta h_{10} q_2 p_2^2 + h_{40} q_2^4 - \frac{1}{2} \delta h_{20} q_2^2 p_2^2 + \frac{1}{4} h_{00} p_2^4 + O_5 \quad (2.3)$$

После канонической унивалентной замены переменных $q_2, p_2 \rightarrow q'_2, p'_2$, определяемой производящей функцией

$$S_2 = q_2 p'_2 + \frac{1}{4} h_{10} q_2^2 p'_2 + 1/24 (3h_{10}^2 + 4h_{20}) q_2^3 p'_2 - \frac{1}{4} \delta h_{00} q_2 p'_2^3$$

и последующей канонической (с валентностью $\delta|h_{40}|$) замены

$$q'_2 = \delta |h_{40}|^{-1/2} Q_2, \quad p'_2 = |h_{40}|^{-1/2} P_2$$

гамильтониан (2.3) принимает вид

$$K = \frac{1}{2} P_2^2 - Q_2^4 + O_5 \quad (2.4)$$

Пусть $V = Q_2 P_2$. Тогда в силу уравнений, соответствующих (2.4), получаем

$$\frac{dV}{dw_1} = 4Q_2^4 + P_2^2 + O_5$$

Так как V – знакопеременная, а dV/dw_1 – определенно-положительная функция, то, на основании теоремы Ляпунова, имеет место неустойчивость.

Теорема 1 доказана.

3. Условие орбитальной устойчивости периодического движения. Справедлива следующая теорема, дающая достаточное условие орбитальной устойчивости невозмущенного движения.

Теорема 2. Если в нормальной форме (1.15) коэффициент h_{30} равен нулю, но при этом $\delta h_{40} > 0$, то периодическое движение (1.1) орбитально устойчиво.

Эту теорему докажем методами КАМ-теории [7]. Доказательство проведем в несколько этапов.

3.1. Введение малого параметра. Воспользовавшись малостью величин r_1, q_2, p_2 , введем малый параметр ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) и несколько преобразуем гамильтониан (1.15) при помощи следующей канонической (с валентностью, равной $\varepsilon^{-3/2} \delta |h_{40}|$) замены переменных:

$$u_1 = U_1, \quad r_1 = \varepsilon^{3/2} \delta |h_{40}|^{-1} R_1 \quad (3.1)$$

$$q_2 = \varepsilon^{1/2} \delta |h_{40}|^{-1/2} Q_2, \quad p_2 = \varepsilon |h_{40}|^{-1/2} P_2$$

В новых переменных возмущенному движению отвечает функция Гамильтона вида

$$H = R_1 + \varepsilon^{1/2} \Phi(Q_2, P_2, R_1) + \varepsilon \Phi_1(Q_2, P_2, R_1, u_1, \varepsilon^{1/2}) \quad (3.2)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{2} P_2^2 + Q_2^4 + \alpha Q_2 R_1 \quad (\alpha = \delta h_{10} |h_{40}|^{-1/2}) \quad (3.3)$$

а функция Φ_1 аналитична относительно всех своих аргументов и τ -периодична по u_1 .

3.2. *Приближенная система.* Если в (3.2) отбросить слагаемое $\varepsilon \Phi_1$, то придем к приближенной системе, имеющей гамильтониан

$$H^* = R_1 + \varepsilon^{1/2} \Phi(Q_2, P_2, R_1) \quad (3.4)$$

В приближенной системе величина R_1 постоянна, а изменение переменных Q_2, P_2 со временем описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона

$$\Psi = \varepsilon^{1/2} \Phi(Q_2, P_2, R_1) \quad (3.5)$$

где R_1 – постоянный параметр. Эти уравнения имеют интеграл

$$\Phi(Q_2, P_2, R_1) = h = \text{const} \quad (3.6)$$

Для реального движения $h \geq h^0 = -(27/256)^{1/3} (\alpha R_1)^{4/3}$. При $h = h^0$ имеем устойчивое равновесие, для которого $P_2 = 0$, а $Q_2 = \mp (1/4 |\alpha R_1|)^{1/3}$, где верхний знак соответствует случаю $\alpha R_1 \geq 0$, а нижний – случаю $\alpha R_1 \leq 0$. При $h > h^0$ происходят колебания в окрестности этого положения равновесия.

Фазовые портреты системы с гамильтонианом (3.5) показаны на фиг. 1. Случаям $\alpha R_1 > 0$, $\alpha R_1 = 0$ и $\alpha R_1 < 0$ отвечают соответственно фиг. 1, а, фиг. 1, б и фиг. 1, в.

Точка $Q_2 = P_2 = 0$ лежит внутри области, охватываемой фазовой кривой (3.6), если на этой кривой $h > 0$. Случаю $h = 0$ на фиг. 1, б соответствует само начало координат $Q_2 = P_2 = 0$. На фиг. 1, а и 1, в фазовые кривые, соответствующие случаю $h = 0$, изображены штрихами. На этих кривых

$$|Q_2| \leq |\alpha R_1|^{1/3}, \quad P_2 \leq (27/32)^{1/6} |\alpha R_1|^{2/3} \quad (3.7)$$

3.3. *Переменные действие – угол в приближенной системе.* Чтобы применить результаты КАМ-теории для доказательства теоремы 2, целесообразно теперь ввести в системе с гамильтонианом (3.2) переменные $I_i, w_i (i = 1, 2)$, являющиеся переменными действие – угол [8] в приближенной системе с функцией Гамильтона (3.4). В переменных I_i, w_i функция Гамильтона (3.2) запишется в виде

