

УДК 531.11:534.1

© 2000 г. Л.Д. Акуленко

**ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Исследуются высшие моды собственных колебаний широкого класса механических систем, описываемых обобщенными краевыми задачами с граничными условиями различных типов. Разработана конструктивная методика определения частот и форм, основанная на применении асимптотических методов нелинейной механики (методов усреднения, ускоренной сходимости и асимптотических разложений). Получены в явной форме выражения для собственных значений (частот) и функций (форм) с требуемой степенью точности по отрицательным степеням порядкового номера моды, дано обоснование метода. Приведен расчет собственных значений для конкретных механических систем, совершающих свободные или параметрические колебания. Рассмотрены колебания неоднородного стержня и поперечные колебания сильно натянутой неоднородной струны; изучены высшие резонансные зоны в задаче Хилла о параметрических колебаниях и в задаче о малых пространственных колебаниях динамически симметричного спутника, полярная ось которого совершает нелинейные колебания в плоскости круговой орбиты; обнаружены и описаны механические эффекты.

1. Постановка задачи. Исследуются собственные колебания механических систем, описываемых обобщенной краевой задачей на собственные значения и функции вида [1–4]

$$\begin{aligned} (p(x, \lambda)u')' + f(x, \lambda)u &= 0, \quad u(0) = u(L) = 0 \\ 0 < c_1 \leq p, f \leq c_2 < \infty, \quad 0 \leq x \leq L < \infty, \quad \lambda \in \Lambda \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь x – аргумент (эйлерова линейная координата или время), L – заданная величина. Коэффициенты p, f определяются механическим содержанием задачи (1.1) (см. разд. 6). Эти функции считаются достаточно гладкими в рассматриваемой области изменения переменных x, λ и обладающими определенными структурными свойствами. Параметр λ характеризует частоту колебаний или физический параметр системы; далее изучается ситуация, когда его значения могут быть сколь угодно большими ($\lambda \rightarrow \infty$). Предполагается, что соотношения (1.1) приведены к безразмерным переменным. Ставится задача определения вещественных собственных значений λ_n и функций $u_n(x)$ при достаточно больших $n \gg 1$ [5–7].

В задаче (1.1) ради определенности рассматриваются краевые условия жесткого закрепления концов [1, 5]. При необходимости могут быть взяты более общие условия упругого закрепления или свободного одного или обоих концов (см. разд. 5). Для приложений также представляют интерес смешанные краевые условия или условия периодичности [1, 2, 5]. Отметим, что дифференциальный оператор в задаче (1.1) относится к частному случаю широкого класса несамосопряженных линейных операторов [2, 3, 7].

Основные результаты были получены для самосопряженной краевой задачи при $f \equiv \lambda r(x) - q_0(x)$; обычно полагают $p = r \equiv 1$. Была разработана теория, а также аналитические и численные методы построения решения $\lambda_n, u_n(x)$ (вариационные методы, метод конечных элементов, метод ускоренной сходимости и др. [1, 2, 5–8]). Численные методы эффективны для относительно малых значений индекса $n \sim 1$, т.е. для низших мод колебаний. В теоретическом и прикладном аспектах также важное значение имеет исследование поведения решения при $n \gg 1$, и, в частности, построение асимптотики при $n \rightarrow \infty$. Асимптотические представления для $\lambda_n, u_n(x)$ были получены конструктивно в главном члене разложения [5–7]. Более точные приближенные выражения, приводящие к сколь угодно малой абсолютной погрешности и пригодные в практических расчетах также для сравнительно небольших значений $n \sim 1$, будут полезными в прикладном аспекте.

Предлагается разработать эффективный численно-аналитический метод построения высокоточного приближенного решения обобщенной краевой задачи (1.1) при выполнении определенных требований к структуре функций p, f , а именно,

$$p \equiv p(x), \quad f \equiv \omega^2 r(x) - \omega q(x, \varepsilon), \quad \lambda = \omega^2, \quad \varepsilon = \omega^{-1} \quad (1.2)$$

$$0 < c_1 \leq p, r \leq c_2 < \infty, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 \ll 1, \quad \omega \gg 1$$

Функции вида (1.2) часто встречаются в приложениях (см. пример 6.4). Параметр ω характеризует частоту, а ε – период колебаний; собственные значения этих величин требуется определить. Функции r, q считаются гладкими по x и, кроме того, q зависит от ε регулярным образом: непрерывна и удовлетворяет условию Липшица. Отметим, что посредством неособенной линейной замены $u^* = u\sqrt{p}$ уравнение (1.1) приводится к виду, в котором $p \equiv 1$ [2, 5]. Функция $p(x)$ должна быть достаточно гладкой и знакоопределенной (см. (1.2)).

В классической задаче Штурма–Лиувилля исследуется частный случай (1.2), когда $q \equiv \varepsilon q_0(x)$, т.е. $q(x, 0) \equiv 0$. Для него получен следующий фундаментальный результат [5]:

$$\lambda_n = (\pi n)^2 \left(\int_0^L v_0(x) dx \right)^{-2} + O(1), \quad u_n(x) = \left(\frac{2}{L} \right)^{1/2} (\mu_0(x))^{1/2} \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \int_0^x v_0(y) dy \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.3)$$

$$v_0(x) = (r(x)/p(x))^{1/2}, \quad \mu_0(x) = (r(x)p(x))^{-1/2}, \quad (u_n, u_m)_r = \delta_{nm} + O(n^{-1}, m^{-1})$$

В рассмотренном приближении (1.3) функция $q_0(x)$ несущественна, что свидетельствует о необходимости уточнения этих выражений.

Проблема высокоточных асимптотических разложений обсуждалась [6, 7], однако приведенные формулы не имеют конструктивного характера, так как не представлены в терминах исходных коэффициентов; полученные результаты имеют неявную форму и требуют решения трансцендентных, как правило, уравнений.

Изложим конструктивный метод построения приближенного решения обобщенной краевой задачи (1.1), (1.2), основанный на использовании методов нелинейной механики (усреднения, ускоренной сходимости и асимптотических разложений [9–12]). Он допускает естественные обобщения на более широкие классы краевых задач (см. ниже). Отметим, что рассматриваемая задача соответствует относительной асимптотической близости функций $f(x, \lambda)$ и $\lambda r(x) - q_0(x)$ при $\lambda \rightarrow \infty$; абсолютные значения могут существенно (неограниченно) различаться (на величину $O(\sqrt{\lambda})$).

2. Применение асимптотических методов нелинейной механики. Рассмотрим обобщенную краевую задачу (1.1), (1.2) для асимптотически больших значений параметра λ . Считаем, что эти соотношения представлены в безразмерной форме, т.е. $\lambda, \omega, \varepsilon, L$ – числовые параметры, причем $\lambda, \omega \gg 1, \varepsilon \ll 1, L \sim 1$. Введем аргумент $s = \omega x$, изменяющийся на асимптотически большом промежутке $0 \leq s \leq L\varepsilon^{-1}$. Тогда (1.1) при-

водится к виду уравнения колебательной системы с медленно изменяющимися параметрами: $x = \varepsilon s$.

Представим краевую задачу в стандартных переменных "амплитуда-фаза" a, φ [9–11]

$$\begin{aligned} da/ds &= \varepsilon a F_+(x, \varphi, \varepsilon), \quad u = a \sin \varphi, \quad du/ds = a v_0 \cos \varphi, \quad a > 0 \\ d\varphi/ds &= v_0(x) + \varepsilon N_+(x, \varphi, \varepsilon), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(L\varepsilon^{-1}) = \pi n \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$F_{\pm} \equiv \frac{1}{2} g(x, \varepsilon) \sin 2\varphi - \frac{1}{2} h(x)(\pm 1 + \cos 2\varphi),$$

$$N_{\pm} \equiv -\frac{1}{2} g(x, \varepsilon)(1 \mp \cos 2\varphi) + \frac{1}{2} h(x) \sin 2\varphi$$

$$g \equiv q(x, \varepsilon) \mu_0(x), \quad h \equiv -(\ln \mu_0(x))', \quad 0 < r_1/p_2 \leq v_0 \leq r_2/p_1 < \infty$$

Производная по "быстрому" аргументу $s = \omega x$ характеризует скорость изменения фазы φ : $d\varphi/ds \approx v_0 \sim 1$; x – "медленная" переменная. Заметим, что правые части уравнений (2.1) π -периодичны по φ и, кроме того, переменная φ отделяется. Для нее имеет место краевая задача на асимптотически большом интервале $0 \leq s \leq L\varepsilon^{-1}$, величина которого определяется значением $n \gg 1$. Параметр $\varepsilon = \omega^{-1}$ не задан, а должен быть найден из краевого условия. После вычисления функции $\varphi(s, \varepsilon)$ и значений $\varepsilon_n = \varepsilon(n)$ неизвестная $a_n = a(s, \varepsilon_n)$ находится простой квадратурой (см. разд. 4).