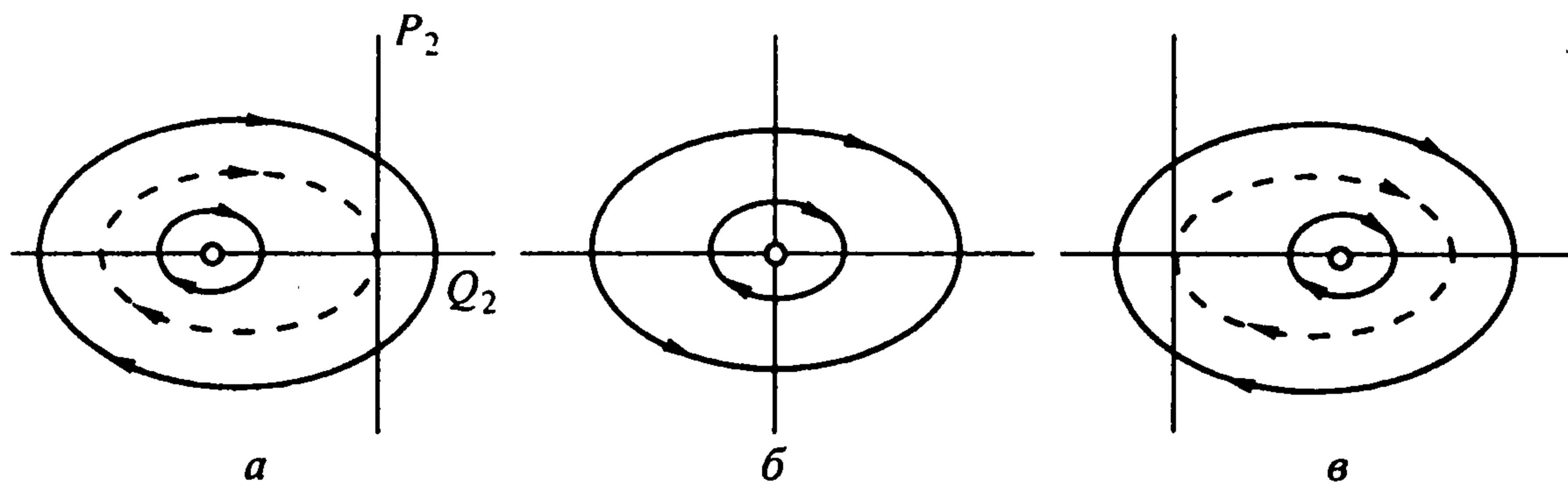
$$H = H^{(0)}(I_1) + \varepsilon^{1/2} H^{(1)}(I_1, I_2) + \varepsilon H^{(2)}(I_1, I_2, w_1, w_2; \varepsilon^{1/2}) \quad (3.8)$$

где $H^{(2)}$ – 2π -периодическая функция относительно угловых переменных w_1, w_2 .

Если $\alpha = 0$ (в этом случае в (1.15) нет членов третьей степени относительно $|r_1|^{1/2}, q_2, p_2$), то замену переменных $U_1, R_1, Q_2, P_2 \rightarrow w_1, I_1, w_2, I_2$ можно получить в явном виде

$$\begin{aligned} U_1 &= w_1, \quad R_1 = I_1 \\ Q_2 &= -V^{1/3} \text{cn}(v, k), \quad P_2 = 2V^{2/3} \text{sn}(v, k) \text{dn}(v, k) \\ v &= 2Kw_2 / \pi, \quad V = 3\pi I_2 / (4K) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь $\text{sn}, \text{cn}, \text{dn}$ – эллиптические функции Якоби, K – полный эллиптический интеграл первого рода, модуль k эллиптических функций и интеграла равен $2^{-1/2}$.



Фиг. 1

Замена (3.9) каноническая, унивалентная, 2π -периодическая по w_2 . Получаем, что в гамильтониане (3.8)

$$H^{(0)} = I_1, \quad H^{(1)} = (\frac{3}{4}\pi I_2 K^{-1})^{\frac{4}{3}} \quad (3.10)$$

а функция $H^{(2)}$ при $I_2 > 0$ аналитична относительно всех своих аргументов.

Пусть теперь $\alpha \neq 0$. Ограничимся только получением переменных действие I_1, I_2 . Так как в приближенной системе U_1 – циклическая координата, то $I_1 = R_1$. Если $I_1 = 0$, то переменная I_2 вводится, как в случае $\alpha = 0$, по формулам из (3.9). Пусть $I_1 \neq 0$ и для определенности $\alpha I_1 > 0$ (случай $\alpha I_1 < 0$ рассматривается аналогично). Тогда имеем

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint P_2 dQ_2 \quad (3.11)$$

где интеграл вычисляется вдоль замкнутой фазовой траектории на фиг. 1, а, задаваемой равенствами (3.3) и (3.6), в которых $R_1 = I_1$.

Если в (3.11) сделать замену $Q_2 = (\alpha I_1)^{\frac{1}{3}} x$, то получим, что

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}\alpha I_1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{f(x)} dx \quad (3.12)$$

$$f = z - x - x^4, \quad z = (\alpha I_1)^{-\frac{4}{3}} h \quad (z \geq -(27/256)^{\frac{1}{3}}) \quad (3.13)$$

Величины x_1, x_2 ($x_1 \leq -2^{-\frac{2}{3}} \leq x_2$) – вещественные корни уравнения $f = 0$. Другие два корня этого уравнения – комплексно-сопряженные числа.

Производная по z правой части равенства (3.12) отлична от нуля. Поэтому его можно разрешить относительно z . Получим, что z будет некоторой функцией от отношения I_2/I_1 . Из (3.13) тогда получаем, что $h = (\alpha I_1)^{\frac{4}{3}} \varphi(I_2/I_1)$. Следовательно, в функции Гамильтона (3.8) имеем

$$H^{(0)} = I_1, \quad H^{(1)} = (\alpha I_1)^{\frac{4}{3}} \varphi(I_2/I_1) \quad (3.14)$$

а функция $H^{(2)}$ при $I_1 \neq 0, I_2 > 0$ аналитична относительно своих аргументов.

3.4. Изменение переменных I_i ($i = 1, 2$) в полной системе и орбитальная устойчивость невозмущенного периодического движения. В приближенной системе, описываемой гамильтонианом (3.4), переменные действия постоянны: $I_i(t) = I_i(0)$ ($i = 1, 2$). В полной системе с гамильтонианом (3.2) величины I_i , вообще говоря, не будут постоянными. Но если записанный в переменных I_i, w_i в виде (3.8) гамильтониан полной системы удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial I_1} \neq 0, \quad \frac{\partial H^{(1)}}{\partial I_2} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} \neq 0 \quad (3.15)$$

то, согласно КАМ-теории [7], при достаточно малых ε (т.е., в силу (3.1), в достаточно малой окрестности траектории невозмущенного движения) для всех начальных условий переменные $I_i(t)$ при всех $t > 0$ мало отличаются от своих начальных значений:

$$|I_i(t) - I_i(0)| < c\varepsilon^{1/2}(c - \text{const}), \quad i = 1, 2 \quad (3.16)$$

Рассмотрим случай $\alpha I_1 = 0$. Из выражений (3.10) для $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$ сразу следует, что при $I_2 > 0$ условия (3.15) выполнены. Поэтому при всех $t > 0$ справедливы неравенства (3.16). Отсюда в силу замен (3.1), (3.9) следует орбитальная устойчивость исследуемого периодического движения (1.1).

Пусть теперь $\alpha I_1 \neq 0$. Первое из условий (3.15), согласно (3.14), очевидно, удовлетворяется. Для производных функции $H^{(1)}$ по I_2 из (3.14), (3.12) получаем, при помощи [9] следующие выражения:

$$\frac{\partial H^{(1)}}{\partial I_2} = \frac{(\alpha I_1)^{1/3} \pi \sqrt{2pq}}{2K(k)}, \quad \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} = \frac{(\alpha I_1)^{-2/3} \pi^2 \sqrt{pq}}{2K(k)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sqrt{pq}}{K(k)} \right)$$

$$p = [(x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2]^{1/2}, \quad q = [(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2]^{1/2}$$

Модуль k полного эллиптического интеграла первого рода $K(k)$ определяется из равенства

$$4pqk^2 = (x_1 - x_2)^2 - (p - q)^2$$

Отметим, что величина $\partial H^{(1)}/\partial I_2$ равна поделенной на $\varepsilon^{1/2}$ частоте колебаний, соответствующей замкнутой траектории на фиг. 1, *a*. Эта величина положительна, и следовательно, второе из условий (3.15) удовлетворяется при всех $z > -(27/256)^{1/3}$, т.е. для всех замкнутых траекторий на фиг. 1, *a*.

Проверка третьего из условий (3.15) более сложна. Но для задачи об устойчивости периодического движения (1.1) достаточно проверить выполнимость этого условия хотя бы для малых положительных значений величины z , которым на фиг. 1, *a* отвечают фазовые траектории (3.6), охватывающие начало координат $Q_2 = P_2 = 0$.

Вычисления показывают, что при малых z справедлива оценка

$$\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} = (\gamma + O(z))(\alpha I_1)^{-2/3}, \quad \gamma = \frac{\pi^2 \sqrt{3}[(\sqrt{3} + 1)K - 2\sqrt{3}E]}{3K^3} \quad (3.17)$$

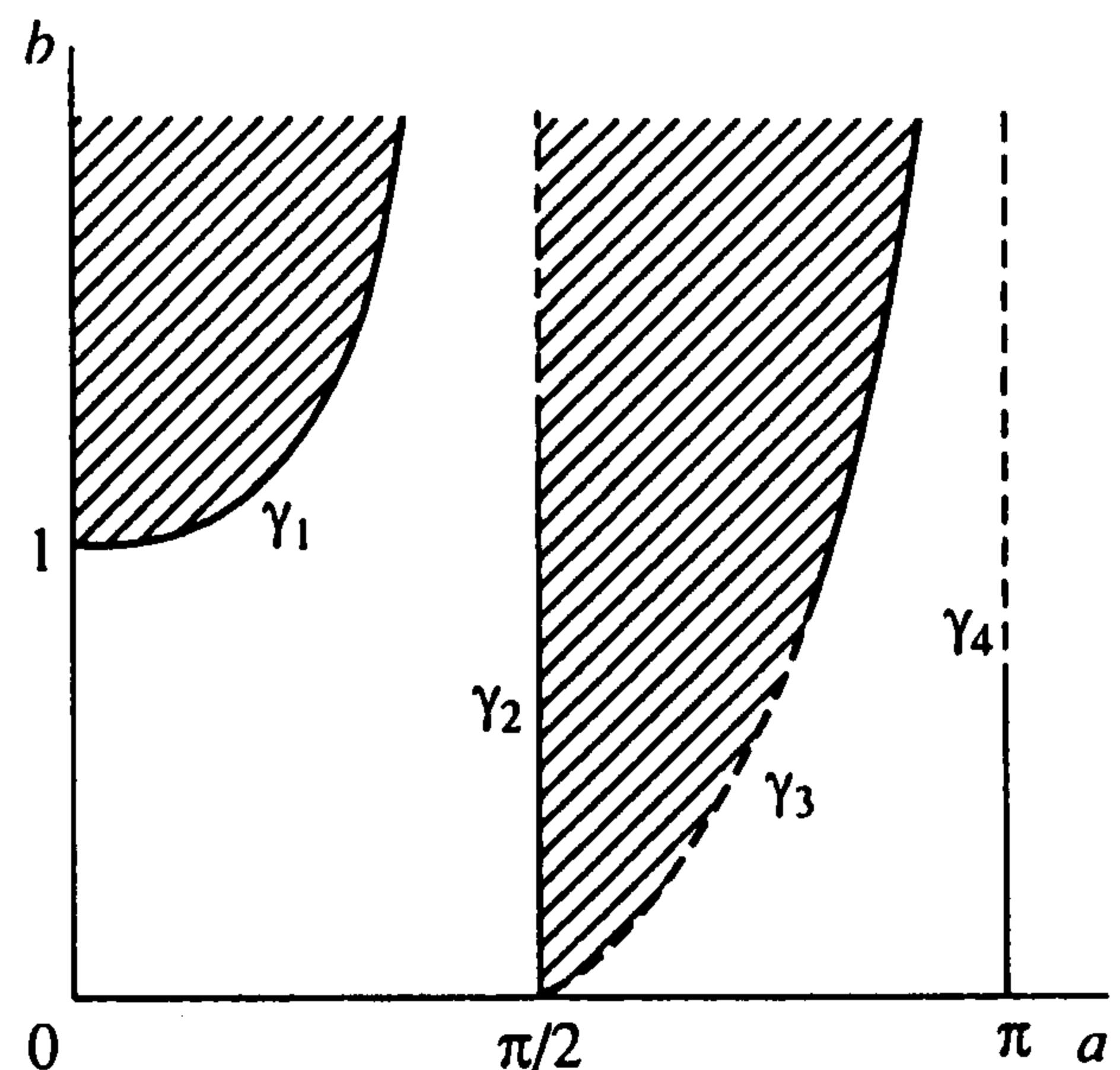
где модуль полных эллиптических интегралов K и E задается равенством $4k^2 = 2 - \sqrt{3}$. Так как $\gamma \approx -1,372$, то из (3.17) следует справедливость третьего из неравенств (3.15) для достаточно малых z . Поэтому для множества всех начальных условий, которые отвечают охватывающим точку $Q_2 = P_2 = 0$ траекториям, лежащим вблизи показанной на фиг. 1, *a* штрихами траектории (3.6) при $h = 0$, переменные $I_i(t)$ ($i = 1, 2$) при всех $t > 0$ удовлетворяют неравенствам (3.16), если только величина ε достаточно мала. Отсюда, при учете неравенств (3.7) и замены (3.1), следует справедливость теоремы 2 и в случае $\alpha I_1 \neq 0$.