Искомая быстрая фаза $\varphi(s, \varepsilon)$ для $0 \leq s \leq L\varepsilon^{-1}$ строится приближенно с помощью стандартной схемы метода усреднения. Она заключается в определении замены $\varphi \rightarrow \psi$, близкой к тождественной и такой, что уравнение для новой "усредненной" фазы ψ имеет определенную структуру с требуемой степенью точности по ε [9–11]

$$\varphi = \psi + \varepsilon V(x, \psi, \varepsilon) = \psi + \varepsilon V_1(x, \psi, \varepsilon) + \varepsilon^2 V_2 + \dots + \varepsilon^k V_k + \varepsilon^{k+1} \dots \quad (2.2)$$

$$d\psi/ds = v_0(x) + \varepsilon M(x, \varepsilon) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, \varepsilon) + \varepsilon^2 v_2 + \dots + \varepsilon^k v_k + \varepsilon^{k+1} \dots$$

Здесь V_i, v_i – подлежащие определению функции, регулярно зависящие от ε через $g(x, \varepsilon)$. Степень точности k разложений (2.2) ограничивается только гладкостью функции N_+ по x , поскольку по φ она аналитична. Учет членов $O(\varepsilon^k)$ включительно приводит к погрешности $O(\varepsilon^k)$ на интервале $0 \leq s \leq L\varepsilon^{-1}$. Неизвестные функции V_i, v_i находятся стандартным образом с учетом условия π -периодичности по ψ [9–14]. Для усредненной производной $d\psi/ds$ имеют место явные аналитические представления

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= v^{(k)}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} \dots, \quad v^{(k)}(x, \varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^k \varepsilon^i v_i(x, \varepsilon) \\ v_0(x) &= \left(\frac{r(x)}{p(x)} \right)^{1/2}, \quad v_1(x, \varepsilon) = \langle N_+ \rangle = -\frac{1}{2} g(x, \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$v_2 = -\left\langle \frac{\partial V_1}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial N_+}{\partial \psi} V_1 \right\rangle = -\frac{1}{4} H' - \frac{v_0}{8} (H^2 + G^2), \quad H \equiv \frac{h}{v_0}$$

$$v_3 = -\left\langle \frac{\partial V_2}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 N_+}{\partial \psi^2} V_1^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial N_+}{\partial \psi} V_2 \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{32} H G' - \frac{3}{32} H' G - \frac{v_0^2}{32} G (H^2 + G^2) + \frac{1}{8} \left(\frac{G'}{v_0} \right)', \quad G \equiv \frac{g}{v_0}$$

и т.д. Угловые скобки в (2.3) и далее означают усреднение по ψ соответствующих π -периодических функций, имеющих элементарную тригонометрическую структуру, что позволяет вычислить средние значения в явном виде. Функции $V_i(x, \psi, \varepsilon)$ также определяются явно

$$V_1(x, \psi, \varepsilon) = \frac{1}{v_0} \int_0^\psi (N_+ - \langle N_+ \rangle) d\varphi = \frac{1}{2v_0(x)} F_-(x, \psi, \varepsilon) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} V_2(x, \psi, \varepsilon) &= \frac{1}{v_0} \int_0^\psi \left(\left\langle \frac{\partial V_1}{\partial x} \right\rangle - \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial N_+}{\partial \psi} V_1 - \left\langle \frac{\partial N_+}{\partial \psi} V_1 \right\rangle \right) d\varphi - \frac{v_1}{v_0} V_1 = \\ &= -(G'/(8v_0))(1 - \cos 2\psi) + \frac{1}{8} (H^2 + G^2 + H'/v_0) \sin 2\psi + \\ &+ \frac{1}{16} HG(1 - \cos 4\psi) - \frac{1}{32} (H^2 - G^2) \sin 4\psi \end{aligned}$$

и т.д. Аналогично могут быть найдены последующие коэффициенты v_i, V_{i-1} асимптотических разложений (2.2). Отметим, что при построении k -го приближения определение функции V_k согласно (2.4) излишне, поскольку погрешность расчетов вследствие интегрирования на промежутке $0 \leq s \leq L\varepsilon^{-1}$ будет $O(\varepsilon^k)$, а учет V_k приведет к так называемому "улучшенному" k -му приближению [9, 10].

С помощью приведенных выше выражений (2.3), (2.4) искомые переменные ψ, φ выписываются с абсолютной погрешностью $O(\varepsilon^3)$ для всех $0 \leq s \leq L\varepsilon^{-1}$:

$$\psi^{(k)}(s, \varepsilon) = \int_0^s v^{(k)}(\varepsilon y, \varepsilon) dy, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad s = x\varepsilon^{-1} \quad (2.5)$$

$$\varphi^{(3)}(x, \varepsilon) = \psi^{(3)}(s, \varepsilon) + \varepsilon V_1(x, \psi^{(2)}(s, \varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon^2 V_2(x, \psi^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon)$$

Здесь функции $v^{(k)}$ определяются согласно (2.3). Подстановка в коэффициенты $V_{1,2}$ более высоких приближений для фазы ψ не оправдана и, кроме того, можно взять $V_2(x, \psi^{(1)}, 0)$ и в $\psi^{(1)}(s, \varepsilon)$ отбросить члены $O(\varepsilon)$. Напомним, что зависимость функций v_i и V_i от ε обусловлена возможной негладкой зависимостью $g(x, \varepsilon)$ согласно (1.2); предполагается выполнение условия Липшица. Отметим, что $V_i(x, \pi n, \varepsilon) \equiv 0$, т.е. краевые условия для $\psi^{(k)}$ и $\varphi^{(k)}$ совпадают. С помощью найденных приближенных выражений ψ, φ вычисляются с требуемой точностью собственные значения ε_n параметра ε , а также $\omega_n = \varepsilon_n^{-1}$ и $\lambda_n = \omega_n^2$. Как указывалось, величины ε_n характеризуют малые периоды собственных колебаний, а ω_n — большие частоты при $n \gg 1$.

Аналогичные разложения применимы в задаче (1.1), для которой имеют место более общие, чем (1.2), структурные представления коэффициентов p, f . Например, можно взять функции вида

$$f \equiv \omega^K r(x, \varepsilon) + \omega^{K-1} q(x, \varepsilon), \quad p \equiv \omega^{K-2} w(x, \varepsilon), \quad K \geq 2, \quad \omega = \sqrt{\lambda} = \varepsilon^{-1}$$

При этом должны выполняться стандартные требования знакоопределенности функций r, w .