4. Об устойчивости периодического движения диска при наличии его соударений с горизонтальной плоскостью. Пусть тонкий однородный круговой диск радиуса R движется над неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскостью в однородном поле тяжести. Время от времени диск соударяется с плоскостью. Соударения считаем абсолютно упругими.

Существует такое движение диска, когда он вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, занимающего вертикальное положение, и при

этом в результате соударений диск периодически подскакивает над плоскостью на высоту h .

Была исследована [10] орбитальная устойчивость этого периодического движения диска (т.е. устойчивость по отношению к возмущениям угла отклонения плоскости диска от вертикали, производной этого угла по времени и высоты подскока диска над плоскостью). Оказалось, что в плоскости безразмерных параметров $a = \omega\sqrt{2h/g}$, $b = 4g/(\omega^2 R)$ существует счетное множество областей устойчивости и неустойчивости. На фиг. 2 показана часть плоскости a, b , содержащая первые две области неустойчивости, они обозначены штриховкой. В [10] не рассматривались значения параметров a, b , лежащие на кривых, разделяющих области устойчивости и неустойчивости. На фиг. 2 первые четыре таких кривых обозначены через γ_k ($k = 1, 2, 3, 4$). Границы γ_2 и γ_4 – вертикальные прямые $a = \pi/2$ и $a = \pi$ соответственно, а границы γ_1 и γ_3 задаются уравнениями $ab = \operatorname{tg} a$ и $ab = -\operatorname{ctg} a$.



Фиг. 2

При помощи результатов предыдущих разделов была исследована устойчивость периодического движения диска на упомянутых граничных кривых. Получение нормализующей замены (1.6) и нормальной формы (1.15) облегчалось тем, что фундаментальная матрица линеаризованных уравнений возмущенного движения может быть выписана в явном виде [10]. Вычисления показали, что содержащаяся в уравнении (1.4) величина $A = 1$ на границах γ_1, γ_4 и -1 на границах γ_2, γ_3 . В выражении (1.15) величина $\delta = 1$ на γ_1, γ_3 и -1 на границах γ_2, γ_4 . Коэффициенты h_{30} и h_{10} тождественно равны нулю. Исследование знака коэффициента h_{40} показало, что на всей кривой γ_1 он положителен; на γ_2 имеем $h_{40} < 0$ при $0 < b < 4/\pi$ и $h_{40} > 0$ при $b > 4/\pi$; на γ_3 при $\pi/2 < a < 2,543\dots$ коэффициент h_{40} отрицателен, а при $2,543\dots < a < \pi$ положителен; на γ_4 имеем $h_{40} < 0$ при $0 < b < 2/\pi$ и $h_{40} > 0$ при $b > 2/\pi$. На основании теорем 1 и 2 отсюда можно сделать выводы об орбитальной устойчивости и неустойчивости на кривых γ_k ($k = 1, 2, 3, 4$). На фиг. 2 участки устойчивости и неустойчивости на этих кривых изображены соответственно сплошными и штриховыми линиями.

5. Случай параметрического резонанса в системе, содержащей малый параметр. Пусть гамильтониан (1.2) зависит от параметра ε ($0 < \varepsilon \ll 1$), аналитичен по нему и при $\varepsilon = 0$ не зависит от переменной ξ_1 . Функции φ_m, ψ_m, χ из (1.3) запишем в виде рядов

$$\varphi_m = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \varphi_m^{(k)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1), \quad \psi_m = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_m^{(k)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1), \quad \chi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \chi^{(k)}(\xi_1) \quad (5.1)$$

$$\varphi_m^{(k)} = \sum_{\nu+\mu=m} \varphi_{\nu\mu}^{(k)}(\xi_1) \xi_2^\nu \eta_2^\mu, \quad \psi_m^{(k)} = \sum_{\nu+\mu=m} \psi_{\nu\mu}^{(k)}(\xi_1) \xi_2^\nu \eta_2^\mu$$

Здесь $\varphi_{\nu\mu}^{(k)}, \psi_{\nu\mu}^{(k)}, \chi^{(k)}$ – постоянные величины, если $k = 0$, и 2π -периодические функции, если $k \geq 1$.

Будем предполагать, что при $\varepsilon = 0$ периодическое движение (1.1) орбитально устойчиво в линейном приближении, причем гамильтониан $\varphi_2^{(0)}$ системы (1.5) имеет вид гамильтониана гармонического осциллятора частоты ω :

$$\varphi_2^{(0)} = \frac{1}{2} \omega (\xi_2^2 + \eta_2^2) \quad (5.2)$$

В этом разделе рассмотрим случай параметрического резонанса, когда величина 2ω близка к целому числу n , причем основное внимание будет уделено случаю нечетного n .

5.1. *Нормализация функции Гамильтона (1.2) при $\varepsilon = 0$.* Исследование удобнее проводить, считая, что функция Гамильтона (1.2) при $\varepsilon = 0$ нормализована до членов четвертой степени включительно относительно $|\eta_1|^{1/2}, \xi_2, \eta_2$. При помощи метода Депри – Хори нормализующую замену переменных $\xi_i, \eta_i \rightarrow \xi_i^*, \eta_i^*$ можно получить как каноническое унивалентное преобразование. В переменных ξ_i^*, η_i^* гамильтониан (1.2) при $\varepsilon = 0$ не содержит членов третьей степени относительно $|\eta_1^*|^{1/2}, \xi_2^*, \eta_2^*$, а совокупность членов четвертой степени зависит от η_1^* и комбинации $(\xi_2^{*2} + \eta_2^{*2})$. Не останавливаясь на подробностях, отметим только, что при нормализации переменная η_1 остается неизменной ($\eta_1 = \eta_1^*$), а переменные ξ_1 и ξ_2, η_2 отличаются от ξ_1^* и ξ_2^*, η_2^* членами, степень которых не ниже второй и третьей соответственно.