3. Определение собственных частот и фаз колебаний. Собственные значения параметров $\varepsilon_n, \omega_n = \varepsilon_n^{-1}, \lambda_n = \omega_n^2$ задачи (1.1), (1.2) вычисляются приближенно из конечного условия для ψ (2.1) и (2.4), (2.5). Для удобства расчетов введем новую неизвестную $z = \pi n\varepsilon$, собственные значения которой ограничены при $n \rightarrow \infty$. С погрешностью

$O(\varepsilon_n^4) = O(n^{-4})$ для z получим уравнение

$$z = \alpha_0 + \alpha_1 \zeta z + \alpha_2 (\zeta z)^2 + \alpha_3 (\zeta z)^3 + O((\zeta z)^4), \quad \zeta = (\pi n)^{-1} \ll 1 \quad (3.1)$$

$$\alpha_i = \alpha_i(\zeta z) = \int_0^L v_i(x, \zeta z) dx, \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad \varepsilon = \zeta z$$

Приближенное решение $z_n = z(\zeta)$ с погрешностью $O(\zeta^4)$ строится с помощью процедуры асимптотических разложений [11, 13]. Оценки абсолютной и относительной погрешностей определения z_n совпадают. Искомые значения z_n удобнее находить последовательными приближениями по степеням параметра ζ ; в частности, при $k \leq 3$ имеем

$$z_n^{(3)} = \alpha_0 + \alpha_1^{(2)} \zeta z_n^{(2)} + \alpha_2^{(1)} (\zeta z_n^{(1)})^2 + \alpha_3^{(0)} (\zeta z_n^{(0)})^3, \quad |z_n - z_n^{(3)}| = O(\zeta^4) \quad (3.2)$$

$$z_n^{(0)} = \alpha_0, \quad z_n^{(1)} = \alpha_0 (1 + \alpha_1(0) \zeta), \quad z_n^{(2)} = \alpha_0 \left(1 + \alpha_1 (\zeta z_n^{(1)}) \zeta (1 + \alpha_1(0) \zeta) \right) + \\ + \alpha_2(0) \zeta^2 \alpha_0^2, \quad \alpha_1^{(2)}(\zeta) = \alpha_1(\zeta z_n^{(2)}(\zeta)), \quad \alpha_2^{(1)}(\zeta) = \alpha_2(\zeta z_n^{(1)}(\zeta)), \quad \alpha_3^{(0)} = \alpha_3(0)$$

Промежуточные приближения $z_n^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, отличаются от значения $z_n^{(3)}$ на величину $O(\zeta^{k+1})$, что устанавливается простыми оценками. Затем с помощью найденных $z_n^{(k)}$ (3.2) элементарно определяются искомые собственные значения параметров $\varepsilon_n^{(k)}$, $\omega_n^{(k)}$, $\lambda_n^{(k)}$.

В соответствии с определением (3.1) имеем $\varepsilon_n^{(k)} = \zeta z^{(k)}(\zeta) = z_n^{(k)} / (\pi n)$, в частности, для $k = 0, 1, 2, 3$. Параметр $\varepsilon_n^{(k)}$ определяется с абсолютной погрешностью $O(\zeta^{k+2})$; относительная погрешность будет $O(\zeta^{k+1})$, как и для $z_n^{(k)}$. Основным интерес представляет определение собственного значения параметра $\omega_n = \varepsilon_n^{-1}$

$$\omega_n^{(k)} = \pi n / z_n^{(k)}, \quad \varepsilon_n^{(k)} = z_n^{(k)} / (\pi n), \quad \lambda_n^{(k)} = \omega_n^{(k)2} \quad (3.3)$$

Величина $\omega_n^{(k)}$ с абсолютной погрешностью $O(\zeta^k)$ характеризует значение собственной частоты колебаний. При $k = 0$ получается выражение $\omega_n^{(0)} = \pi n / \alpha_0$, соответствующее классической формуле (1.3), поскольку $\lambda_n^{(k)} = \omega_n^{(k)2}$. Естественно, абсолютная погрешность вычисления $\lambda_n^{(k)}$ составит в общем случае величину $O(\zeta^{k-1})$. Относительная погрешность $O(\zeta^{k+1})$ остается прежней, как и для значений $z_n^{(k)}$, $\varepsilon_n^{(k)}$, $\omega_n^{(k)}$, что очевидно.

Получен следующий основной результат. Формулы (3.1)–(3.3) в явном аналитическом виде задают искомые уточненные значения ε_n , ω_n , λ_n . Они элементарны – сводятся к простым квадратурам от известных функций – и часто определяются в аналитической форме. Формулы применимы для достаточно точных расчетов также при "не очень больших" значениях номера моды n . Обычно в прикладных задачах эти выражения пригодны с удовлетворительной точностью при $n \geq 1$; для $n = 2, 3, \dots$ относительная погрешность расчетов не превышает 10^{-2} – 10^{-3} , конечно, если функции p , r , q достаточно гладкие (см. ниже примеры в разд. 6). В конкретных задачах целесообразно провести предварительное исследование на основе численных расчетов для низших мод колебаний $n = 1, 2, \dots$ и сравнить с получающимися асимптотическими выражениями (3.1)–(3.3) (пример 6.4).

Изложим кратко схему определения фаз $\varphi_n(x)$ собственных колебаний. Согласно (2.3), (2.5), (3.3) получим выражения для усредненных частот $v_n^{(k)}(x)$ и фаз $\psi_n^{(k)}(x)$ вида

$$v_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k (\varepsilon_n^{(k)})^i v_i(x, \varepsilon_n^{(k)}) = \sum_{i=0}^k (\varepsilon_n^{(k-i)})^i v_i(x, \varepsilon_n^{(k-i)}) + O(\zeta^{k+1}) \quad (3.4)$$

$$\psi_n^{(k)}(x) = \omega_n^{(k)} \int_0^x v_n^{(k)}(y) dy, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad \zeta = \frac{1}{\pi n}, \quad n \gg 1$$

На основе проведенных в разд. 2, 3 построений и оценок имеют место оценки скорости сходимости $v_n^{(k)}$, $\psi_n^{(k)}$ к точным выражениям

$$|v_n(x) - v_n^{(k)}(x)| \leq c \zeta^{k+1}, \quad |\psi_n(x) - \psi_n^{(k)}(x)| \leq c \zeta^k, \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.5)$$

Искомые фазы $\varphi_n(x)$ собственных колебаний с требуемой степенью точности по ζ определяются посредством формул (2.2), (3.3)

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \psi_n^{(k)}(x) + \sum_{i=1}^k (\varepsilon_n^{(k)})^i V_i(x, \psi_n^{(k)}(x), \varepsilon_n^{(k)}), \quad |\varphi_n - \varphi_n^{(k)}| \leq c \zeta^k \quad (3.6)$$

В выражениях (3.4), (3.6) могут быть отброшены слагаемые $O(\zeta^k)$. Напомним, что функции V_i (2.4) построены таким образом, что $V_i(x, \pi n, \varepsilon) \equiv 0$.

Строгое доказательство сходимости при $k \rightarrow \infty$ к точному решению проблематично даже в случае аналитической по x системы, поскольку разложения имеют асимптотический характер и, вообще говоря, расходятся при $k \rightarrow \infty$. Целесообразнее применить метод последовательных приближений и соответствующую теорему об операторе сжатия [11].

Известно [9–16], что в асимптотических процедурах методов усреднения и ускоренной сходимости, связанных с построением замен переменных, увеличение точности вычислений потребует большей гладкости уравнений или привлечения техники сглаживания. Это свойство обусловлено накоплением порядка производных по медленной переменной x в рассматриваемом случае; относительно φ функция N_+ (2.1) аналитична и имеет вид элементарного тригонометрического полинома. Аналитичность по x правых частей, однако, не гарантирует сходимости этих процедур при $k \rightarrow \infty$ вследствие "резонанса" между быстрой φ и медленной x переменными [14].

Сочетанием методов усреднения и последовательных приближений [11] можно построить процедуру неограниченного уточнения решения $\varphi(x, \varepsilon)$ уравнения (2.1), не требующую аналитичности. Изложим весьма кратко соответствующую схему и обсудим ее особенности. На начальном этапе совершим замену $\varphi \rightarrow \psi$ с помощью известной функции $V_1(x, \psi, \varepsilon)$ (2.2). Дифференцированием по s и алгебраическими преобразованиями получим краевую задачу вида

$$d\psi / ds = v^{(1)}(x, \varepsilon) + \varepsilon^2 M(x, \psi, \varepsilon), \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(L\varepsilon^{-1}) = \pi n$$

$$\varphi = \psi + \varepsilon V_1(x, \psi, \varepsilon), \quad V_1 \equiv (2v_0(x))^{-1} F_-(x, \psi, \varepsilon) \quad (3.7)$$

$$M \equiv \left[\frac{1}{\varepsilon} (N_+(x, \psi + \varepsilon V_1, \varepsilon) - N_+(x, \psi, \varepsilon)) - (N_+ - \langle N_+ \rangle) \langle N_+ \rangle \right] \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\varepsilon}{v_0} (N_+ - \langle N_+ \rangle) \right]^{-1}$$

Функция M (3.7) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ аналитична по ψ в некоторой полосе, см. [12, 14–16], и непрерывна по x . Относительно ε она удовлетворяет условию Лип-

шица, что используется при построении решения краевой задачи, т.е. при определении ϵ_n и ω_n, λ_n . Для вычисления функции $\psi(x, \epsilon)$ на интервале $0 \leq x \leq L$ применим к задаче Коши (3.7) метод последовательных приближений

$$\psi^{(k+1)}(x, \epsilon) = \psi^{(1)}(x, \epsilon) + \epsilon \int_0^x M(y, \psi^{(k)}(y, \epsilon), \epsilon) dy, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Функция $\psi^{(1)}(x, \epsilon)$ в (3.8) есть квадратура от $v^{(1)}$ (см. (2.5)). Последовательные приближения (3.8) абсолютно и равномерно сходятся при $\epsilon > 0$ достаточно малом к непрерывно дифференцируемой по x функции $\psi(x, \epsilon)$, причем разность $\psi - \psi^{(1)} = O(\epsilon)$, $0 \leq x \leq L$ и ψ удовлетворяет условию Липшица по ϵ . Это свойство позволяет применить процедуру определения собственных значений ϵ_n и ω_n, λ_n на основе метода последовательных приближений [11, 13], аналогичную алгоритму (3.1)–(3.3). Следует отметить, что формула (3.8) весьма трудоемка в вычислительном аспекте, поскольку требует высокоточного интегрирования быстроосциллирующей функции. Искомые фазы $\phi_n(x)$ при найденных выражениях $\psi_n(x) = \psi(x, \epsilon_n)$ вычисляются посредством формулы замены (3.7).

Процедура последовательных замен $\phi \rightarrow \psi$ (3.7) может быть рекуррентно продолжена, что приводит к известной схеме метода ускоренной сходимости [12, 14–16]. Однако его привлекательное свойство весьма быстрого убывания погрешности связано, аналогично методу усреднения, с требованием высокой гладкости. Возникают также вычислительные трудности, обусловленные катастрофическим усложнением получающихся аналитических выражений $M^{(k)}(x, \psi^{(k)}, \epsilon)$ при росте порядка итерации $k = 1, 2, \dots$ ($M^{(1)} \equiv M$), которые усугубляются при применении техники сглаживания Мозера [16].

Для практических расчетов достаточно эффективным оказывается применение вышеизложенной процедуры, основанной на методах усреднения и асимптотических разложений. Далее предполагаются известными величины $\epsilon_n, \omega_n, \lambda_n$ и функции $\phi_n(x)$ с требуемой степенью точности по малому параметру $\zeta = (\pi n)^{-1}$. Малость погрешности, как установлено, обеспечивается либо увеличением n (номера моды колебаний или резонансной зоны), либо ростом номера итерации k , либо сочетанием этих факторов.

4. Определение амплитуд и форм собственных колебаний. После определения параметров ϵ_n и фаз $\phi_n(x)$, амплитуды $a_n(x)$ находятся, как отмечалось в разд. 2, посредством элементарных квадратур

$$a_n(x) = a_n^0 \exp \left[\int_0^x F_+(y, \phi_n(y), \epsilon_n) dy \right], \quad a_n^0 = \text{const} \quad (4.1)$$

Здесь a_n^0 – произвольные постоянные, выбираемые из дополнительных условий, например из условия нормировки "с весом" $f'_\lambda(x, \lambda_n)$. Однако высокоточное интегрирование быстроосциллирующей функции F_+ в выражении (4.1), как и M в (3.8), весьма затруднительно при численных расчетах. Это обусловлено требованием малости шага интегрирования: $\Delta y \ll \epsilon_n \ll 1$ при $n \gg 1$. Представляется более эффективным применение аналитической процедуры метода усреднения с последующим использованием численных методов интегрирования регулярных (гладких) функций [9–11] (см. разд. 2, 3).

Введем неизвестную сглаженную переменную b , отвечающую a , и будем строить замену переменных $(a, \phi) \rightarrow (b, \psi)$, близкую к тождественной, и такую, чтобы уравнения для b, ψ не содержали ψ с требуемой степенью точности по ϵ . Такая замена для фазы $\phi \rightarrow \psi$ построена независимо в разд. 2 (см. (2.1)). Замена $a \rightarrow b$ зависит от ψ ,

а также от x, ε ; она имеет вид

$$a = b(1 + \varepsilon U(x, \psi, \varepsilon)), \quad U = U_1(x, \psi, \varepsilon) + \varepsilon U_2 + \dots + \varepsilon^{k-1} U_k + \varepsilon^k \dots \quad (4.2)$$

$$db/ds = \varepsilon b d(x, \varepsilon), \quad d = d_1(x, \varepsilon) + \varepsilon d_2 + \dots + \varepsilon^{k-1} d_k + \varepsilon^k \dots$$

Функции U_i, d_i определяются аналогично V_i, v_i (2.2)–(2.4) и при этом используются известные выражения для V_i, v_i . С помощью элементарных операций получаются искомые представления; в частности, для $d_{1,2,3}$ и $U_{1,2}$ получим явные аналитические выражения

$$\begin{aligned} d_1 &= \langle F_+ \rangle = -\frac{1}{2} h(x), \\ d_2 &= \langle F_+ U_1 \rangle + \left\langle \frac{\partial F_+}{\partial \varphi} V_1 \right\rangle - d_1 \langle U_1 \rangle - \left\langle \frac{\partial U_1}{\partial x} \right\rangle = \frac{v_0}{8} H(x) G(x, \varepsilon) - \frac{1}{4} G'(x, \varepsilon) \\ d_3 &= \left\langle F_+ U_2 + \frac{\partial F_+}{\partial \varphi} (U_1 V_1 + V_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_+}{\partial \varphi^2} V_1^2 + d_2 U_1 + d_1 U_2 - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$U_1 = \frac{1}{v_0} \int_0^\psi (F_+ - \langle F_+ \rangle) d\varphi = -\frac{1}{2v_0(x)} N_+(x, \psi, \varepsilon)$$

$$U_2 = \frac{1}{v_0} \int_0^\psi \left(F_+ U_1 + \frac{\partial F_+}{\partial \varphi} V_1 - d_2 - d_1 U_1 - \frac{\partial U_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} \right) d\varphi$$

Отметим, что средние от функций $F_+ U_1, (\partial F_+ / \partial \varphi) V_1, \partial U_1 / \partial \varphi$ и $\partial U_2 / \partial \varphi$ тождественно равны нулю. Аналогично (4.3) вычисляются аналитически последующие коэффициенты разложений (4.2); определение U_k для k -го приближения не требуется (см. выше).

Далее с помощью формул замены (4.2) находится искомая амплитуда $a_n^{(k)}(x)$ в требуемом приближении (с погрешностью $O(\zeta^k)$)

$$a_n^{(k)}(x) = b_n^{(k)}(x) \left(1 + \varepsilon_n^{(k)} U^{(k-1)}(x, \psi_n^{(k-1)}, \varepsilon_n^{(k-1)}) \right), \quad U^{(k-1)} = U_1 + \varepsilon U_2 + \dots + \varepsilon^{k-2} U_{k-1} \quad (4.4)$$

$$b_n^{(k)}(x) = a_n^0 \exp \left[\int_0^x d^{(k)}(y, \varepsilon_n^{(k)}) dy \right], \quad d^{(k)} = d_1 + \varepsilon d_2 + \dots + \varepsilon^{k-1} d_k$$

Подставим теперь известные функции $a_n^{(k)}(x)$ (4.4) и $\varphi_n^{(k)}(x)$ (3.6) в формулы замены (3.1); получим искомые выражения для форм $u_n(x)$ собственных колебаний и их производных в k -м приближении

$$u_n^{(k)}(x) = a_n^{(k)}(x) \sin \varphi_n^{(k)}(x), \quad |u_n - u_n^{(k)}| \leq c \zeta^k, \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.5)$$

$$u_n^{(k)'}(x) = \omega_n^{(k)} v_0(x) a_n^{(k)}(x) \cos \varphi_n^{(k)}(x), \quad |u_n' - u_n^{(k)'}| \leq c \zeta^{k-1}$$

Функции $u_n^{(k)}(x), u_m^{(k)}(x)$ (4.5) удовлетворяют приближенному условию ортогональности при $n, m \gg 1$:

$$\begin{aligned} & (\lambda_n^{(k)} - \lambda_m^{(k)})^{-1} \int_0^L u_n^{(k)}(x) u_m^{(k)}(x) \left(f(x, \lambda_n^{(k)}) - f(x, \lambda_m^{(k)}) \right) dx = \\ & = \delta_{nm} + O(\zeta_*^k), \quad \zeta_* = \max((\pi n)^{-1}, (\pi m)^{-1}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

В (4.6) считается, что $n \sim m$; при этом учитывается, что величины $\omega_n^{(k)}$, $\omega_m^{(k)}$ могут существенно различаться: $\omega_n^{(k)} - \omega_m^{(k)} = O(1)$.