В переменных ξ_i^*, η_i^* гамильтониан (1.2) запишется в виде следующего ряда:

$$\Gamma^* = \Gamma_2^* + \Gamma_3^* + \Gamma_4^* + \dots + \Gamma_m^* + \dots \quad (5.3)$$

где Γ_m^* – форма степени m относительно $|\eta_1^*|^{1/2}, \xi_2^*, \eta_2^*$, причем

$$\Gamma_2^* = \eta_1^* + \varphi_2^*, \quad \varphi_2^* = \frac{1}{2}\omega(\xi_2^{*2} + \eta_2^{*2}) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma_2^{*(k)}(\xi_2^*, \eta_2^*, \xi_1^*) \quad (5.4)$$

$$\Gamma_3^* = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma_3^{*(k)}(\eta_1^*, \xi_2^*, \eta_2^*, \xi_1^*) \quad (5.5)$$

$$\Gamma_4^* = c_{20}\eta_1^{*2} + \frac{1}{2}c_{11}(\xi_2^{*2} + \eta_2^{*2})\eta_1^* + \frac{1}{4}c_{02}(\xi_2^{*2} + \eta_2^{*2})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma_4^{*(k)}(\eta_1^*, \xi_2^*, \eta_2^*, \xi_1^*) \quad (5.6)$$

Коэффициенты форм $\Gamma_m^{*(k)}$ в (5.4) – (5.6) 2π -периодичны по ξ_1^* . При этом для форм второй степени $\Gamma_2^{*(k)}$ справедливы равенства $\Gamma_2^{*(k)} = \varphi_2^{(k)}(\xi_2^*, \eta_2^*, \xi_1^*)$, где $\varphi_2^{(k)}(k = 1, 2, \dots)$ – коэффициенты при ε^k в первом из рядов (5.1). Выражения для форм $\Gamma_3^{*(k)}, \Gamma_4^{*(k)}$ более громоздки и здесь не выписываются, так как они в дальнейшем не понадобятся. Постоянные коэффициенты c_{ij} из (5.6) выражаются через коэффициенты разложений (1.2) по формулам

$$\begin{aligned} c_{20} &= \chi^{(0)} - \frac{1}{2}\omega^{-1}(\psi_{10}^{(0)2} + \psi_{01}^{(0)2}) \\ c_{11} &= \psi_{20}^{(0)} + \psi_{02}^{(0)} - \omega^{-1}[\psi_{10}^{(0)}(3\varphi_{30}^{(0)} + \varphi_{12}^{(0)}) + \psi_{01}^{(0)}(3\varphi_{03}^{(0)} + \varphi_{21}^{(0)})] \\ c_{02} &= \frac{1}{2}(3\varphi_{40}^{(0)} + \varphi_{22}^{(0)} + 3\varphi_{04}^{(0)}) - \frac{3}{4}\omega^{-1}[5(\varphi_{03}^{(0)2} + \varphi_{30}^{(0)2}) + \\ &+ \varphi_{21}^{(0)2} + \varphi_{12}^{(0)2} + 2(\varphi_{30}^{(0)}\varphi_{12}^{(0)} + \varphi_{03}^{(0)}\varphi_{21}^{(0)})] \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.2. *Дальнейшее преобразование гамильтониана.* Пусть величина 2ω близка к целому нечетному числу $2n + 1$. Положим

$$2n + 1 - 2\omega = 2\varepsilon\alpha \quad (5.8)$$

где α – величина порядка единицы.

Замечание. Результаты данного раздела могут быть применимы и в случае, когда 2ω близко к четному числу. Так будет, например, если в разложении (1.2) отсутствуют члены третьей степени Γ_3 или они могут быть уничтожены при помощи нормализующего преобразования.

Рассмотрим вспомогательную линейную гамильтонову систему дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона φ_2^* из (5.4) и независимой переменной ξ_1^* . При помощи линейной, вещественной, аналитической по ε , близкой к тождественной, 2π -периодической по ξ_1^* , канонической унивалентной замены переменных $\xi_2^*, \eta_2^* \rightarrow \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2$ эта система может быть преобразована в систему, функция Гамильтона которой $\tilde{\varphi}_2(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \xi_1^*)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2 = & \frac{1}{2}\lambda(\tilde{\xi}_2^2 + \tilde{\eta}_2^2) + \frac{1}{2}[\kappa_1 \sin(2n+1)\xi_1^* - \kappa_2 \cos(2n+1)\xi_1^*](\tilde{\xi}_2^2 - \tilde{\eta}_2^2) + \\ & + [\kappa_1 \cos(2n+1)\xi_1^* + \kappa_2 \sin(2n+1)\xi_1^*]\tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Величины $\lambda, \kappa_1, \kappa_2$ представимы в виде сходящихся рядов

$$\lambda = \frac{1}{2}(2n+1) - \varepsilon(\alpha - \lambda^{(1)}) + \varepsilon^2\lambda^{(2)} + \dots, \quad \kappa_i = \varepsilon\kappa_i^{(1)} + \varepsilon^2\kappa_i^{(2)} + \dots, \quad i = 1, 2 \quad (5.10)$$

где $\lambda^{(k)}, \kappa_i^{(k)}$ – постоянные. В частности [5], имеем

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi_{20}^{(1)} + \varphi_{02}^{(1)}) d\xi_1 \quad (5.11)$$

$$\kappa_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_{11}^{(1)} \cos(2n+1)\xi_1 - (\varphi_{02}^{(1)} - \varphi_{20}^{(1)}) \sin(2n+1)\xi_1] d\xi_1 \quad (5.12)$$

$$\kappa_2^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_{11}^{(1)} \sin(2n+1)\xi_1 + (\varphi_{02}^{(1)} - \varphi_{20}^{(1)}) \cos(2n+1)\xi_1] d\xi_1$$

где $\varphi_{\nu\mu}^{(1)}$ – коэффициенты $\varphi_{\nu\mu}^{(1)}(\xi_1)$ квадратичной формы $\varphi_2^{(1)}$ из (5.1).

Если замену $\xi_2^*, \eta_2^* \rightarrow \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2$, приводящую гамильтониан $\varphi_2^*(\xi_2^*, \eta_2^*, \xi_1^*)$ к виду (5.9), дополнить заменой $\xi_1^*, \eta_1^* \rightarrow \tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1$, задаваемой формулами

$$\xi_1^* = \tilde{\xi}_1, \quad \eta_1^* = \tilde{\eta}_1 + \tilde{\varphi}_2(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \tilde{\xi}_1) - \varphi_2^*(\xi_2^*, \eta_2^*, \tilde{\xi}_1)$$

где аргументы ξ_2^*, η_2^* функции φ_2^* выражены через $\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2$ в соответствии с заменой $\xi_2^*, \eta_2^* \rightarrow \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2$, то получим близкое к тождественному каноническое унивалентное преобразование $\xi_i^*, \eta_i^* \rightarrow \tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i$ всех четырех фазовых переменных. Это преобразование приводит функцию Гамильтона (5.3) к следующему виду:

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\eta}_1 + \tilde{\varphi}_2(\tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2, \tilde{\xi}_1) + \tilde{\Gamma}_3 + \tilde{\Gamma}_4 + \dots + \tilde{\Gamma}_m + \dots \quad (5.13)$$

где $\tilde{\varphi}_2$ – функция (5.9), $\tilde{\Gamma}_m$ – форма степени m относительно $|\tilde{\eta}_1|^{1/2}, \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2$ с 2π -периодическими по $\tilde{\xi}_1$ коэффициентами, причем $\tilde{\Gamma}_3, \tilde{\Gamma}_4$ имеют структуру, задаваемую равенствами (5.5), (5.6). Только в этих равенствах вместо форм $\Gamma_3^{*(k)}, \Gamma_4^{*(k)}$ будут некоторые другие формы $\tilde{\Gamma}_3^{(k)}, \tilde{\Gamma}_4^{(k)}$.

5.3. Об устойчивости периодического движения (1.1) на границе области параметрического резонанса. Введем обозначения

$$\kappa = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2}, \quad \beta = \varepsilon(\alpha - \lambda^{(1)}) - \varepsilon^2\lambda^{(2)} - \dots, \quad a_{02} = c_{02} - c_{11}(n + 1/2) + c_{20}(n + 1/2)^2 \quad (5.14)$$

Теорема 3. В области $|\beta| < \kappa$ периодическое движение (1.1) орбитально неустойчиво. На границе $|\beta| = \kappa$ этой области при достаточно малых ε периодическое движение орбитально устойчиво, если $\beta a_{02} < 0$ и неустойчиво, если $\beta a_{02} > 0$.

Для доказательства прежде всего заметим, что так как ω – полуцелое или близкое к полуцелому числу, то величины ω и 3ω не близки к целым числам. Поэтому канонической, близкой к тождественной (при $\varepsilon = 0$ тождественной) 2π -периодической по $\tilde{\xi}_1$ заменой переменных $\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i \rightarrow \xi'_i, \eta'_i$, получаемой, например, при помощи метода Депри – Хори, в функции Гамильтона (5.13) можно полностью уничтожить члены третьей степени $\tilde{\Gamma}_3$. Преобразованный гамильтониан Γ' будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Gamma' = & \eta'_1 + \frac{1}{4}(2n+1-2\beta)(\xi'^2_2 + \eta'^2_2) + \frac{1}{2}\kappa \cos 2\theta(\eta'^2_2 - \xi'^2_2) + \kappa \sin 2\theta \xi'_2 \eta'_2 + \\ & + c_{20}\eta'^2_1 + \frac{1}{2}c_{11}(\xi'^2_2 + \eta'^2_2)\eta'_1 + \frac{1}{4}c_{02}(\xi'^2_2 + \eta'^2_2)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma_4^{(k)}(\eta'_1, \xi'_2, \eta'_2, \xi'_1) + \dots \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$2\theta = (2n+1)\xi'_1 + \theta_*$$

Угол θ_* определяется равенствами $\kappa_1 = \kappa \sin \theta_*$, $\kappa_2 = \kappa \cos \theta_*$, $\Gamma_4^{(k)}$ – формы четвертой степени относительно $|\eta'_1|^{\frac{1}{2}}, \xi'_2, \eta'_2$ с 2π -периодическими по ξ'_1 коэффициентами.

Затем сделаем каноническую унивалентную замену переменных $\xi'_i, \eta'_i \rightarrow \xi''_i, \eta''_i$, задаваемую равенствами

$$\xi'_1 = \xi''_1, \quad \eta'_1 = \eta''_1 - \frac{1}{4}(2n+1)(\xi''^2_2 + \eta''^2_2) \quad (5.16)$$

$$\xi'_2 = \cos \theta \xi''_2 + \sin \theta \eta''_2, \quad \eta'_2 = -\sin \theta \xi''_2 + \cos \theta \eta''_2$$

В переменных ξ''_i, η''_i квадратичная часть нового гамильтониана не содержит переменную ξ''_1 , а сам гамильтониан будет таким:

$$\begin{aligned} \Gamma'' = & \eta''_1 + \frac{1}{2}[(\kappa - \beta)\eta''^2_2 - (\kappa + \beta)\xi''^2_2] + a_{20}\eta''^2_1 + \frac{1}{2}a_{11}(\xi''^2_2 + \eta''^2_2)\eta''_1 + \\ & + \frac{1}{4}a_{02}(\xi''^2_2 + \eta''^2_2)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma_4^{(k)}(\eta''_1, \xi''_2, \eta''_2, \xi''_1) + O_5 \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$a_{20} = c_{20}, \quad a_{11} = c_{11} - (2n+1)c_{20}$$

Величина a_{02} определена в (5.14), $\Gamma_4^{(k)}$ – формы четвертой степени относительно $|\eta''_1|^{\frac{1}{2}}, \xi''_2, \eta''_2$ с 4π -периодическими по ξ''_1 коэффициентами, O_5 – члены более высоких степеней.

Линеаризованным уравнениям возмущенного движения отвечает гамильтониан, задаваемый первыми тремя слагаемыми в разложении (5.17). При выполнении неравенства $|\beta| < \kappa$ характеристическое уравнение имеет положительный корень. Поэтому, согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению [6], в области $|\beta| < \kappa$ периодическое движение (1.1) орбитально неустойчиво.