Во втором приближении, на порядок по степеням $\zeta = (\pi n)^{-1}$ уточняющем выражение (1.3), для переменных $a_n(x)$, $u_n(x)$ получены представления в явной аналитической форме

$$a_n^{(2)}(x) = A_n^0 \mu_0^{1/2}(x) \left(1 + \varepsilon_n^{(0)} I_-(x) \right), \quad I_{\pm} = \frac{1}{8} \int_0^x h(y) G(y, 0) dy \pm \frac{1}{4} (G(x, 0) - G(0, 0))$$

$$u_n^{(2)}(x) = A_n^0 \mu_0^{1/2}(x) \left(\sin \psi_n^{(2)}(x) + \varepsilon_n^{(0)} I_+(x) \sin \psi_n^{(1)}(x) \right), \quad A_n^0 = \text{const}$$
(4.7)

В формулах (4.7) отброшены члены $O(\zeta^2)$. Отметим, что выражения для последующих приближений имеют чрезвычайно громоздкий вид и при необходимости могут быть получены с помощью программы символьных вычислений.

Для приближенного решения системы уравнений (2.1) при заданном $\varepsilon = \varepsilon_n$ применима процедура, сочетающая методы замены переменных (усреднения и ускоренной сходимости) и последовательных приближений [11], которая аналогична (3.7), (3.8). Однако она приводит к весьма трудоемким расчетам при численном интегрировании быстроосциллирующих функций (см. выше).

В прикладном аспекте основной интерес представляет высокоточное нахождение собственных частот колебаний. Эти величины менее подвержены влиянию трудно учитываемых возмущающих факторов (нелинейностей и диссипации различной физической природы, дрейфа параметров и др.). Собственные частоты являются важными стабильными характеристиками механических колебательных систем.

5. Другие типы краевых задач. Изложенная схема определения частот и форм колебаний высших мод распространяется непосредственно на краевые задачи с другими граничными условиями.

1°. Пусть для уравнения (1.1) граничные условия отвечают свободным концам, т.е. $u'(0) = u'(L) = 0$. Тогда для фазы φ в замене (2.1) имеют место краевые условия

$$\varphi(0) = \pi/2, \quad \varphi(L\varepsilon^{-1}) = (\pi/2)(2n+1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Заметим, что удобнее было бы искать решение в виде

$$u = a \cos \varphi, \quad du/ds = -av_0 \sin \varphi$$
(5.1)

Тогда краевые условия сохраняют вид (2.1), однако уравнения для a , φ несколько изменятся. Не повторяя сходные построения, приведем, в частности, коэффициенты замен типа (2.2)–(2.4), (4.2), (4.3) для нахождения второго приближения

$$v_0 = (r/p)^{1/2}, \quad v_1 = -\frac{1}{2}g, \quad v_2 = \frac{1}{4}H' - \frac{1}{8}v_0(H^2 + G^2)$$

$$V_1 = (2v_0)^{-1} F_+(x, \psi, \varepsilon), \quad V_1(x, (\pi/2)(2n+1), \varepsilon) \equiv 0$$
(5.2)

$$d_1 = -\frac{1}{2}h, \quad d_2 = \frac{1}{4}G' - \frac{1}{8}v_0 HG$$

$$U_1 = -(2v_0)^{-1} N_+(x, \psi, \varepsilon), \quad U_1(x, (\pi/2)(2n+1), \varepsilon) \equiv 0$$

Аналогично изложенному в разд. 3 определяются собственные значения параметров ε_n , ω_n , λ_n . Формулы для вычисления искомых функций практически повторяются. Сходным образом проводятся расчеты, когда один из концов закреплен, а другой свободен.

2°. Исследуем кратко асимптотику частот и форм высших мод колебаний системы (1.1), (1.2) для общего случая упругого закрепления концов: $ru' \mp k_x u = 0$ при $x = 0, L$,

где $k_{0,L}$ — коэффициенты сосредоточенной на концах упругости. Из физических представлений следует вывод, что при $\omega \rightarrow \infty$ основное значение имеет слагаемое, характеризующее распределенную упругость при $x = 0, L$, т.е. $u'(0) = u'(L) = 0$, если $k_{0,L} \rightarrow \infty$. Поэтому, как и в случае свободных концов, см. п.1°, удобнее ввести замену (5.1), которая позволяет представить исходную краевую задачу в виде

$$\begin{aligned} da/ds &= \varepsilon a F_+(x, \varphi - \pi/2, \varepsilon), \quad a(0) = a^0 \neq 0 \\ d\varphi/ds &= v_0(x) + \varepsilon N_+(x, \varphi - \pi/2, \varepsilon), \quad x = \varepsilon s \\ \varphi(0) &= \varphi^0 = \arctg(\varepsilon k_0 \mu(0)), \quad \varphi(L\varepsilon^{-1}) = \varphi^L = \pi n + \arctg(\varepsilon k_L \mu_0(L)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из (5.3) следует, что сосредоточенная на концах упругость при $k_{0,L} \sim 1$ оказывает влияние на решение только во втором приближении по ε . Для искомых коэффициентов v_i, V_i получим выражения

$$v_0 = (r/p)^{1/2}, \quad v_1 = -\frac{1}{2}g, \quad v_2 = \frac{1}{4}H' \cos 2\varphi^0 - \frac{1}{4}G' \sin 2\varphi^0 - \frac{1}{8}v_0(H^2 + G^2) \quad (5.4)$$

$$V_1 = -\frac{1}{4}\left(H(\cos 2\varphi^0 - \cos 2\psi) + G(\sin 2\psi - \sin 2\varphi^0)\right)$$

и т.д. Величины ω_n в главном (нулевом), первом и втором приближениях определяются из условий типа (3.1)–(3.3) в виде

$$\varepsilon_n^{(k)} = \frac{1}{\omega_n^{(k)}}, \quad \lambda_n^{(k)} = \omega_n^{(k)2}; \quad \omega_n^{(0)} = \frac{\pi n}{\alpha_0}, \quad \omega_n^{(1)} = \frac{\pi n}{\alpha_0} - \frac{\alpha_1(0)}{\alpha_0} \quad (5.5)$$

$$\omega_n^{(2)} = \frac{\pi n}{\alpha_0} - \frac{\alpha_1(\varepsilon_n^{(0)})}{\alpha_0} - \frac{\alpha_2(0)}{\pi n} + \frac{\delta\varphi^L - \varphi^0}{\alpha_0}, \quad \delta\varphi^L = \varphi^L - \pi n$$

Следует иметь в виду, что согласно (5.3) величины $\varphi^0, \delta\varphi^L \sim \zeta$. На основе формул (5.4), (5.5) аналогично (3.4), (3.6) находятся фазы $\varphi_n(x)$, а затем амплитуды $a_n(x)$ и формы $u_n(x)$ собственных колебаний с требуемой степенью точности по ζ (см. разд. 4).