Теперь рассмотрим границы области неустойчивости, когда $\beta = \kappa > 0$ или $\beta = -\kappa < 0$. Сделаем каноническое унивалентное преобразование $\xi''_i, \eta''_i \rightarrow u_i, v_i$, задаваемое равенствами

$$\xi''_1 = u_1, \quad \eta''_1 = v_1, \quad \xi''_2 = (2\kappa)^{-\frac{1}{2}}v_2, \quad \eta''_2 = -(2\kappa)^{\frac{1}{2}}u_2, \quad \text{если } \beta = \kappa \quad (5.18)$$

$$\xi''_1 = u_1, \quad \eta''_1 = v_1, \quad \xi''_2 = (2\kappa)^{\frac{1}{2}}u_2, \quad \eta''_2 = (2\kappa)^{-\frac{1}{2}}v_2, \quad \text{если } \beta = -\kappa$$

Эта замена приводит гамильтониан (5.17) к виду (1.13). При этом $F_3 = 0$, а F_2 и F_4 получаются из членов второй и четвертой степеней в (5.17) путем замены величин ξ_i'', η_i'' по формулам (5.18). Воспользовавшись затем формулами (1.16), (1.17), можно вычислить коэффициенты нормализованного гамильтониана (1.15). Получаем, что

$$\delta = -\text{sign } \beta, \quad h_{30} = h_{10} = 0, \quad h_{40} = \kappa^2 a_{02} + O(\varepsilon^3) \quad (5.19)$$

Так как величина κ имеет порядок ε , то знак коэффициента h_{40} при достаточно малых ε совпадает со знаком величины a_{02} . Для малых ε величины δh_{40} и βa_{02} имеют противоположные знаки. Поэтому на основании теорем 1 и 2 получаем, что на границе области параметрического резонанса невозмущенное движение (1.1) орбитально устойчиво, если $\beta a_{02} < 0$, и неустойчиво, если $\beta a_{02} > 0$.

Теорема 3 доказана.

6. Об устойчивости маятникообразных вращений твердого тела вокруг неподвижной точки. Рассмотрим движение твердого тела веса mg вокруг неподвижной точки O . Пусть $Oxuz$ – жестко связанная с телом система координат, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O , A , B и C – соответствующие моменты инерции. Предположим, что центр тяжести G лежит в плоскости Oyz на расстоянии l от точки O , а угол между отрезком OG и осью Oz равен σ .

Постоянную проекцию кинетического момента тела на вертикаль примем равной нулю. Тогда уравнения движения допускают частное решение, отвечающее вращениям тела, для которых плоскость Oyz находится в фиксированной вертикальной плоскости, а тело вращается вокруг горизонтальной оси Ox подобно физическому маятнику. Пусть средняя угловая скорость Ω этого вращения достаточно большая, чтобы безразмерную величину $\varepsilon = mgl/(A\Omega^2)$ можно было принять за малый параметр.

Задача об орбитальной устойчивости упомянутых плоских вращений при малых ε исследована в [11]. На фиг. 3 в плоскости параметров $b = B/A$ и $c = C/A$ в физически допустимой области ($1 + b \geq c$, $b + c \geq 1$, $c + 1 \geq b$) выделены область 1, где момент инерции A относительно оси вращения Ox – средний по величине, и области 2 и 3, где A – наибольший и наименьший из моментов инерции соответственно. В области 1 при достаточно малых ε плоское вращение неустойчиво, а в областях 2 и 3 при малых ε имеет место орбитальная устойчивость, кроме областей параметрического резонанса, где вращение тела неустойчиво. В трехмерном пространстве параметров a, b, ε области неустойчивости ограничены поверхностями, исходящими при $\varepsilon = 0$ из кривой в плоскости b, c , задаваемой уравнением

$$3bc - 4(b + c) + 4 = 0 \quad (6.1)$$

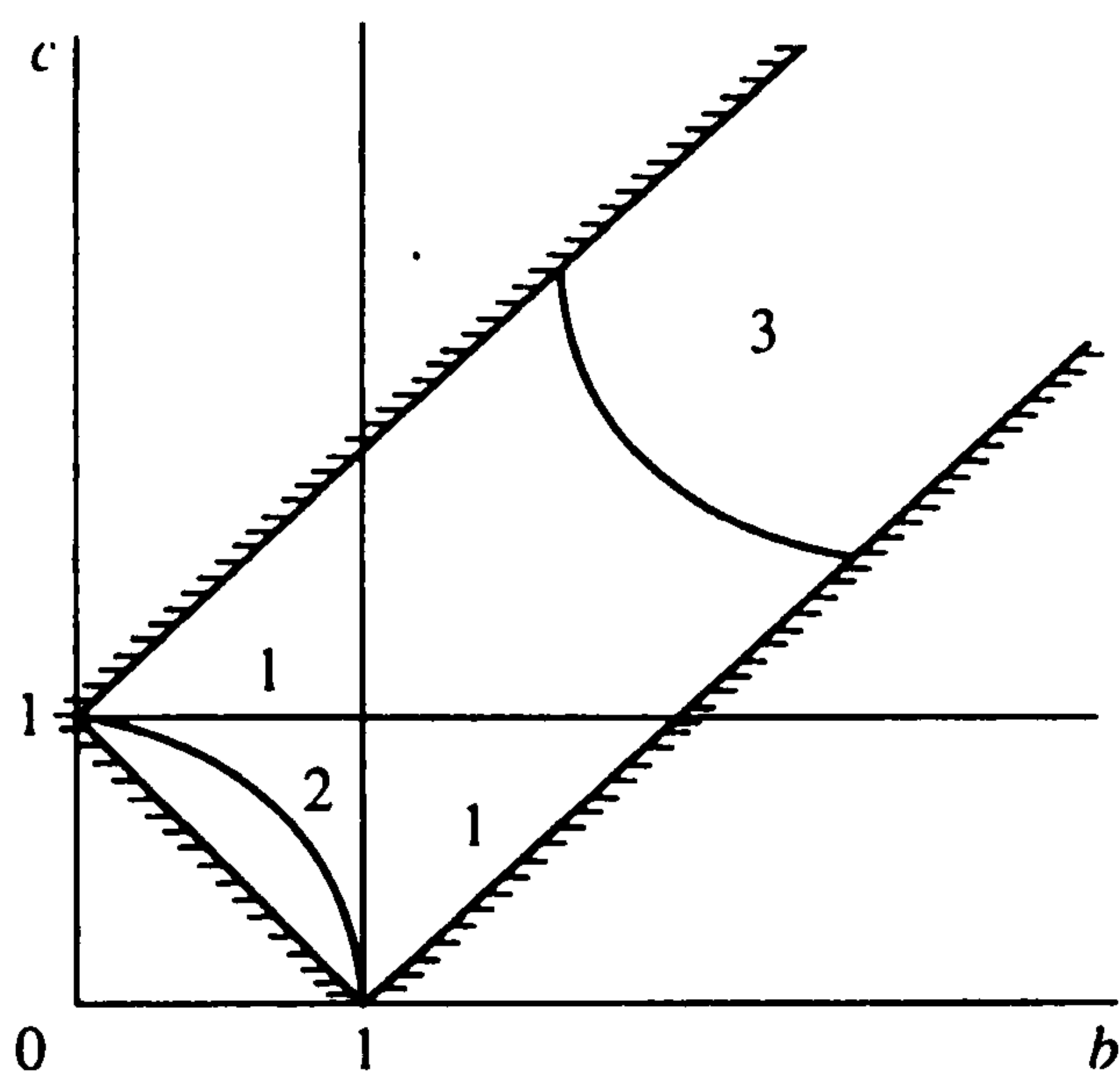
Части ветвей этой кривой, проходящие в областях 2 и 3, показаны на фиг. 3.

Опираясь на результаты разд. 5 данной работы и на вычисления из [11], рассмотрим устойчивость плоских вращений тела на упомянутых поверхностях, ограничивающих области параметрического резонанса при малых ε .

Величина ω из (5.2) вычисляется по формуле

$$\omega = [b^{-1}c^{-1}(1-b)(1-c)]^{1/2}$$

На резонансной кривой (6.1) $\omega = 1/2$ и, следовательно, в равенстве (5.8) имеем $n = 0$.



Фиг. 3

Вблизи кривой (6.1) величина α из (5.8) положительна в области 2 фиг. 3 правее и выше, а в области 3 левее и ниже кривой (6.1). Наоборот, величина α отрицательна в области 2 левее и ниже, а в области 3 правее и выше этой кривой.

Коэффициенты c_{ij} (см. (5.6), (5.7)) получаются такими:

$$c_{20} = s/2, \quad c_{11} = s\omega, \quad c_{02} = -s[b^{-1}(1-b) + c^{-1}(1-c)]/4$$

где $s = 1$ в области 2 и $s = -1$ в области 3.

Величина $\lambda^{(1)}$ из (5.11) оказалась равной нулю, а для величин (5.12) можно получить следующие выражения:

$$\kappa_1^{(1)} = -(4b)^{-1}[2b - sr(2-b)]\sin\sigma, \quad \kappa_2^{(1)} = s(4rc)^{-1}(3c-2)\cos\sigma \quad (6.2)$$

$$r = [c^{-1}(1-b)^{-1}b(1-c)]^{1/2}$$

В гамильтониане возмущенного движения, приведенного к форме (5.17), имеем

$$\kappa = \varepsilon\sqrt{\kappa_1^{(1)2} + \kappa_2^{(1)2}} + O(\varepsilon^2), \quad \beta = \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2), \quad a_{02} = -s\{1 + 2[b^{-1}(1-b) + c^{-1}(1-c)]\}/8 \quad (6.3)$$

Нетрудно убедиться, что вблизи резонансной кривой (6.1) величина a_{02} отрицательна как в области 2, так и в области 3.

В первом приближении по ε область параметрического резонанса задается неравенством

$$|\omega - 1/2| < \varepsilon\sqrt{\kappa_1^{(1)2} + \kappa_2^{(1)2}} \quad (6.4)$$

6 Принимая во внимание приведенные выше результаты анализа знаков величин α и a_{02} , получаем, на основании теоремы 3, что при малых ε в пространстве b, c, ε на поверхностях, ограничивающих области параметрического резонанса, изучаемое плоское вращение тела орбитально устойчиво для значений b, c , лежащих в области 2 правее и выше, а в области 3 левее и ниже кривой (6.1), и неустойчиво в области 2 левее и ниже, а в области 3 правее и выше этой кривой.

6 О случае Ковалевской. В качестве примера рассмотрим частный случай тела, геометрия масс которого близка к геометрии масс тела в случае Ковалевской, когда $B = C = 2A$. В случае Ковалевской $b = c = 2$, и замечателен тот факт, что при этом реализуется точный резонанс $\omega = 1/2$. Этот резонанс означает, что угловая скорость плоского вращения тела ровно в 2 раза больше частоты малых пространственных колебаний тела в окрестности этого вращения.

Точка $b = c = 2$ принадлежит участку кривой (6.1), лежащему в области 3 фиг. 3. Учитывая соотношения (6.2) и (6.3), получаем, что в этой точке

$$s = -1, \quad r = 1, \quad \kappa = \varepsilon/2 + O(\varepsilon^2), \quad a_{02} = -1/8 \quad (6.5)$$

Пусть $b = 2 + \Delta b, c = 2 + \Delta c$, где Δb и Δc — малые величины. Тогда с точностью до первых степеней $\Delta b, \Delta c$ имеем

$$\omega = 1/2 + 1/8(\Delta b + \Delta c)$$

Отсюда и из (6.3) — (6.5) получаем, что в первом приближении по ε область параметрического резонанса задается неравенством

$$|\Delta b + \Delta c| < 4\varepsilon \quad (6.6)$$

На границе области (6.6) вращение тела орбитально устойчиво при достаточно малых ε , если соответствующие Δb и Δc таковы, что $\Delta b + \Delta c < 0$, и неустойчиво, если $\Delta b + \Delta c > 0$.

Например, если $\Delta b = 0$ или $\Delta c = 0$, то в первом приближении по ϵ области параметрического резонанса задаются соответственно неравенствами

$$2-4\epsilon < c < 2 + 4\epsilon \text{ или } 2-4\epsilon < b < 2 + 4\epsilon$$

На границах $c = 2-4\epsilon$ и $b = 2-4\epsilon$ этих областей вращение твердого тела орбитально устойчиво, а на границах $c = 2 + 4\epsilon$ и $b = 2 + 4\epsilon$ неустойчиво.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00405).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1927. = *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
2. *Иванов А.П., Сокольский А.Г.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 963–970.
3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: ЧеРО, 1999. 569 с.
4. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. N.Y.: Springer, 1972 = *Джакалья Г.Е.О.* Методы возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
6. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
7. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
8. *Goldstein H.* Classical Mechanics. Cambridge: Addison – Wesley, 1951. = *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.
9. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
10. *Маркеев А.П.* Исследование устойчивости периодического движения твердого тела при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 71–81.
11. *Маркеев А.П.* О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 29–36.

Москва

Поступила в редакцию
18.II.2000