3°. Развитый выше подход, основанный на сочетании метода усреднения и асимптотических разложений, может быть также распространен на обобщенные краевые задачи со смешанными граничными условиями (например, условиями периодичности в задаче Хилла), условиями, зависящими от λ , а также на более общие уравнения состояния, в частности, на системы уравнений с переменными коэффициентами, зависящими от λ определенным достаточно произвольным образом. Существенный интерес для приложений к задачам теории упругих и параметрических колебаний представляет развитие асимптотических методов нелинейной механики для взаимодействующих многомерных систем, а также для уравнений в частных производных, например для асимптотики частот и форм собственных колебаний неоднородных мембран, в том числе со сложной границей.

Применение разработанного конструктивного подхода к построению частот и форм высших мод колебаний с заданной точностью в сочетании с высокоэффективным численно-аналитическим методом ускоренной сходимости [4] для определения низших частот и форм позволяет проводить достаточно полные исследования широкого класса механических систем.

6. Расчет конкретных механических систем. Приведем для иллюстрации расчет конкретных примеров, представляющих интерес для приложений (колебания неоднородных упругих систем, параметрические колебания со сложным возбуждением). Вычислим высшие собственные значения (частоты или параметры) некоторых колебательных систем с помощью изложенной в разд. 2, 3, 5 методики.

6.1. Продольные колебания неоднородного прямолинейного стержня. Собственные частоты и формы определяются в результате решения задачи Штурма–Лиувилля [1, 5]

$$(ES(x)u')' + \lambda dS(x)u = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (6.1)$$

$$1) \ u(0) = u(l) = 0; \quad 2) \ u'(0) = u'(l) = 0$$

Здесь l – длина стержня, E – модуль Юнга, d – объемная плотность, $S(x)$ – площадь поперечного сечения, λ – постоянная разделения (квадрат частоты), подлежащая определению. Для определенности в (6.1) взяты граничные условия первого и второго рода. Функции u , S , аргумент x и параметр λ приводятся к безразмерному виду так, что $E = d = l = 1$. Задача (6.1) исследуется при $\lambda \gg 1$, т.е. $\lambda dl^2/E \gg 1$ в исходных размерных переменных.

Согласно (1.1), (1.2) имеем $r = p \equiv S(x)$, $q \equiv 0$; приведение к виду системы (2.1) дает $v_0 \equiv 1$, $g \equiv 0$, $h = S'/S$. Применяя формулы (2.3), (5.2), получим

$$v_{1,3} \equiv 0, \quad v_2^{1,2} = \mp \frac{1}{4} h' - \frac{1}{8} h^2$$

где верхние индексы означают соответствие граничным условиям 1, 2 согласно (6.1).

При помощи соотношений (3.1)–(3.3), (5.2) получим с погрешностью $O(\zeta^3)$ искомые выражения для собственных частот

$$\omega_n^{1,2} = \pi n + \delta\omega_n^{1,2}, \quad \delta\omega_n^{1,2} = \frac{1}{4\pi n} \left[\pm \frac{S'(x)}{S(x)} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{S'(x)}{S(x)} \right)^2 dx \right] \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует, что относительный вклад неоднородности $O(\zeta^2)$, а абсолютный – $O(\zeta)$; он обусловлен двумя факторами: локальным при $x = 0, 1$ и интегральным (квадратура).

Рассмотрим конкретные выражения для функции $S(x)$.

Пусть $S(x) = 1 + \theta(2x - 1)$ – линейная функция x , где $|\theta| < 1$; тогда $S(1/2) = 1$ независимо от значения заданного параметра θ , а объем стержня $V \equiv 1$. Подстановка $S(x)$ в (6.2) приводит к поправкам

$$\delta\omega_n^1 = -\frac{1}{2}(\pi n)^{-1} \theta^2 (1 - \theta^2)^{-1}, \quad \delta\omega_n^2 = \frac{3}{2}(\pi n)^{-1} \theta^2 (1 - \theta^2)^{-1} \quad (6.3)$$

Из анализа выражений (6.2), (6.3) получается качественный вывод: линейная по x неоднородность в случае закрепленных концов приводит к уменьшению собственных частот, а для свободных – к их увеличению.

Рассмотрим теперь колебания стержня кругового сечения, радиус которого изменяется по x линейно: $R(x) = R_0 + \theta(2x - 1)$ при условии $|\theta| < R_0$. Площадь сечения $S(x) = \pi R^2(x)$, но $S(1/2) = \pi R_0^2$ независимо от θ . Согласно (6.2) получим величины поправок

$$\delta\omega_n^1 = 0, \quad \delta\omega_n^2 = 4(\pi n)^{-1} \theta^2 (R_0^2 - \theta^2)^{-1}, \quad |\theta| < R_0 \quad (6.4)$$

Таким образом, из (6.4) следует, что во втором приближении по ζ частота продольных колебаний конического стержня постоянна по отношению к параметру θ для случая защемленных концов и возрастает, когда $\theta \neq 0$, для стержня со свободными концами. Если при этом потребовать, чтобы объем стержня V был фиксирован и равен $\pi \kappa^2$, где $\kappa = \text{const}$, то для искомых поправок получим выражения

$$\delta\omega_n^1 = 0, \quad \delta\omega_n^2 = (\pi n)^{-1} \gamma^2 \left(1 - \frac{1}{3} \gamma^2\right)^{-1}, \quad \gamma^2 = 4\theta^2 \kappa^{-2} < 3 \quad (6.5)$$

Итак, изменение параметра коничности θ для семейства стержней постоянного объема приводит к аналогичным качественным выводам относительно поправок собственных частот колебаний высших мод. С помощью формул (6.2) могут быть рассчитаны добавки $\delta\omega_n^{1,2}$ для произвольных дифференцируемых функций $S(x)$. В общем случае они имеют произвольный знак или равны нулю в зависимости от влияния локального фактора; интегральное слагаемое всегда положительно.

6.2. Колебания неоднородной струны. Собственные частоты и формы поперечных колебаний сильно натянутой струны определяются в результате решения классических краевых задач для уравнения

$$Tu'' + \lambda\rho(x)u = 0, \quad \rho(x) = dS(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (6.6)$$

Для определенности в качестве граничных условий возьмем соотношения 1, 2 из (6.1). Здесь T – постоянное натяжение струны, $\rho(x)$ – линейная плотность, l – длина струны. Без ограничения общности можно положить $T = l = d = 1$. Функции u , ρ , аргумент x и параметр λ считаются приведенными к безразмерному виду.

Согласно (1.1), (1.2) имеем $r \equiv \rho(x)$, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$; преобразование (6.6) к виду (2.1) дает выражения: $v_0 = \sqrt{\rho(x)}$, $g \equiv 0$, $h = 1/2 \rho'(x)/\rho(x)$, где $\rho(x) = S(x)$. Как и в примере 6.1, применение формул (2.3) приводит к выражениям

$$v_{1,3} \equiv 0, \quad v_2^{1,2} = \mp 1/4 H' - 1/8 v_0 H^2$$

С помощью соотношений (3.1)–(3.3), (5.2) находим собственные частоты $\omega_n^{1,2}$ в третьем приближении (относительная погрешность $O(\zeta^4)$, абсолютная – $O(\zeta^3)$)

$$\omega_n^{1,2} = \pi n / \alpha_0 + \delta\omega_n^{1,2}, \quad \delta\omega_n^{1,2} = -\alpha_2^{1,2} / (\pi n) \quad (6.7)$$

$$\alpha_0 = \int_0^1 \sqrt{\rho(x)} dx, \quad \alpha_2^{1,2} = \mp \frac{1}{4} (H(1) - H(0)) - \frac{1}{8} \int_0^1 v_0(x) H^2(x) dx$$

Исследуем поведение поправок $\delta\omega_n^{1,2}$ (6.7) для разных функций $\rho(x)$. Аналогично (6.2) интегральное слагаемое всегда положительно, а локальное может быть любого знака или нулем. Для конкретного вида функции $\rho(x)$, т.е. $S(x)$, величины α_0 , $\alpha_2^{1,2}$ в (6.7) определяются аналитически или численно.

Рассмотрим частные случаи.

Для линейной функции $\rho(x) = 1 + \theta(2x - 1)$, $|\theta| < 1$, выражения для α_0 , $\delta\omega_n^{1,2}$ находятся в аналитическом виде согласно (6.7)

$$\alpha_0 = 2(1 + \theta^2 / 3) [(1 + \theta)^{3/2} + (1 - \theta)^{3/2}]^{-1}, \quad \delta\omega_n^1 = -5/16 D / (\pi n), \quad \delta\omega_n^2 = 7/16 D / (\pi n) \quad (6.8)$$

$$D(\theta) = 4\theta^2 (1 + \theta^2 / 3) (1 - \theta^2)^{-3/2} [(1 + \theta)^{3/2} + (1 - \theta)^{3/2}]^{-1}$$

Из (6.8) аналогично модели колебаний стержня (см. (6.3)) следует качественный результат: линейное изменение плотности $\rho(x)$ по x приводит к уменьшению частоты собственных колебаний струны с закрепленными концами. Если концы струны свободны для поперечных смещений, то добавка положительна. Заметим, что для указанного семейства струн объем (масса) постоянен: $V(\theta) \equiv 1$ ($m(\theta) \equiv 1$).

Пусть теперь радиус струны кругового сечения изменяется линейно, а масса (объем) фиксирована и равна $m(\theta) = \pi$ независимо от θ , что приводит к связи $R_0^2 =$

$= 1 - \theta^2/3$. Аналогично (6.8) получим

$$\alpha_0 = \left(1 - \theta^2/3\right)^{1/2}, \quad \delta\omega_n^1 = -\frac{1}{2}D/(\pi n), \quad \delta\omega_n^2 = \frac{3}{2}D/(\pi n) \quad (6.9)$$

$$D(\theta) = 4\theta^2 \left(1 - \theta^2/3\right)^{1/2} \left(1 - \frac{4}{3}\theta^2\right)^{-2}, \quad \theta^2 < \frac{3}{4}$$

Из (6.9) следует, что $\delta\omega_n^1 < 0$, как и в соотношениях (6.3), (6.8), но в отличие от (6.4), (6.5). Поправки частот в случае свободных концов, как и выше, вновь оказались положительными. Посредством соотношений (6.7) могут быть определены главные члены и добавки высших частот колебаний для произвольных гладких функций $\rho(x)$. Отметим, что уточняющие поправки могут быть произвольного знака вследствие существенного влияния локального фактора (при $x = 0, 1$).

6.3. Асимптотика собственных значений в задаче Хилла. Рассматривается задача высокоточного построения периодических решений уравнения типа Хилла

$$u'' + [\lambda - q(x)]u = 0, \quad q(x+1) \equiv q(x), \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1) \quad (6.10)$$

Здесь $q(x)$ – достаточно гладкая периодическая функция, возможно зависящая также от некоторых параметров. Требуется найти вещественные значения λ_n , отвечающие достаточно высоким модам колебаний $n \gg 1$. К соотношениям вида (6.10) приводится весьма широкий класс задач теории колебаний, теории упругости и математической физики (см. например [1, 2, 9, 17]).

Исследуем часто встречающуюся в приложениях ситуацию, когда $q(x) \equiv q(-x)$ – четная функция. Тогда задача (6.10) эквивалентна двум задачам Штурма–Лиувилля с граничными условиями первого и второго рода, которым соответствуют нечетные и четные решения. Отметим, что наряду с резонансами $1/n$ существуют резонансы $2/n$, включающие первые при n четном. В соответствии с обозначениями (1.1), (1.2) имеем классическую задачу: возмущение имеет порядок ε^2 , где $\varepsilon = \omega^{-1}$, $\lambda = \omega^2$. Выполняя элементарные выкладки, аналогичные проведенным в разд. 2, получим искомые выражения для функций v_i , отвечающих пятому приближению по степеням ε (относительная погрешность $O(\varepsilon^6)$), для краевых условий первого рода (знак плюс перед функцией $q''(x)$) и второго рода (знак минус)

$$v_0 = 1, \quad v_2 = -\frac{1}{2}q(x), \quad v_4 = \frac{1}{8}(\pm q''(x) - q^2(x)), \quad v_{1,3,5} \equiv 0$$

$$v^{(5)}(x, \varepsilon) = v_0 + \varepsilon^2 v_2(x) + \varepsilon^4 v_4(x) \quad (6.11)$$

Собственные частоты с абсолютной погрешностью $O(\zeta^5)$ вычисляются на основе выражений (6.11) согласно процедуре, описанной в разд. 3. В результате получаются искомые представления

$$\omega_n^{(5)} = \pi n - \frac{\alpha_2}{\pi n} - \frac{\alpha_2^2 + \alpha_4}{(\pi n)^3}, \quad \alpha_{2,4} = \int_0^1 v_{2,4}(x) dx \quad (6.12)$$

Из соотношений (6.11), (6.12) следует, что различие асимптотик собственных значений ω_n для условий первого и второго рода в слагаемых $O(\zeta^3)$ не проявляется, хотя в v_4 разные знаки перед функцией q'' . Это связано с тем, что вследствие гладкости и периодичности функции q интеграл от $q''(x)$ равен нулю. Различие проявляется при учете членов более высокого порядка. Далее, если функция имеет нулевое среднее, то $\alpha_2 = 0$, а поправка положительна

$$\delta\omega_n^{1,2} = \frac{1}{8}\langle q^2 \rangle (\pi n)^{-3}, \quad \langle q \rangle = 0$$

где $\langle q^2 \rangle$ – среднее от q^2 (см. уравнение Матье и др. [2, 9, 17, 18]). В общем случае, когда функция $q(x)$ не является четной, может быть разработана специальная процедура асимптотики собственных значений λ_n периодической краевой задачи. Для разрывных функций $q(x)$ (уравнение Мейснера [17]) согласно (6.11) можно выписать искомые приближения до членов $O(\zeta^3)$.

6.4. Пространственные колебания спутника. Предполагается, что полярная ось динамически симметричного спутника совершает колебания произвольной амплитуды (или вращения) в плоскости круговой орбиты. Затем производится малое пространственное возмущение этих движений и исследуются малые угловые отклонения оси спутника от плоскости орбиты. Соответствующая обобщенная задача для определения периодических решений в безразмерной форме описывается выражениями [18] (для определенности рассматривается случай сплюснутого тела)

$$u'' + 16K^2(k)[(\chi + k \operatorname{cn} \theta)^2 - k^2 \operatorname{sn}^2 \theta]u = 0 \quad (6.13)$$

$$u = u(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1)$$

$$k^2 = 2h_0\chi^2, \quad \chi = (3(\alpha - 1))^{-1/2}, \quad 0 \leq k < 1, \quad 1 < \alpha \leq 2$$

Здесь u – угловое отклонение полярной оси, штрихом обозначена производная по аргументу $x = w/(2\pi)$, w – независимая переменная, характеризующая плоские колебания в переменных "действие–угол"; $\theta = 4K(k)x$ – аргумент эллиптических функций Якоби cn , sn ; $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Уравнение содержит два постоянных параметра: модуль k и параметр χ ; h_0 – безразмерная энергия плоских колебаний, α – отношение полярного и экваториального моментов инерции.

В случае вытянутого тела ($0 \leq \alpha < 1$) уравнение малых колебаний типа (6.13) модифицируется [18].

Вследствие четности по x коэффициента при u периодическая задача (6.13) эквивалентна двум задачам Штурма–Лиувилля (см. пример 6.3). Строится асимптотика собственных значений $\chi_n(k)$ для достаточно больших значений n , определяющих номер резонансной зоны, и при $0 \leq k < 1$. В соответствии с обозначениями (1.1), (1.2) имеем

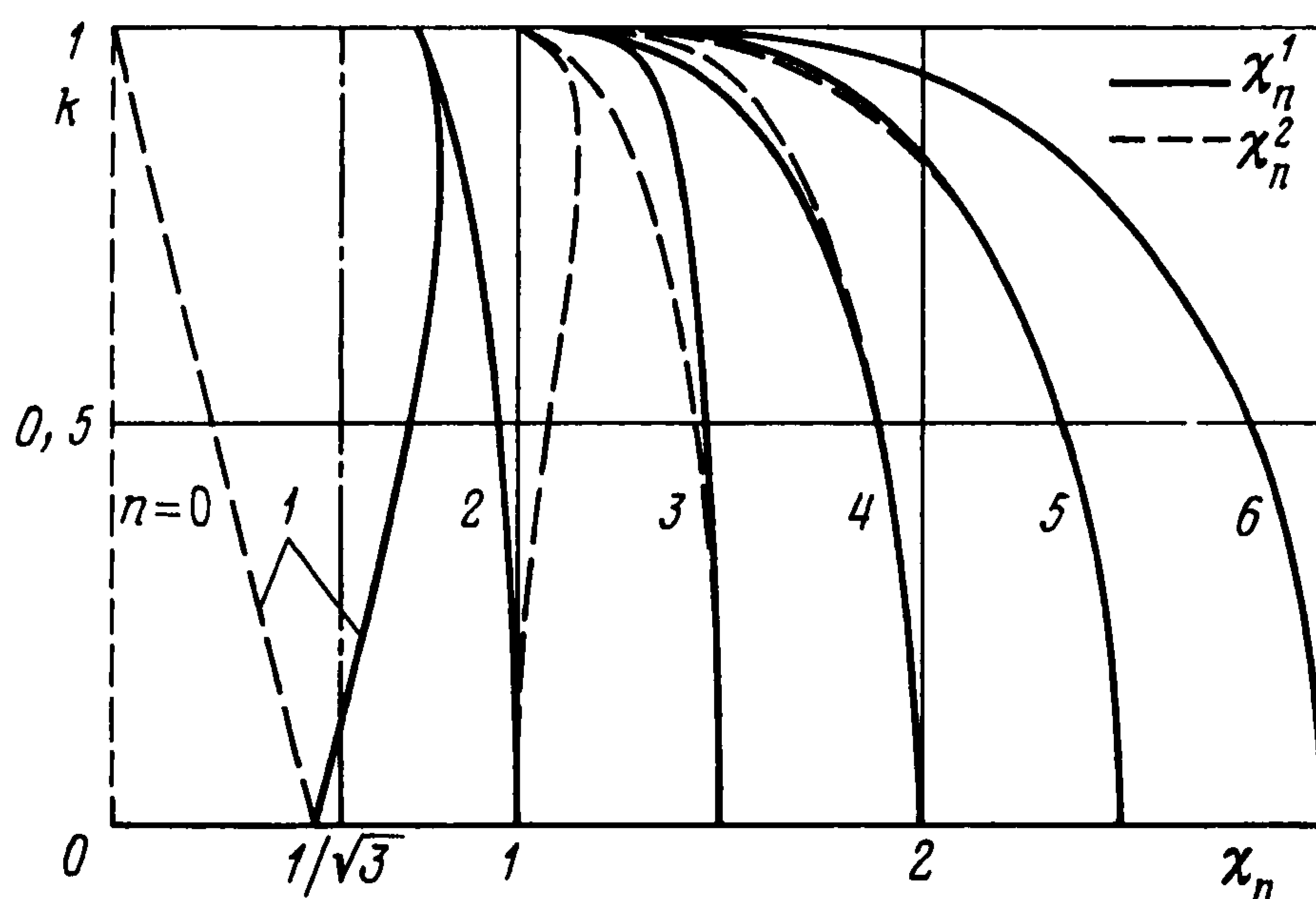
$$\lambda = \omega^2 = (4K\chi)^2, \quad \varepsilon = \omega^{-1}, \quad \kappa = 4Kk \quad (6.14)$$

$$p = r \equiv 1, \quad q = -2\kappa \operatorname{cn} \theta - \varepsilon \kappa^2 (\operatorname{cn}^2 \theta - \operatorname{sn}^2 \theta)$$

Определим собственные значения $\omega_n(\kappa)$ приведенной согласно (6.14) задачи во втором приближении по параметру $\zeta = (\pi n)^{-1}$, т.е. с относительной погрешностью $O(\zeta^3)$ для $\kappa \sim 1$, когда значение k "не очень близко" к $k = 1$. В этом приближении величины $\omega_n^{1,2}(\kappa)$ для обеих краевых задач совпадают. Согласно построениям разд. 2, 5 при учете выражений (6.14) получим

$$\begin{aligned} v_0 &= 1, \quad v_1 = \kappa \operatorname{cn} \theta + \frac{1}{2} \varepsilon \kappa^2 (\operatorname{cn}^2 \theta - \operatorname{sn}^2 \theta), \quad v_2 = -\frac{1}{2} \kappa^2 \operatorname{cn}^2 \theta \\ \omega_n(\kappa) &= \pi n + \frac{1}{2\pi n} \kappa^2 \langle \operatorname{sn}^2 \theta \rangle, \quad \langle \operatorname{sn}^2 \theta \rangle = \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \\ \chi_n(k) &= \frac{\pi n}{4K(k)} + \frac{2}{\pi n} (K(k) - E(k)) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Здесь E – полный эллиптический интеграл второго рода.



Из (6.15) следует оценка

$$\chi_n \approx (n/2)(1 - k^2/4)$$

при $k^4 \ll 1$, а при $k \rightarrow 1$ главный член выражения для χ_n монотонно убывает, поскольку $K \rightarrow \infty$.

Численные расчеты при $0 \leq k \leq 0,999$ для $\chi_n^{1,2}$ представлены на фигуре (верхний индекс 1 соответствует нечетным колебаниям, 2 – четным). Они получены высокоточным методом ускоренной сходимости [4] и свидетельствуют о приемлемой точности выражений (6.15) при $n = 2$, если $0 \leq k \leq 0,2$; кривые χ_2^1 и χ_2^2 несколько расходятся. Для значения $n = 3$ имеется хорошее соответствие при $0 \leq k \leq 0,4$; расхождение существенно меньше. Рост номера n резонансной зоны приводит к увеличению точности и расширению диапазона значений k . Кривые $\chi_n^1(k)$ и $\chi_n^2(k)$ расходятся все меньше и изгибаются согласно асимптотике главного члена в (6.15). Интересен следующий качественный результат:

$$\chi_n^{1,2}(k) \rightarrow 1, \quad \alpha_n^{1,2}(k) \rightarrow 4/3, \quad k \rightarrow 1, \quad n > 2$$

Отметим, что случай вытянутого тела и режимы вращений исследуются аналогично на основе соответствующих модифицированных уравнений [18].

Таким образом, расчет содержательных конкретных задач свидетельствует о высокой эффективности разработанного асимптотического подхода к исследованию высших мод колебаний механических систем.

Автор благодарит А.М. Шматкова за помощь в высокоточных расчетах примера 6.4 и построении графиков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00222).

ЛИТЕРАТУРА

1. Collatz L. Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen. Leipzig: Akad. Verlag, 1963. = Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
2. Kamke E. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. 2. Leipzig: Acad. Verlag, 1959. 244 S. = Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.

3. Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Сов. энциклопедия, 1982. 1184 с.
4. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Эффективное решение обобщенной задачи Штурма–Лиувилля // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 3. С. 323–326.
5. *Courant R., Hilbert D. Methoden der Mathematischen Physik. Bd. 1. Berlin: Springer, 1931. 469 S. = Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1951. 476 с.*
6. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977. 331 с.
7. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Гостехиздат, 1954. 352 с.
8. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
10. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
11. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
12. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1969. 247 с.
13. *Naufeh A.H. Introduction to Perturbation Techniques. N.Y. etc.: Wiley, 1981. = Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Наука, 1984. 535 с.*
14. Нейштадт А.И. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 197–204.
15. Колмогоров А.Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. № 4. С. 527–530.
16. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
17. *Strutt M.J.O. Lamésche-Mathieusche und Verwandte Funktionen in Physik und Technik. Berlin: Springer, 1932. = Стретт М.Д.О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков; Киев: Гостехиздат Украины, 1935. 237 с.*
18. Маркеев А.П. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // Космич. исследования. 1975. Т. 13. Вып. 3. С. 322–336.

Москва

Поступила в редакцию
29.X.1998